

指導事例 1

2次関数「2次関数とそのグラフ」における指導と評価

単元の指導計画・評価計画

1 単元の目標

具体的な事象と関連付けて、関数概念の理解を深め、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できるようにする。

また、2次関数について、表、式、グラフなどを用いてその関係を考察させ、2次関数について理解を深めるとともに、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフをかくことができるようにする。

2 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
A1 具体的な事象の中にある2つの数量関係に関心をもち、関係を調べようとする。 A2 2次関数の表、式、グラフの相違点に関心をもち、その違いを調べようとする。	B1 2つの数量関係を表、式、グラフを用いて考察することができる。 B2 2次関数のグラフの特徴を考察することができる。	C1 2つの数量関係を表、式、グラフを用いて表現することができる。 C2 2次関数のグラフの位置関係、グラフと式との関係を把握し、グラフをかくことができる。 C3 2次関数の式を一般形から標準形に変形することができる。	D1 関数の定義や関数のグラフの意味を理解している。 D2 グラフの平行移動について理解している。

* 2つの数量関係には、具体的な事象、1次関数、2次関数を含む。

3 単元の授業計画（学習活動と評価規準のかかわり）

時間	学習活動	評価規準とのかかわり	評価方法
第1時間	通話時間と電話料金の関係を表、グラフを用いて表現する。 水槽に注ぐ水の量と時間の関係を表、式、グラフを用いて表現する。 具体的な事象の中にある2つの数量関係を表、式、グラフを用いて考察する。	A1、B1、D1	関数関係にあるものについて、課題レポートを提出させ、取組の状況を確認する。
第2時間	1次関数をグラフを用いて表現することによって、グラフと式の間を関係し、1次関数のグラフをかく。 具体的な関数の値 $f(a)$ を求める。 正方形の1辺の長さとの面積の関係を表、式、グラフを用いて表現する。	A1、C1	表、式、グラフを対比させ、それぞれの表現のよさを発表させ、関心の状況を把握する。
第3時間 第4時間	関数 $y = ax^2$ ($a = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$) について、対応表を作成し、そのグラフを点をプロットすることによってかく。 グラフを観察し、2次関数のグラフの特徴を考察する。	B2、C1	グラフの特徴について発表させ、理解の状況を把握する。

第5時間 第6時間 (実践例 の授業)	$y = 2x^2$ 、 $y = 2x^2 + 3$ 、 $y = 2(x - 4)^2$ 、 $y = 2(x - 3)^2 + 4$ について、対応表を作成し、グラフをかく。 四つの2次関数の表、式、グラフの相違点について考察する。 平行移動によってそれぞれのグラフの位置関係を考察する。	A2、B2、C2	ワークシート、質問紙、机間指導、小テストにより、グラフへの関心の状況、考え方を把握する。
第7時間 第8時間	$y = ax^2 + q$ 、 $y = a(x - p)^2$ 、 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフの特徴を考察し、それぞれのグラフをかく。	C2、D2	机間指導、小テストにより定着の状況を把握する。
第9時間 第10時間	$y = ax^2 + bx + c$ のグラフを $y = a(x - p)^2 + q$ の形に変形することによってグラフをかく。	C2、C3	机間指導、小テストにより定着の状況を把握する。

数学的活動の実践例

1 本時（第5、6時間目）の目標（評価規準）

2次関数の表、式、グラフの相違点に関心を持ち、その違いを調べようとする。（A2）

2次関数のグラフの特徴を考察することができる。（B2）

2次関数のグラフの位置関係、グラフと式との関係を把握し、グラフをかくことができる。
（C2）

2 本時の数学的活動とそのねらい

形式的に2次関数のグラフの特徴を捉えるのではなく、自ら課題意識を持って取り組めるように、 $y = ax^2$ 、 $y = ax^2 + q$ 、 $y = a(x - p)^2$ 、 $y = a(x - p)^2 + q$ の形の2次関数のグラフの相互の関係について、ワークシートを用いて発見・考察し、自分の言葉で表現する。また、自分では気付かないことを他の生徒から得ることによって、「与えられた知識」ではなく「自分たちで発見した性質」として捉えさせる。




3 本時の評価

グラフの特徴を考察することについては、机間指導による観察、発言内容とともに、ワークシート、自己評価シートから、どのような考察を行っていたのかを把握する。また、他の生徒から聞いた意見をどのように把握しているのかを確認する。グラフの位置関係、グラフと式との関係を把握し、グラフをかくことについては、ワークシート、自己評価シートとともに、小テストによって習得の状況を把握する。

4 授業展開例

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・2次関数のグラフの作成と視覚的な特徴の把握	課題1 次の関数について対応表を作成し、グラフをかこう。 $y = 2x^2$ $y = 2x^2 + 3$ $y = 2(x - 4)^2$ $y = 2(x - 4)^2 + 3$	ワークシートNo.1の利用 ・～の2次関数については、事前に展開するなどして2次関数であることだけを確認しておく。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
<p>・それぞれの2次関数のグラフの特徴の把握</p> <p>・様々な視点からの2次関数の考察と相互関係の把握</p> <p>・特徴の一般化</p>	<p>与えられた x の値を式に代入し対応表を完成させ、それを利用して y のグラフをかく。</p> <p>y のグラフを色を変えてかかせることにより、グラフの違いを把握しやすいように工夫する。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>対応表やグラフに何か特徴的なことはないだろうか。気付いたこと、気になること、何かあったら欄外に自分の言葉でメモしておこう。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・ y のグラフから、頂点の座標は $(0, 0)$ とは限らないことを実感する。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>課題2 —————</p> <p>y のそれぞれのグラフについて、グラフの凸、頂点の座標、軸の方程式を読み取り表にまとめてみよう。</p> </div> <p>グラフを見て、グラフの形や頂点の座標を考えるとともに、グラフ上での頂点の位置関係を確認する。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>課題3 —————</p> <p>y の2次関数について、ワークシート No.1 から気付いたことを書き出してみよう。</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>グラフを見て気付いたこと、グラフと表を比べて気付いたこと、各式と頂点の座標の関係など、どんなことでもいいから見つけてみよう。</p> </div> <p>【予想される生徒の反応】</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ グラフの形が全て同じで、位置が異なる。 ・ y の頂点は $(0, 3)$、 x の頂点は $(4, 0)$、 z の頂点は $(4, 3)$ になっている。 ・ 頂点の座標の値と、式に表れている数値が一致している。 ・ y は x を縦(上)に、 x は z を横(右)に、 z は x を斜め(斜め上)に移動したものである。 <p>各自の意見の発表。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 自由に発言することによって、議論を深める。 ・ 同じ内容でもいろいろな表現の方法があることを実感する。 <p>グラフの概形について</p> <p>y、x、z のグラフをそれぞれ比較し、形も大きさも変えずに移動していること確認する。</p> <p>グラフの概形は、a の値によって決定する。</p>	<p>・ y の値はグラフをかき始める前に確認する。</p> <p>・ どんな小さな発見でもメモをとるよう指示する。</p> <p>ワークシートNo.1の利用</p> <p>ワークシートNo.2の利用</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 自分の言葉で表現することによって気付いたことを明確にさせる。 ・ 机間指導によって、生徒の状況を把握するとともに、表現できない生徒には助言を与える。 ・ 生徒から多くの意見が出ない場合には、「y と x のグラフの関係は？」などと比較するものを与えて再度考えさせる。 ・ 友達が発表したことを書き加えさせる。 <p>・ 考察した内容を一般化することにより2次関数の理解を深める。</p>

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
<p>・ 本時のまとめと自己評価</p>	<p>グラフの平行移動について</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>それぞれのグラフの位置関係はどのように表現することができるだろうか。</p> </div> <p>【予想される生徒の反応】</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ は、 を縦に動かした。 ・ は、 を横に動かした。 ・ は、 を斜めに動かした。 ・ は、 を横に動かした。 ・ は、 を縦に動かした。 <p>課題 3</p> <p>次の移動は、どのように表現したらよいだろうか。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>(1)</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>(2)</p>  </div> </div> <div style="margin-top: 20px;"> <p>(3)</p>  </div> <ul style="list-style-type: none"> ・ 図形の移動の表現を一般化するために座標軸を用いて、表現を工夫する。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 横への移動 x 軸方向への平行移動 ・ 縦への移動 y 軸方向への平行移動 ・ 斜めへの移動 x 軸方向、y 軸方向への平行移動 ・ 、 、 のグラフは、 のグラフをどのように平行移動したものであるか発表する。 <p>グラフの移動と式、頂点の座標、軸の方程式との相互の関係を確認し、グラフの平行移動について理解する。</p> <p>$y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは、$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動したものである。頂点の座標は (p, q)、軸の方程式は $x = p$ となる。</p> <p>自己評価シートの記入</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ どのように表現すれば他の人に伝わるか考えさせ、発表させる。 ・ を基準にして考えることの有用性に気付かせる。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 「斜め」という言葉では明確に移動を表現することができないことを体感させ、x 軸方向と y 軸方向への移動を組み合わせることに気付かせる。 ・ 相互の関係を確認することにより、これまでに考察した内容と関連付ける。 <p>自己評価シートの利用</p>

5 配付資料等（ワークシート、自己評価シート）

(1) ワークシート No.1

いろいろな2次関数のグラフと特徴 ワークシートNo.1 1年 組 名前 _____

次の ~ の2次関数のグラフをかき、どのような関係があるか調べてみよう。

$$y = 2x^2$$

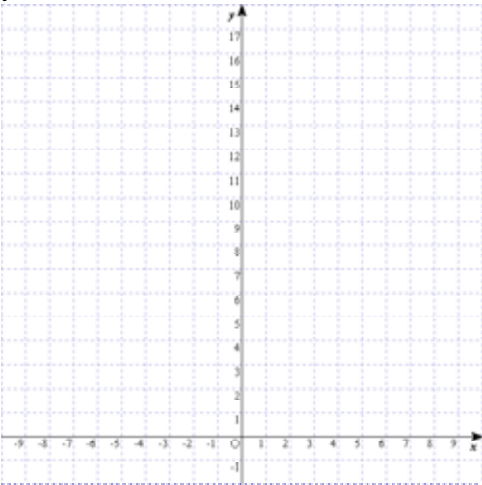
$$y = 2x^2 + 3$$

$$y = 2(x - 4)^2$$

$$y = 2(x - 4)^2 + 3$$

1. 対応表を作成し、グラフをかこう。

2次関数	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$y = 2x^2$											
$y = 2x^2 + 3$											
$y = 2(x - 4)^2$											
$y = 2(x - 4)^2 + 3$											



2. それぞれのグラフについて、グラフの凸、頂点の座標、軸の方程式を読み取り表にまとめてみよう。

2次関数	グラフの凸	頂点の座標	軸の方程式
$y = 2x^2$			
$y = 2x^2 + 3$			
$y = 2(x - 4)^2$			
$y = 2(x - 4)^2 + 3$			

Point

(2) ワークシート No.2

いろいろな2次関数のグラフと特徴 ワークシートNo. 2 1年 組 名前 _____

~ の2次関数について、ワークシート No.1 から気付いたことを書き出してみよう。

自分が気付いたこと	友達が気付いたこと

(3) 自己評価シート

2次関数のグラフ 数学的活動の自己評価No.1		
		平成 年 月 日 ()
		1年 組 名前 _____
学習課題	数学的な見方や考え方	表現・処理
【課題1】対応表を作成し、グラフをかこう。		対応表をつくることができた。 点をプロットしてグラフをかくことができた。
【課題2】 ~ のそれぞれのグラフについて、グラフの凸、頂点の座標、軸の方程式を読みとりまとめてみよう。		グラフの凸、頂点の座標、軸の方程式をグラフから読みとることができた。
【課題3】 ~ の2次関数について、気付いたことを書き出してみよう。	グラフの概形が全て同じであることに気付いた。 ~ のグラフが のグラフを移動したものであることに気付いた。	気付いたことを自分の言葉で表現することができた。
【課題4】図形の移動を表現してみよう。	斜めに平行移動することを横と縦の平行移動として表されることが分かった。	図形の平行移動を自分の言葉で表現することができた。 グラフの平行移動を表現することができた。
【まとめ】2次関数のグラフの特徴についてまとめてみよう。	グラフの概形が a の値によって決定されることに気付いた。 ~ のグラフが のグラフを平行移動したものであることに気付いた。 グラフの平行移動、頂点の座標、軸の方程式と式との関係に気付いた。	グラフの平行移動、頂点の座標、軸の方程式を式から求めることができた。

*今日の授業で印象に残っていることを書いてください。

指導と評価の改善

1 評価について

(1) 生徒のワークシートから

ワークシートを見ると、生徒が積極的に2次関数の表、式、グラフの共通点、相違点を探し出し、自らの言葉で表現しようとしていることが分かった。特に、学習が進むにつれて、表現が数学的になっていくことが読み取れる。

グラフの相違点について関心をもつことについては、多くの生徒が対応表とグラフから、 $y = 2x^2$ と $y = 2(x - 4)^2$ のグラフの概形が同じであり、 $y = 2x^2 + 3$ と $y = 2(x - 4)^2 + 3$ のグラフの概形が同じであることに気付いていた。しかし、その2つのグループ同士が同じであることに気付いた生徒は少なかった。これは、対応表に表れる数字によるものであると考えられる。一人の生徒から、「同じグラフである。」との発言があったときには、多くの生徒が納得し、その違いを懸命に表現しようとしていた。この場面では、適切な言葉が見つからず、苦労していたようである。

グラフの位置関係については、適切な表現方法を身に付けるにしたがって、考察にも深ま

りが見られた。特に、斜めに平行移動する場面では、座標平面上で考えることの利点に気付いたことは望ましいことである。また、グラフの特徴の一般化の場面では、自分たちで発見した性質として特徴の認識が深まり、知識を整理し明確にすることができていた。

以下に2名の生徒のワークシートに書かれていた表現を示す。

生徒 A のワークシートから読み取れる表現の変化

課題 1 (第 5 時限)	課題 3 (第 6 時限)	まとめ (第 6 時限)
<ul style="list-style-type: none"> と の式は答えが偶数で、と の式は答えが奇数になっている。(対応表から) 4つの式には「$y = 2x^2$」が含まれている。(式から) 	<ul style="list-style-type: none"> ～ のグラフは全て下に凸で、全て幅が同じ。 	<ul style="list-style-type: none"> $y = ax^2$ の a の値で、グラフの形が決まる。
<ul style="list-style-type: none"> と のグラフは位置が違うけど、同じグラフ。形が同じ。(グラフから) と のグラフは位置が違うけど、同じグラフ。形が同じ。(グラフから) 	<ul style="list-style-type: none"> は を上に3動かしたものの式でも3足してあるし、表でも3増えている。 は を右に4動かしたものの式でも4足してあるし、表でも横にずれている。 は を上に3動かしたものの式でも3足してあるし、表でも3増えている。 	<ul style="list-style-type: none"> は を y 軸方向に3だけ平行移動したものの。 は を x 軸方向に4だけ平行移動したものの。 は を x 軸方向に4、y 軸方向に3だけ平行移動したものの。
	<ul style="list-style-type: none"> 式と頂点の座標には、4、+3、0 など関係がある。軸の方程式と頂点の x 座標が同じ。 	<ul style="list-style-type: none"> $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは、頂点が (p, q) で軸の方程式が $x = p$。
<ul style="list-style-type: none"> 式の答えが奇数だと、頂点が0じゃなくなる。(式、グラフから) 		

生徒 B のワークシートから読み取れる表現の変化

課題 1 (第 5 時限)	課題 3 (第 6 時限)	まとめ (第 6 時限)
<ul style="list-style-type: none"> みんなグラフが下に凸である。 グラフの開き方が全て同じ。(グラフから) と、と の+ -の数字が同じ。(対応表から) 	<ul style="list-style-type: none"> ～ の放物線は、全て下に凸である。 	<ul style="list-style-type: none"> a の値がグラフの開き方を決める。(形を決めている)
<ul style="list-style-type: none"> は に3が足されているが、軸は変わっていない。(グラフ、対応表から) は に3が足されている。(グラフから) 	<ul style="list-style-type: none"> グラフから は を縦に3動かしたものであることが分かる。表では、3足されている。 グラフから は を縦に3動かしたものであることが分かる。表でも、3足されている。 	<ul style="list-style-type: none"> $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは、$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動したものの。
	<ul style="list-style-type: none"> 頂点の座標は式に表れている数字と同じ数字。 	<ul style="list-style-type: none"> $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフの頂点は (p, q)、軸の方程式は $x = p$ である。

(2) 自己評価シートの活用

授業の中で身に付ける力を「数学的な見方や考え方」、「表現・処理」に分けて表記した

自己評価シートを配付し、確認させた。

自己評価シートから気付くことは、「表現・処理」については、多くの生徒が満足いく回答をしているが、「数学的な見方や考え方」については、十分でないという回答した生徒が目立った。しかし、これらの生徒の中には、ワークシートからは十分把握できていることが読み取れる生徒もいる。また、ワークシートを見ると達成状況が十分でないが、自己評価シートには達成できたとしている生徒がいた。これらの生徒に対しては、ワークシート、自己評価シートの双方から読み取れる状況を適切にコメントとして書き入れ、返却することによって、次への学習へとつなげた。

生徒にとっては、慣れないこともあるが、2つの観点の区別が付きにくい面があったようである。このことについては、繰り返し実施することによって、把握できるようになると考えられる。

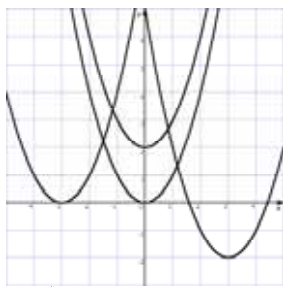
(3) 評価問題の工夫

目標の達成状況を把握するために、小テストを実施した。

【問題1】右の図の のグラフの特徴を言葉で表現しなさい。

【問題2】問題1の ~ のグラフは同じ形である。
適当な二つのグラフを選び、その位置関係について、下の空欄を埋めなさい。

のグラフは のグラフを
 方向に 、 方向に だけ平行移動したものである。



【出題のねらい】

問題1は、2次関数のグラフの特徴をどの程度、把握し、表現することが出来るかどうかを問う問題である。通常、「頂点は？軸は？...」と問うことが多いが、自由に書かせることによって、数学的に表現することの有用性をどの程度認識しているか確認することができる。また、問題2は、2次関数のグラフの位置関係を平行移動を用いて考察し、表現することができるかどうかを問う問題である。

2 指導と評価の改善について

実践を通して、感じたことを箇条書きにした。

数学的活動を充実させることについて

生徒にとって

- ・発表、議論の機会をもつことによって、自分の言葉で表現したものをできるだけ分かりやすく友達に説明しようと努力する姿が見られた。
- ・自分の考えを友達に伝えることの難しさを実感することによって、数学的な表現の有用性を実感することができたようである。
- ・発言の機会が増えたことによって、友達から認められることの喜びを実感し、また、他の友達の考え方のよさに気付くことができたようである。

教師にとって

- ・ワークシートを工夫することによって、生徒の思考のプロセスを見ることができた。従来は、ペーパーテストによって解答のプロセスを見ることが中心であったが、性質を見つけ、まとめるときの過程を見ることができた。
- ・ペーパーテスト以外で生徒の学習状況を評価する場合、生徒が学習する過程を適切に見定める必要がある。そのためには、生徒自身が考察し、学んでいく場面を設定しないと評価することは難しい。
- ・数学の授業では、考えをまとめたり、演習する時間等を取ることはもちろん大切なことである。しかし、生徒に数学への興味や関心を喚起し、数学的に考えることの意味を実感させるためには、単元の中心的な場面において数学的活動を取り入れていく必要がある。

評価を生かすことについて

- ・生徒の思考のプロセスを知ることは、教材の選択、授業の進め方等において、非常に参考になる。生徒の考え方を生かした授業を構築していくことができる。
- ・生徒のワークシート、自己評価シートを有機的に結び付け、コメント等を返すことによって、生徒の学習に対する不安を解消し、意欲を喚起することにつながったようである。
- ・単元の目標、授業計画を立て、各時間の指導目標を明確にすることは、生徒自身にも、その時間に学ぶことが明確になり、効果的であった。