

指導事例 2

2 次関数「2 次関数の値の変化」における指導と評価

単元の指導計画・評価計画

1 単元の目標

2 次関数のグラフを通して、関数の値の変化を考察し、関数の最大値・最小値を求めることができるようにするとともに、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できるようにし、それらを具体的な事象の考察に活用できるようにする。

また、2 次関数の式、グラフの関係を考察することを通して、与えられた条件を満たす放物線をグラフとする 2 次関数の式を求めることができるようにする。

2 単元の評価規準

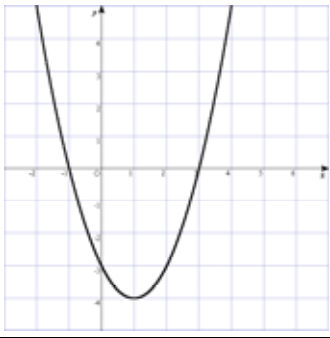
関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
<p>A1 2 次関数の値の変化を、グラフを用いて捉えようとする。</p> <p>A2 具体的な事象の考察に 2 次関数の最大・最小の考えを活用しようとする。</p> <p>A3 与えられた条件を満たす放物線をグラフとする 2 次関数を決定するための条件を調べようとする。</p>	<p>B1 2 次関数の値の変化について、グラフを用いて考察することができる。</p> <p>B2 具体的な事象の考察に 2 次関数の考えを活用することができる。</p> <p>B3 与えられた条件を満たす放物線をグラフとする 2 次関数を決定するための条件を考察することができる。</p>	<p>C1 2 次関数の最大値・最小値をグラフを用いて求めることができる。</p> <p>C2 与えられた条件を満たす放物線をグラフとする 2 次関数の式を求めることができる。</p>	<p>D1 2 次関数の最大値・最小値の意味と、その求め方について理解している。</p> <p>D2 2 次関数を決定するための条件を理解している。</p>

3 単元の授業計画（学習活動と評価規準のかかわり）

時間	学 習 活 動	評価規準とのかかわり	評価方法
第 1 時間	関数 $y = x^2$ 、 $y = -x^2$ のグラフを利用し、値の変化の様子を考察する。 2 次関数のグラフをかき、その関数の最大値・最小値を求める。	A1、B1、D1	机間指導により、最大値・最小値の意味を理解しているかを把握する。
第 2 時間 第 3 時間	制限された定義域での 2 次関数の最大値・最小値を求める。	C1、D1	関数の値の増減について考えられることを発表させることによって、考察の状況を把握する。
第 4 時間 第 5 時間	長さが一定である針金を折り曲げてできる長方形の面積の最大値を求める。	A2、B2、C1	応用課題をレポートとして提出させ、取組状況を確認する。
第 6 時間 (実践例の授業)	2 次関数 $y = (x - 1)^2 - 4$ のグラフの特徴を考察する。 グラフの特徴から 2 次関数の式を決定する。 2 次関数の式を決定するための条件を考察する。	A3、B3、C2	ワークシート、質問紙、机間指導、小テストにより、2 次関数の決定条件の把握の状況を確認する。
第 7 時間	様々な条件を満たす放物線をグラフとする 2 次関数の式を求める。	C2、D2	机間指導、小テストにより定着の状況を把握する。

数学的活動の実践例

- 1 本時（第6時間目）の目標（評価規準）
与えられた条件を満たす放物線をグラフとする2次関数を決定するための条件を考察し、求めることができる。（A3、B3、C2）
- 2 本時の数学的活動とそのねらい
具体的な2次関数のグラフの特徴を考察し、その特徴を数式化することによって、2次関数の式を求める。様々な特徴を取り上げることによって、2次関数を決定するためには多くの条件があることに気付かせる。
- 3 本時の評価
2次関数を決定するための条件の考察については、ワークシート、自己評価シートによってどのような条件に気付き、課題に取り組んだかを把握する。また、2次関数を求めることについては、授業中の発言の内容、机間指導による観察、ワークシートとともに、小テストによって把握する。
- 4 授業展開例

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
<p>・ 2次関数のグラフの特徴の考察</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>今までは、2次関数の式からグラフをかいてきました。今度は、2次関数のグラフからそのグラフを表す2次関数の式を求めてみましょう。</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>課題1</p> <p>右のグラフは、ある2次関数のグラフです。このグラフから読み取れることを言葉で表してみよう。</p> <div style="text-align: center;">  </div> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>グラフをよく観察し、できるだけたくさんのことを見つけよう。今まで学習した内容もよく思い出して考えましょう。</p> <p>【予想される生徒の反応】</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 下に凸のグラフである。 ・ 頂点が(1, -4)である。 ・ $x = 1$ に関して対称である。(軸が $x = 1$) ・ y切片が -3 である。 ・ $x = 1$ のとき、最小値 -4 である。 ・ $y = x^2$ のグラフと同じ形 ・ (-1, 0)、(0, -3)、(2, -3)、(3, 0)を通る。 ・ x軸と $x = -1$、$x = 3$ で交わる。 </div>	<p>ワークシートの利用</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 放物線を詳しく観察させ、できるだけ多く表現できるように促す。 ・ 表現することができない生徒には、前時までのノートを参考に考えさせる。 <p>・ 机間指導しながら生徒がどのような表現をしているか把握する。</p>

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
<p>・特徴の数式化</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>どのようなことが読み取れたか、発表してください。自分で見つけられなかったもの、表現の異なるものは、隣の欄に書き加えておきましょう。</p> </div> <p>課題2</p> <p>2次関数を表す式は、$y = a(x - p)^2 + q$、$y = ax^2 + bx + c$と表すことができました。グラフから読み取れた特徴を a、b、c、p、q の条件として表してみよう。</p> <p>【予想される生徒の反応】</p> <ul style="list-style-type: none"> ・下に凸のグラフである。 $a > 0$ ・頂点が(1, -4)である。 $p = 1, q = -4$ ・$x = 1$に関して対称である。 $p = 1$ ・y切片が-3である。 $c = -3$ ・$x = 1$のとき、最小値-4である。 $p = 1, q = -4$ ・$y = x^2$のグラフと同じ概形 $a = 1$ ・(-1, 0)、(0, -3)、(2, -3)、(3, 0)を通る。 $x = -1$のとき $y = 0$、$x = 0$のとき $y = -3$等 	<p>・多くの生徒に発表させる。</p> <p>ワークシートの利用</p> <p>・多くの生徒に発表させる。</p> <p>・机間指導をしながら生徒がどのように考えているかを把握する。</p>
<p>・式を求めるための条件の考察</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>課題3</p> <p>グラフから読み取った特徴から2次関数の式を求めることができるでしょうか。できなければ、他にどんなことが分かっているか式を求めることができるか考えてみよう。そして、その条件を付け加えて、式を求めてみよう。</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>例えば、頂点が(1, -4)ということから、$p = 1$、$q = -4$は分かったけど、これだけで式を求めることはできません。先ほど書き出したことを参考にして、他にどんな条件を付け加えると、式を求めることができるか考えてみよう。</p> <p>【予想される生徒の反応】</p> <ul style="list-style-type: none"> （ 頂点が(1, -4)である。 $y = x^2$のグラフと同じ形。 （ 頂点が(1, -4)である。 (-1, 0)を通る。 （ $x = 1$のとき最小値-4。 $y = x^2$のグラフと同じ形。 （ y切片が-3である。 (-1, 0)を通る。 $y = x^2$のグラフと同じ形。 </div>	<p>ワークシートの利用</p> <p>・生徒の状況に応じて、なぜ、式を求めることができないのかを具体例を用いて確認する。</p> <p>・机間指導をしながら生徒がどのように考えているかを把握する。</p>


指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・条件の把握	<p>使った特徴と付け加えた条件をもとに、求めた式を 発表してください。表現の違うものは、異なるもの として、どんどん発表してください。また、発表さ れたもの以外で、求めることができないか考えてみ ましょう。</p> <p>各自の意見を発表する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・同じ特徴でも条件が異なるものを発表する。 その際、違った条件を付け加えることによって違 う問題になることを実感する。 ・異なる特徴のものを発表する。その際、前出のも のとの違いを考える。 	<ul style="list-style-type: none"> ・特徴と条件の組み合 わせが異なる意見、表 現の異なる意見をでき るだけ発表させる。
・まとめ	<p>どんな条件であれば、2次関数の式を求めることが できるでしょうか。</p> <p>2次関数の標準形 $y = a(x - p)^2 + q$ における、a、p、q の値が分かることが2次関数の式を求めるこ とになる。</p> <p>a、p、q の値が分かるとはどのようなことだろう。 本日の授業内容以外の考え方はないだろうか。 例えば、直線の方程式を求める場合を考えてみよう。 自己評価シートの記入</p>	<p>ワークシートの利用</p> <ul style="list-style-type: none"> ・考察した内容を一般 化することにより2次 関数の理解を深める。 ・次時の予告とする。 <p>自己評価シートの利用</p>

5 配付資料等（ワークシート、自己評価シート）

(1) ワークシート

2次関数の決定No.1 ワークシート 1年組 番氏名 _____

課題1
右のグラフは、ある2次関数のグラフです。
このグラフから読み取れることを言葉で表し
てみよう。



課題3
グラフから読み取った特徴から2次関数の式を求めることができるでしょう
か。できなければ、他にどんなことが分かっていたら式を求めることができ
るか考えてみよう。そして、その条件を加えて、式を求めてみよう。

放物線について

	読み取れたこと（特徴）	文字で表す
自分の意見		
他の人の意見		

課題2
2次関数を表す式は、 $y = a(x - p)^2 + q$ 、 $y = ax^2 + bx + c$ と表すことが
できました。グラフから読み取れた特徴を a 、 b 、 c 、 p 、 q の条件として表し
てみよう。

まとめ

(2) 自己評価シート

2次関数の決定 数学的活動の自己評価No.1		
平成 年 月 日 ()		
1年 組 番 名前		
学習課題	数学的な見方や考え方	表現・処理
【課題1】グラフから読み取れることを言葉で表してみよう。	2次関数のグラフから様々な性質を読み取ることができた。 (自分で読み取れた性質)	
【課題2】読み取った特徴を文字で表してみよう。 【課題3】読み取った特徴に条件を付け加えて式を求めてみよう。	特徴と条件の組み合わせを考えることができた。 頂点とグラフの概形 頂点と通る1点 頂点とy切片 軸とy切片と通る1点 最小値とグラフの概形 最小値と通る1点 最小値とy切片 x軸の交点と他の1点 その他()	特徴を文字で表現することができた。 条件を加えて、2次関数の式を求めることができた。
【まとめ】どのような条件があれば2次関数を求めることができるだろうか。	2次関数のグラフを表す式を求めるためには、どのような条件が必要か考えることができた。	2次関数を求めることができる条件 ()
*今日の授業で印象に残っていることを書いてください。		

指導と評価の改善

1 評価について

(1) 生徒のワークシートから

2次関数のグラフの理解について(ワークシート課題1の記述から)

自分の意見として多く書かれていたもの	他の人の意見として多く書かれていたもの
<ul style="list-style-type: none"> ・頂点が(1, - 4) ・下に凸のグラフである ・軸は $x = 1$ 	<ul style="list-style-type: none"> ・ $x = 1$ のとき最小値 - 4 ・ x^2 の係数が「+」のグラフである ・ $y = x^2$ のグラフの形と同じ ・点(- 1, 0)、(3, 0)を通過している ・点(0, - 3)を通過している ・ $x = 2$ のとき $y = 0$ である ・y切片が - 3 である ・原点を通過していない

2次関数のグラフから読み取れることとして、多くの生徒が、「頂点」、「グラフの凸」、「軸」等、2次関数のグラフの特徴として学んだことを挙げていた。グラフを

かくことに重点を置いて指導した成果であると考えられる。反面、そのグラフの見方は一様であり、「 y 切片」、「最小値」、「通る点」等に気付いた生徒は数名であった。それらの生徒から発表があったとき、「そうか」との感想が聞かれ、改めてグラフから読み取れることには、多くのことがあることに付き、グラフについての理解を深めることができた。

2次関数の式を求めるための条件の考察について(ワークシート課題3、まとめの記述から)

特 徴	付け加えた条件
・頂点が(1, -4)である	<ul style="list-style-type: none"> ・$y = x^2$のグラフの形と同じ ・点(-1, 0)を通っている ・点(3, 0)を通っている ・$x = 2$のとき$y = -3$である ・y切片が-3である
・ $x = 1$ のとき最小値-4	<ul style="list-style-type: none"> ・$y = x^2$のグラフの形と同じ ・点(-1, 0)を通っている ・点(3, 0)を通っている
・ y 切片が-3である	・ $y = x^2$ のグラフの形と同じ、点(3, 0)を通っている
・軸の方程式が $x = 1$ である	・ $y = x^2$ のグラフの形と同じ、点(3, 0)を通っている

多くの生徒が、最初に扱う特徴として「頂点」を取り上げていた。授業前の予想通り、生徒にとっては扱いやすい特徴であったようである。また、付け加えた条件として、「 $y = x^2$ のグラフの形と同じ」、「点(3, 0)を通っている」ことを利用する生徒が多かった。授業中に、「解答が得られたら、他の方法も考えるように」との指示を出したところ、多くの生徒が他の特徴、条件の組み合わせを考え取り組んでいた。しかし、特徴を変えることよりも、条件を変えて考える生徒が多く、「頂点」を中心に取り組んでいた。数名の生徒は、特徴を「最小値」、「 y 切片」、「軸の方程式」に変えて取り組んでいた。もう少し時間をかけて取り組ませたい場面であったので、扱えなかったものは、レポートとして提出させることとした。

また、いくつかの条件に取り組むことによって、2次関数を決定するために必要な条件についてもいくつか気付いていたようである。最後のまとめの場面では、以下のような意見があった。

- ・「頂点が分かっていることと最小値が分かっていることは同じだ」
- ・「 y 切片が-3であることが分かっているときや、軸が $x = 1$ であることが分かっているときは、他に2つの条件が必要だ」
- ・「使えない条件(「原点を通っていない」)もある」
- ・「条件が多すぎることもあった」

以上のような意見を出し合うことによって、2次関数の標準形を利用する場合のポイントを生徒自らが気付いたようである。残念ながら、この1時間の中では、3点を通る2次関数の決定、 x 軸との交点を利用した2次関数の決定については触れることができなかった。次時の扱いとし、最後にもう一度振り返らせることとした。

(2) 自己評価シートの活用

授業の最後に授業で身に付ける「数学的な見方や考え方」、「表現・処理」について、整理し確認させることによって、自らの学習を振り返ることができた。自己評価シートをみる

と、大部分の生徒が概ね身に付いたと自覚してた。しかし、それぞれの特徴、条件が相互に関連し合っていることを十分理解しているとは言えない生徒も若干見受けられた。そのような生徒については、自己評価シートとワークシートとを見比べて、コメントを書き入れ、返却した。ワークシートから読み取れることと自己評価シートとのギャップを教師が埋めることによって、自己学習力、自己評価能力の育成が図られると考える。

さらに、この自己評価シートを定期テスト等の復習の際にも活用させた。授業のとき分かっていたこと、復習のときに分かっていたこと、忘れてしまったこと等を確認させてからテストに臨ませた。多くの生徒にとって、有効な手段であった。

以下に、2人の生徒のワークシートと自己評価シートの記述内容を示す。

生徒 A のワークシートと自己評価シートの比較

ワークシート	自己評価シート
<p>課題 1 2次関数のグラフの理解について</p> <p>[自分の意見]</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 頂点(1, - 4) ・ 下に凸のグラフ ・ 軸が $x = 1$ ・ 切片が - 3 ・ $y = x^2$の形になっている ・ $x = 1$のとき最小値 - 4 ・ $x = 3$のとき $y = 0$ <p>[他の人の意見]</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 点(- 1, 0)を通る ・ 原点を通過していない 	<p>✓ 2次関数のグラフから様々な性質を読み取ることができた。</p> <p>自分で読み取れた性質</p> <ul style="list-style-type: none"> 頂点、グラフの凸、軸 切片、グラフの形 最小値、x軸との交点
<p>課題 2 2次関数の式を求めるための条件の考察について</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 頂点(1, - 4) + $y = x^2$の形になっている ・ $x = 1$のとき最小値 - 4 + 下に凸のグラフ + $x = 3$のとき $y = 0$ ・ 軸が $x = 1$ + 切片が - 3 + $y = x^2$の形になっている ・ 切片が - 3 + $x = 3$のとき $y = 0$ + 点(- 1, 0)を通る 	<p>✓ 特徴と条件の組み合わせを考えることができた。</p> <p>✓ 頂点とグラフの概形</p> <ul style="list-style-type: none"> 頂点と通る1点 頂点と y切片 軸と y切片と通る1点 最小値とグラフの概形 <p>✓ 最小値と通る1点</p> <ul style="list-style-type: none"> 最小値と y切片 x軸の交点と他の1点 <p>✓ その他 ()</p> <p>✓ 条件を加えて、2次関数の式を求めることができた。</p>
<p>まとめ</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 頂点、最小値が分かっているときは、他に一つの条件が分かれば2次関数の式を求めることができる。 ・ 軸や切片が分かっているときは、他に二つの条件が必要である。 ・ a, p, qが分かれば2次関数の式を求めることができる。 ・ 使えない条件(「下に凸のグラフ」など)もある。 	<p>✓ 2次関数のグラフを表す式を求めるためには、どのような条件が必要か考えることができた。</p> <p>✓ 2次関数を求めることができる条件</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 頂点、または、最小値と、他に一つの条件 ・ 軸、または、切片と他に二つの条件

生徒 A のワークシート、自己評価シートを見ると、本時の目標を十分達成できたと判断できる。特に課題 2 では4通りの解法に取り組み、2次関数を決定するための条件の考察も満足いくものであった。さらに理解を深めさせるために、他の条件についてレポートを作成するように指示した。

生徒 B のワークシートと自己評価シートの比較

ワークシート	自己評価シート
<p>課題 1 2次関数のグラフの理解について</p> <p>[自分の意見]</p> <ul style="list-style-type: none"> ・頂点(1, - 4) ・下に凸のグラフ ・軸が $x = 1$ <p>[他の人の意見]</p> <ul style="list-style-type: none"> ・切片が - 3 ・ $y = x^2$ の形になっている ・ $x = 1$ のとき最小値 - 4 ・ $x = 3$ のとき $y = 0$ ・点(- 1, 0)を通る ・原点を通っていない <p>課題 2 2次関数の式を求めるための条件の考察について</p> <ul style="list-style-type: none"> ・頂点(1, - 4) + $y = x^2$ の形になっている ・頂点(1, - 4) + 点(- 1, 0)を通る <p>まとめ</p> <ul style="list-style-type: none"> ・頂点分かっているとき、a の値か、通る点分かっていたらよい。 ・a, p, q が分かれば2次関数の式を求めることができる。 	<p>✓ 2次関数のグラフから様々な性質を読み取ることができた。</p> <p>自分で読み取れた性質</p> <p>(頂点、下に凸、軸)</p> <p>特徴と条件の組み合わせを考えることができた。</p> <p>✓ 頂点とグラフの概形</p> <p>✓ 頂点と通る1点</p> <p>頂点と y 切片</p> <p>軸と y 切片と通る1点</p> <p>最小値とグラフの概形</p> <p>最小値と通る1点</p> <p>最小値と y 切片</p> <p>x 軸の交点と他の1点</p> <p>その他 ()</p> <p>✓ 条件を加えて、2次関数の式を求めることができた。</p> <p>✓ 2次関数のグラフを表す式を求めるためには、どのような条件が必要か考えることができた。</p> <p>2次関数を求めることができる条件</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ a, p, q が分かること

生徒 B のワークシート、自己評価シートを見ると、本時の目標を概ね達成できたと判断できる。しかし、課題 2 では、頂点に関する条件しか考察していないことから、2次関数を決定する条件が十分把握できたとは言いがたい。自己評価シートを見ても、生徒自身も満足できていない状況が分かる。達成されているもの、達成されていないものを伝えるとともに、達成されていないものについては、レポートの提出を促したり、教科書、問題集の問題を具体的に指示することによって補充を図った。

生徒の学習状況や数学的活動を取り入れたことの効果を把握するためには、個々の生徒のワークシート、自己評価シートを有機的に結び付けることが大切である。自己評価シートは、生徒にとって学習の振り返りとしても効果があった。また、目標を十分達成できていない生徒に対しては、不足しているものを補うように指示することによって、学習のつまずきを未然に防ぐことができた。

(3) 評価問題

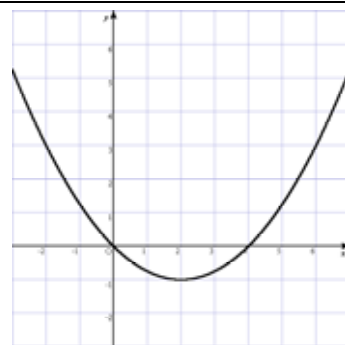
本時の目標の達成状況を適切に評価するために小テストを実施した。

【問題 1】右のグラフの式を求めなさい。

また、式を求めるために使ったグラフの特徴も書きなさい。

【問題 2】頂点が(1, 2)の放物線がある。

このグラフの式を求めたいのだが、条件が足りないために求めることができない。自分で適切な条件を付け加え、その式を求めなさい。



【出題のねらい】

・【問題 1】について

頂点が(2, -1)であること、原点を通ること等のグラフの特徴を自ら読みとらせ、このグラフを表す2次関数の式を求めるための条件をどのようにとらえるかを把握するとともに、その求め方の理解の状況を見る。

・【問題 2】について

頂点が(1, 2)であることだけを与えることによって、2次関数の式を求めるためにどんな条件を付け加えるかを把握するとともに、その条件を用いて2次関数の式を求めることができるかどうかを見る。

2 指導と評価の改善について

数学的活動を授業に取り入れることによって、生徒の主体的な学習を促すことができた。その際、ワークシート、自己評価シートを取り入れることによって、生徒の学習の状況を的確に把握し、事後の指導に生かすことができた。以下に、今回取り組んだこと、効果があったことをまとめる。

今回取り組んだこと	生徒への効果	指導・評価への効果
<ul style="list-style-type: none"> 単元の目標の明確化 評価規準の作成 	<ul style="list-style-type: none"> 1時間の授業の目標が明確になり、集中して学習に取り組むことができた。 	<ul style="list-style-type: none"> 単元を通して育てる力を意識することによって、各時間の目標が明確になった。
<ul style="list-style-type: none"> 単元の授業計画の作成（学習活動、評価規準とのかかわり、評価方法の明確化） 		<ul style="list-style-type: none"> 数学的な見方や考え方、表現・処理、知識・理解を育てる場面を意識して授業することができた。
<ul style="list-style-type: none"> 数学的活動への取組 	<ul style="list-style-type: none"> 自分なりに解法を模索するなど、主体的に課題を解決しようとする姿勢が見られた。 	<ul style="list-style-type: none"> 評価場面を意識して授業することができた。
<ul style="list-style-type: none"> ワークシート、自己評価シートによる評価 	<ul style="list-style-type: none"> 授業で身に付いたこと、身に付いていないことが明確になった。 授業後の学習の振り返り、定期テスト前の学習の振り返りに効果があった。 	<ul style="list-style-type: none"> ワークシートと自己評価シートを有機的に結び付けることによって、生徒の学習状況がより明確になり、個々の生徒の指導、授業の改善に生かすことができた。
<ul style="list-style-type: none"> 評価問題の工夫 		<ul style="list-style-type: none"> 評価の観点をより意識するようになった。