

事例 2 数学観の変容を促し、興味・関心・意欲を高めるための教材の開発 ～ クロススタッフを用いた三角比の導入 ～

1. 事例の概要

(1) 指導の改善

現在授業で扱っている「数学」は、いうまでもなく先人達の知恵を源流としている。特に、ここで取り上げる三角比の分野でそれを想像することは比較的やすい。いいかえれば「数学」が数学と呼ばれるようになるずっと以前から、測量など日常的な生活の営みとして先人達は数学的活動を行い、それが発展して今日の「数学」があるともいえる。それにも関わらず、生徒のもつ三角比(さらには数学)のイメージはどうか。教育課程実施状況調査によれば、74.6%もの生徒が、「三角比が普段の生活や社会に出て役立つとは思わない。」と回答している。教師が描いているイメージと生徒のもつイメージがあまりにも違っていることを認識し、これからの授業を考えていかなければならない。

三角比は、その起源が紀元前 3000 年にさかのぼるほど古く、測量などの人間生活に密着して発展してきただけでなく、数学の発展にも大きく寄与してきた。また、三角比の授業では、以前から、校舎内外で、直接測れないものを求めるなどの体験的な学習に取り組んでいる事例が数多く報告されている。そこで、本事例では、数学史的な要素を取り入れ、三角比の導入として、実際に測量で使われていた道具を教材化し、数学のおもしろさ、奥深さを体感しながら、三角比を学ぶ意義や必要性を実感し、より積極的にその後の授業に取り組めるようになることをねらいとした。

授業を構築していく際には、次の点を考慮した。

- ・中学校で学習した、相似の内容を利用して簡単な測量を行い、三角比を学ぶ意義を実感させる。
- ・道具の改良には数学的な考え方、数学の知識が必要であることを実感させる。
- ・数学は決して机の上だけで発展したものではなく、生活に密着して発展してきたことを実感させる。
- ・授業の進度を考慮して、授業は1時間で終了する。
- ・授業を進めていく上では、生徒が自分の考えを表現し合い、お互いの考えを比較したり検討したりすることができるように配慮する。

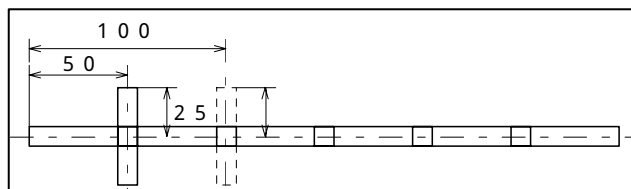
(2) 教材の開発

本事例では、クロススタッフという実際に測量で使われていた道具を教材として取り上げることにした。クロススタッフとは、2点間の距離、物の大きさ(長さ)、太陽の高度などの角度を測るための道具である。もともと、紀元前 400 年頃にカルデアの天文学者が使用していたと言われている。その後、大航海時代(15世紀～16世紀頃)には海上で盛んに使用された。

クロススタッフは、スタッフと呼ばれる長い棒を、プレートと呼ばれる板に通したものをいう。今回は、9mm×9mm×300mmの角材と9mm×9mm×50mmの角材で自作した。それぞれの角

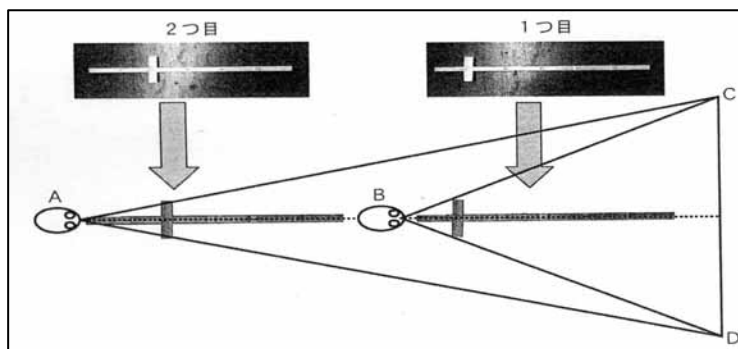


材が組み合うように、角材の幅の溝を掘った。特にスタッフと呼ばれる長い方の角材は、50mm（プレートの長さ）間隔で溝を掘る。この2つを組み合わせて測量する。

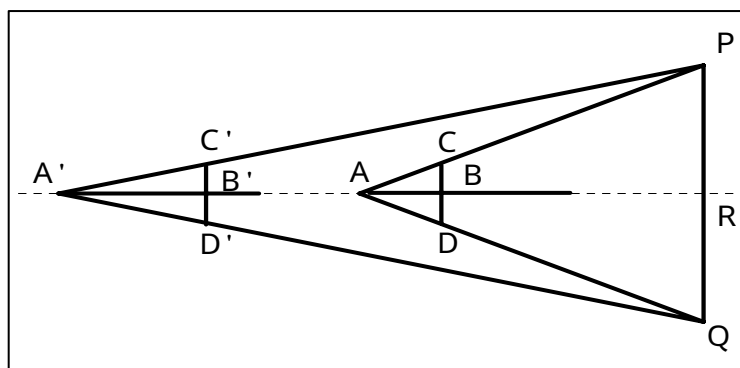


クロススタッフによる物の大きさ（長さ）の測定

クロススタッフを使って物の大きさ（長さ）を測る場合は、スタッフの1つ目の溝にプレートを置き、スタッフを水平に持って測りたいものとプレートを同時に見ながら、測りたいものがちょうどプレートに隠れる位置まで移動する。その位置で、プレートを手前から2つ目の溝に置き、測りたいものとプレートを同時に見ながら、後ろに下がっていき、再び、測りたいものがプレートに隠れるところで止まる。このとき、後ろに下がった距離と測ったものの長さが等しくなっている。これは、測りたいものとの間に障害物等があり、直接測ることができないときにも有効である。



証明は次のようになる。
後ろに下がる前のクロススタッフを ABCD、後ろに下がった後のクロススタッフを A'B'C'D' とする。測る長さを PQ とし、PQ の中点を R とする。



$$ABC \quad ARP$$

$$AB : BC = 50 : 25 = 2 : 1 \text{ より}$$

$$AR : PR = 2 : 1 \dots$$

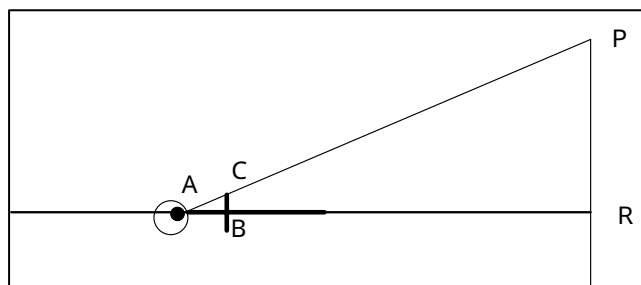
$$\text{よって } PQ = AR \dots$$

$$\text{また } A'B'C' \quad A'RP \quad A'B' : B'C' = 100 : 25 = 4 : 1 \text{ より } A'R : PR = 4 : 1 \dots$$

$$\text{よ、より、A は A'R の中点であり、このことと から } PQ = AA'$$

クロススタッフによる高さの測定

正接の導入とするために、本来クロススタッフでは使われていなかった使い方を、考えた。物の大きさ（長さ）を測定する場合は、プレートが水平になるように使ったが、高さを測定する場合は、垂直になるように使う。右の図からわかるように、ABC と ARP の相似を利用する。プレートを1つ



目の溝に置くか、2つ目の溝に置くかによって、AR : PR の比が異なることに着目させる。1つ目の溝にプレートを置いた場合、上記証明からもわかるとおり、 $AB : BC = 2 : 1$ より AR の $\frac{1}{2}$ 倍が PR となる。2つ目の溝にプレートを置いた場合、同様にして、 $AB : BC = 4 : 1$ より AR の $\frac{1}{4}$ 倍が PR となる。この $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{4}$ が何によって決まるかを考えさせることによって、正接の導入とする。

2. 指導の展開

(1) 事前アンケート調査による生徒の数学に関する意識

教育課程実施状況調査を踏まえて、授業実施前に数学に関する意識調査を行った。特に注目すべき結果を、下表に示す。(表中の「肯定的な回答率」とは、「そう思う」と「どちらかといえばそう思う」と回答した者の合計の値。また、「全国」の値は教育課程実施状況調査から。)

質問事項	肯定的な回答率
「数学の勉強は大切だ」	87.0%(全国 53.5%)
「数学を勉強すれば、私の普段の生活や社会生活の中で役立つ」	42.9%(全国 33.3%)
「普段の生活や社会生活の中で役立つよう数学を勉強したい」	57.2%(全国 31.0%)
「数学の授業がどの程度わかりますか」	33.8%(全国 35.3%)
「数学の時間にいろいろな考えを発表しあうのは楽しいと思う」	41.6%(全国 33.5%)
「数学で新しい内容や考えを勉強したら自分の身の周りの場面で使ってみますか」	13.0%(全国 9.7%)

全国と比較すると、数学の勉強の大切さや、有用性を認識している生徒が多い結果であったが、授業がわかると回答した生徒は、全国同様3割程度にとどまっている。また、数学の勉強が大切だと思っているにも関わらず、普段の生活や社会生活の中で役立つと思っている生徒はその半数であった。さらに、6割近くの生徒が、ただ単に受験としての数学ではなく、普段の生活や社会生活の中で役立つよう数学を勉強したいと思っている。これらが、現在の授業の大きな課題の1つである。多くの生徒が大学への進学を希望している現状を踏まえながらも、数学を学ぶことの意義を考えさせるような授業展開を心がける必要がある。

(2) 授業の準備

授業のねらいの設定

三角比を学ぶ意義や必要性を実感させる。

クロススタッフによる測量の原理を考えることによって、クロススタッフに数学が盛り込まれていることに気付かせる。また、クロススタッフで高さを測ることによって、正接の導入とする。

数学は生活に密着して発展してきたことを実感させる。

クロススタッフを実際に使うことによって、道具のよさを実感させるとともに、道具の改良には数学的な考え方が必要であることを実感させる。

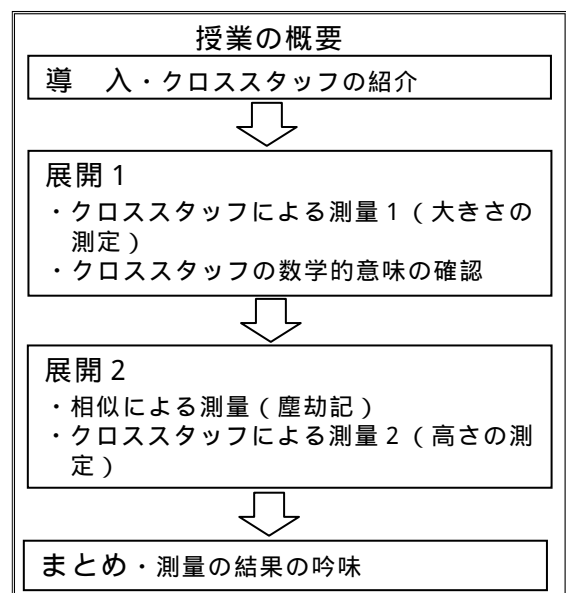
展開における工夫

授業の概要

導入では、図1の絵を提示しクロススタッフを紹介した。

展開1では、製作したクロススタッフをグループ毎に配付し(1グループ3名程度)、あえて原理を説明せず、使い方を説明し、実際に測量をさせた。測量後には、その道具の長所、短所を発表させることによって、道具のよさを実感させた。その後、クロススタッフの数学的な意味を確認した。

展開2では、塵劫記の絵(図2)を提示して、直角二等辺三角形の相似による測量について考えさせた。その後、クロススタッフによって



高さを測量させた。その際、プレートの位置をいろいろ変えて測量させた。

まとめでは、高さの測量の結果とスタッフとプレートの長さの比を吟味することによって、正接の導入とした。

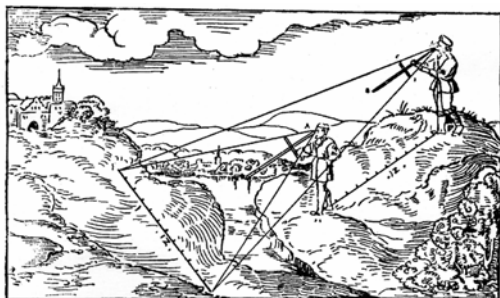


図 1



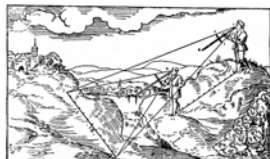
図 2

ワークシートの活用

本時は、教科書の内容への導入としての位置付けになっているので、ワークシートを作成し、使用した。特に、作業の場面があるので、作業結果も随時記入できる形とした。また、考え方を誘導するような形式とはせず、生徒自身が自由に感じたこと、考えたことが記入できるように配慮した。

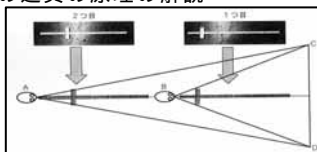
数学ワークシート 1 (先人に学ぶ数学：三角形を利用した測量)

次の絵は何をしているところだろう？



絵の中の人が使っている道具を _____ という。

この道具の原理の解説



AB=CD になることの証明

実際にクロススタッフを使って測量してみよう。

測った物 _____

測量による長さ _____

実際の長さ _____

この道具のよさ・おもしろさは？また、改善点は？

次に...

下の絵は何をしているところだろう？



上の絵は、江戸時代にもっとも売れた和算書(数学の本)「塵劫記」の中の「立ち木のながさはながみにてつもの事」の章の絵です。左側にはこう書いてあります。

「はながみを四角に折りて、またすみとすみと折りて、下のすみに小石をかみよりにてつり下げて、かみのすみすみのかねの合う所にて見るべし。さて、居る所より木の根まで間竿にてうちてみる時に七間あり。これに居だけを三尺加える時に、木のながさが七間半というなり。」

どういう意味だろう？

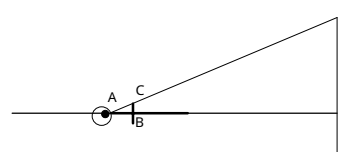
なぜ、木の高さが求まるのだろうか？

クロススタッフを別の方法で使って、手の届かないところの高さを測量してみよう。

測量による高さ _____

実際の高さ _____

今回の測量の原理



(3) 授業展開

指導内容	学習活動（課題・発問・活動等）	指導上の留意点
<p>導入</p> <p>・クロススタッフの提示・紹介・簡単な説明</p>	<p>クロススタッフの提示</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">これは何をしているところだろう。</div> <ul style="list-style-type: none"> ・生徒の反応に随時対応する。 <li style="padding-left: 20px;">「何を測っているんだろう。」 <li style="padding-left: 20px;">「どうやって測っているんだろう。」 <p>クロススタッフの紹介・簡単な説明</p> <p>「図の中の道具は“クロススタッフ”と呼ばれ、16世紀頃、船乗りたちに盛んに利用された測量の道具です。」</p> <p>クロススタッフの使い方の説明</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・絵からクロススタッフが対象物の幅を測るための道具であることに気付かせる。 ・時間を与えて、周囲の者と話し合わせる。 ・1(2)(P15)参照 ・使い方の説明(1(2)参照(P16))にとどめ、原理については測量後に簡単に触れる。
<p>展開1</p> <p>・クロススタッフによる測量1</p>	<p>クロススタッフによる測量1</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">クロススタッフを使って自分たちで測りたい物を測ってみよう。</div> <ul style="list-style-type: none"> ・測量の結果を発表する。 <p>クロススタッフの数学的な意味</p> <p>ワークシートを用いて、生徒たちが発表しながら、簡単に証明する。</p> <p>道具のよさの確認</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">この道具のよさ、すごさは何だろう。また、おもしろさはどんなところにあるだろう。逆に、難しいところや、改善した方がいいところはどこだろう。</div> <p>クロススタッフのよさ</p> <ul style="list-style-type: none"> ・簡単に作れる（誰でも作れる）。 ・離れたところから測れる。 ・原理を知らなくても使える（使い方が簡単）。 <p>クロススタッフの改善点</p> <ul style="list-style-type: none"> ・誤差（製作時の誤差、測量時の誤差）がでる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・黒板の長さ、窓の幅等を自由に測量させる。 ・三角形を利用して測量していることを実感させる。 ・時間を与えて、周囲の者と話し合わせる。 ・なぜ誤差がでるのかを考えさせ、発表させる。
<p>展開2</p> <p>・クロススタッフによる測量2</p>	<p>塵劫記の中にある木の高さの測量</p> <ul style="list-style-type: none"> ・絵を見て、文語体で書かれているところの意味を考え、発表する。 <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">今、発表してくれたことは、本当ですか？なぜ、こんな事で、木の高さが測れるんでしょうか？周りの人と話し合ってみよう。</div> <ul style="list-style-type: none"> ・黒板に掲示された絵を用いて、木の高さが測定できる理由を説明する。 ・直角二等辺三角形の性質、相似な図形の性質等を確認する。 	<ul style="list-style-type: none"> ・黒板にも、ワークシートと同じ絵を掲示する。 ・手の届かない木の高さがなぜ測れるのか、小石にはどういう意味があるのかを確認する。

指導内容	学習活動（課題・発問・活動等）	指導上の留意点
まとめ	<ul style="list-style-type: none"> ・塵劫記における測量方法のよさ 身近な物で、手の届かないところをどうやって測るかといった知恵が詰まっている。 <p>クロススタッフによる測量2</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>クロススタッフを使って手の届かないところの高さを求めてみよう。 後ろの壁に、テープが貼ってあります。あのテープが貼ってある高さをクロススタッフを使って測ってみよう。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・プレートを置く場所は、1つ目の溝、2つ目の溝、3つ目の溝など、自分たちで決めて測量する。 ・それぞれの溝で計測された結果を発表する。その際、どのように計算したかも発表する。 <p>測量結果の考察</p> <ul style="list-style-type: none"> ・1つ目の溝の班...壁からの距離を$\frac{1}{2}$倍して、目の高さを加えた。 ・2つ目の溝の班...壁からの距離を$\frac{1}{4}$倍して、目の高さを加えた。 ・3つ目の溝の班...壁からの距離を$\frac{1}{6}$倍して、目の高さを加えた。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>今、発表された、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$ は、何によって決まる数でしょうか。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・考える三角形の形が変わる。 ・考える三角形の辺の比が変わる。 ・考える三角形の角度が変わる。 <p>次時の予告</p> <p>辺の比と角度がそれぞれ関係していることを、さらに追究していくことを伝える。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・今後、このようなことを学んでいくということを紹介する。 ・授業の前に、後ろの壁の手の届かない場所にテープを貼っておく。 ・クロススタッフの数学的な意味について、再度確認しておく。 ・「プレートの位置」という答えが予想されるが、そのときは、「プレートの位置が変わると何が変わるでしょう」と発問する。

(4) 事後アンケート調査による達成状況の分析

事前アンケート調査と同じ形式で授業後に調査をした。以下はその結果の抜粋である。

選択肢調査の結果

質 問 事 項	肯定的な回答率
「数学の勉強は大切だ」	88.6%(事前 87.0%)
「数学を勉強すれば、私の普段の生活や社会生活の中で役立つ」	49.4%(事前 42.9%)
「普段の生活や社会生活の中で役立つよう数学を勉強したい」	60.8%(事前 57.2%)
「数学の授業がどの程度わかりますか」	34.2%(事前 33.8%)
「数学の時間にいろいろな考えを発表しあうのは楽しいと思う」	45.6%(事前 41.6%)
「数学で新しい内容や考えを勉強したら自分の身の周りの場面で使ってみますか」	19.0%(事前 13.0%)

自由記述の結果（誤字と思われる場合もそのまま抜粋した。）

- ア．久しぶりに楽しんで数学の授業ができた。
- イ．いつもの授業と違って自分達でいろいろやりながら、どうしてそうなるのかを考えながらやったので、普通の授業を受けるよりもいいと思った。
- ウ．数学を生かした道具を使えておもしろかった。
- エ．教科書・ノートを使わない授業だったので楽しかった。
- オ．何百年も前の人が数学の理にかなったことをしているのに驚いた。
- カ．授業でやった数学と違って別の世界の数学をやったみたいでとても楽しかった。
- キ．昔の人たちは本当に簡単な材料でいろいろなものの高さを測っていてすごいと思った。
- ク．道具を使って勉強をすると教科書だけでやるよりも理解しやすい。
- ケ．簡単で身近にあるものでも測れるのだからすごかった。
- コ．知らないうちに周りに数学が使われていることがわかった。まだまだ身の周りにいろいろな数学が使われているのではないかと興味をもった。
- サ．数学は身近なことにも役立つことが理解できた。また、道具を使ってわかりやすく理解することができた。
- シ．ただの棒2本が数学に関係しているんだと言われてすごいと思った。
- ス．日常生活の中に数学の考え方が役に立っていることがわかった。
- セ．昔のやり方での長さの測り方などのおもしろい授業だったので楽しかった。
- ソ．昔の人がこんなこと発見できるなんてすごいと思った。数学の公式とかもだれかが考えたものであって人間の脳ミソは恐ろしい……。
- タ．昔の人の知恵の奥深さに驚いた。
- チ．今まで知らなかった方法で測ることができることを知り驚きました。授業の中で実際ためしてみたりして楽しかったです。原理は少し難しかったけどよくわかった。

選択肢による調査の結果を見ると、ほとんどの調査項目で数字がわずかではあるが、上昇した。特に、「数学を勉強すれば、私の普段の生活や社会生活の中で役立つ」についての肯定的な意見は、6.5%上昇した。また、「数学で新しい内容や考えを勉強したら自分の身の周りの場面で使ってみますか」については、まだまだ数字は低いものの、6.0%上昇した。もちろん、1時間の授業で、生徒の意識が画期的に変わることは考えられない。しかし、少しずつこのような時間を増やすことによって、卒業するまでには、大きな意識の変化が期待できる。今回は、数学史的な内容も含んでいたため、普段の生活で役立つと回答した生徒は、半数程度であるが、今後も折に触れて、生活に密着して発展してきたことを実感できるような授業に取り組む必要がある。

また、自由記述を見ると、ほとんどの生徒が肯定的な意見を述べていた。記述され



【黒板消しの幅を測る生徒】



【手の届かない地点の高さを測る生徒】

ているものは、「楽しかった。」「すごいと思った、驚いた。」「わかりやすかった。」といった回答に分類することができる。その要因としては、数学の身近さ、奥深さ、先人の知恵に対する尊敬の念が十分に感じられたことであると考えられる。数学は机上の世界だけでなく、自分たちが生きている現実の中でも役立っているということや、友達と話し合うことによって数学のもつ正確さや理論そのものを高めていくというおもしろさを生徒自身が実感できたのではないだろうか。以上のことから、今回の授業のねらいとしていた、「数学は生活に密着して発展してきたことを実感させる。」ことについては、十分達成されたと考えられる。また、授業を進める上で配慮した、「生徒が自分の考えを表現し合い、お互いの考えを比較したり検討したりすることができるようにする。」ことについても、期待以上の効果があった。生徒の記述の中に、「いつもの授業と違って、自分達でいろいろやりながら、どうしてそうなるのかを考えながらやったので、普通の授業を受けるよりもいいと思った。」とあった。普段の授業においても、知識の伝達が一方通行にならないように注意しなければならない。

3. 今後の課題

数学の授業の在り方について

「先生の授業は、生徒にとって、数学を学ぶ意義が感じられるような授業ですか？」と問われると、返事に窮する。もちろん、高等学校で学ぶ数学が、全て、実生活における有用性を直接、実感できる内容ではないし、そのような教材も少ない。しかし、少ないからといって、素通りしてしまえば、生徒の意識はますます低下するばかりである。各学校の生徒の実態に応じて、数学を学ぶ意義を感じられるような授業を展開していく必要がある。ただし、高等学校における数学の学習は、実生活における有用性を感じることを目的の全てではない。数学を純粋に追求する楽しさ、おもしろさを体験させたり、多面的にものを見る力や論理的に考える力などを育成したりすることもとても大切なことである。これらのバランスを十分図りながら、これからの数学の授業を考えていかなければならない。また、授業の展開についても留意する必要がある。効率を優先するあまり、教師による一方的な授業が多くなってしまっていたが、今回の取組を通して、生徒が互いに自分の考えを表現し合い、議論し合うことによって、数学的な考え方が深まるとともに、生徒自身の中で「わかった」「おもしろかった」との思いが深まることがわかった。もちろん、生徒同士が活発に議論するためには、生徒の思考力や表現力などの実情を考慮して、教師が適切な発問を投げかけることが重要なことである。

数学に関する生徒の意識について

数学の勉強が大切だと思う生徒は、全国の調査では、5割程度しかいない。本校では、9割近くの生徒が大切さを感じているものの、数学を勉強すれば普段の生活や社会生活の中で役立つと思う生徒は4割程度であった。また、本文では紹介しなかったが、論理的に考えることができるよう数学を勉強したいと思っている生徒はちょうど半数であった。さらに、数学を勉強すれば入学試験や就職試験に役立つと思っている生徒は9割以上いた。入学試験や就職試験に役立つと思うことは悪いことではない。しかし、それと同じように、普段の生活に役立ったり、論理的に考えることができるようになったりすると感じられなければならない。生徒の意識調査を改めて実施したことによって、生徒の数学に対する意識の改善を図る必要性を実感した。また、授業を実施して、予想以上に生徒は数学的活動を望んでいることがわかった。はじめは、いつもと違う授業形式にとまどっていた生徒たちも、特に2度目の測量作業の際には、生徒同士で積極的に意見交換し合いながら活動に取り組んでいた。

卒業した生徒から「何を習ったかは忘れてしまったけど、授業は楽しかった。」との声を聞くことがある。その楽しかった記憶は、やがて学習したことを再び学習し直すときや、さらに発展させるといったときに、大いに役立つ。苦しかった記憶では、学習の動機付けにはなかなかならない。これからの数学の授業は、少しでも「楽しかった」、「おもしろかった」と思ってもらえるような工夫が必要である。そのためには、数学を学ぶ意義が意識できるような内容を随所に盛り込み、生徒自身が「数学」に接することができるような展開を考えなければならない。

引用・参考文献

- ・ 国立教育政策研究所教育課程研究センター 平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査報告書
- ・ 国立教育政策研究所 HP http://www.nier.go.jp/kaihatu/katei_h14/index.htm
- ・ 下野新聞 2005 年 6 月 16 日
- ・ 数学教育 2004 年 4 月号 明治図書 P94～98
- ・ 数学教育 2004 年 8 月号 明治図書 P94～98
- ・ http://www.macchinematematiche.unimo.it/Sito_Macchine/mostra4/sezioni/sezione1/221_ITA.htm (クロススタッフの紹介)
- ・ http://130.158.186.230/museum/Mathematics_tools/index.htm (クロススタッフの作り方など)