

事例2 「発展的な内容を含むレンズの学習」

1 指導の工夫

「レンズ」は、高校物理において指導しにくい分野の一つである。その理由として、次のことが挙げられる。

- (1) 中学校で既に学習した内容の復習が多く、生徒の興味・関心を引き出すのが難しい。
- (2) 結像公式の導出については、「凸レンズで実像ができる場合」、「凸レンズで虚像ができる場合」、「凹レンズで虚像ができる場合」を扱ってから、これらを一般化して一つの式に表すという流れのため、同じような説明を3回も繰り返す必要があり、理屈が単純な割に時間がかかり、単調な授業展開になりやすい。しかも、組み合わせレンズのような複雑な問題には踏み込まないため、結像公式の利用価値が実感しにくい。
- (3) 多くの教科書において、レンズの基本的な性質（光が凸レンズで屈折するとき、光軸に対して平行に入射した光線が反対側の焦点を通過すること等）は、自明なものとして扱われており、なぜ球面で構成される凸レンズや凹レンズが、そのような性質をもつのかについての理屈や証明が省略されている。そのため、波動分野の学習内容にもかかわらず、光の波動性と直接関連する事項が少なく、前後の学習内容に対してストーリーがつながりにくい。

本事例では、学習プリントを用いて生徒がノートをとる時間の短縮化を図りながら、「光の屈折の法則」を基本原理として球面レンズの性質を考察させることにより、レンズの学習を「光の屈折」の学習と関連付けることを目的とした。また、虫眼鏡や望遠鏡の倍率をレンズの結像公式を用いて求めることによって、結像公式の利用価値が実感できるようにした。

2 指導計画

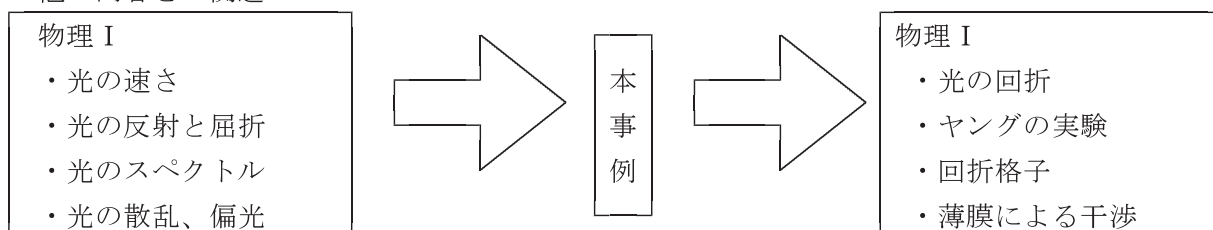
[第1時]

- ① 凸レンズによる像を幾何学的に考察させることによって、凸レンズの結像公式を導かせる。
- ② 球面レンズが、頂角の異なる微小なプリズムの集合であることを理解させる。
- ③ 頂角の小さなプリズムに光線が入射するとき、その振れ角と頂角の関係を理解させる。
- ④ レンズを通過する光線の振れ角が、レンズの中心からの距離に比例することを説明するとともに、焦点距離とレンズの曲率半径、屈折率との関係を導かせる。

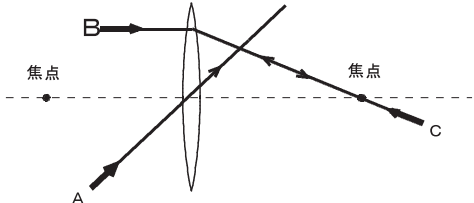
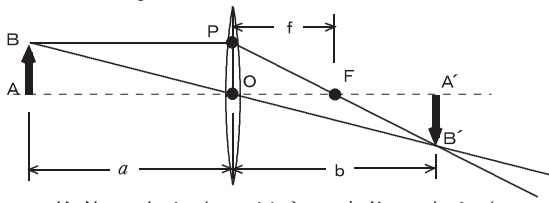
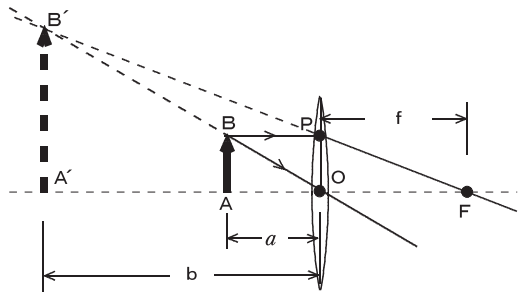
[第2時]

- ① 凹レンズの性質を、レンズを通過する光線の振れ角と中心からの距離の関係から導かせる。
- ② 凹レンズによって虚像ができる様子を作図させるとともに、凹レンズの結像公式を導かせる。
- ③ 目で見たものの大きさが、目の位置から物体を見込む角に比例することを理解させる。
- ④ 明視の距離を理解させるとともに、虫眼鏡の倍率を結像公式を用いて導かせる。
- ⑤ ケプラー式望遠鏡の原理を理解させ、倍率と凸レンズの焦点距離との関係を説明する。

3 他の内容との関連

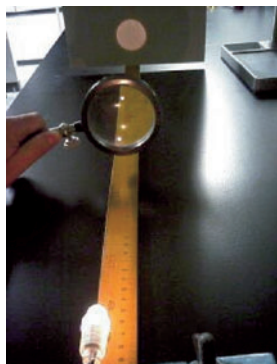


[第1時] 授業展開

指導内容	学習活動
○学習プリント1を配付する。 ○凸レンズの性質の確認 凸レンズを通過する3本の基本光線に関する規則を文章で書かせる。 	「1 凸レンズの性質（凸レンズを通過する光線の進み方）」の空欄を埋める。 A : レンズの中心を通過する光線は直進する。 B : レンズの光軸に平行に入射した光線は、反対側の焦点を通過する。 C : 焦点を通過してからレンズに入射する光線は、レンズ通過後は光軸に平行な向きに進む。（Bの逆コースであるからBと同等）
○凸レンズの結像公式（実像）の導出 - 凸レンズで実像ができる様子を黒板に作図し、三角形の相似関係を用いて空欄を埋めることにより、結像公式を導かせる。  - 物体の大きさに対する実像の大きさの比mは、①式より、 $m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{b}{a}$ で表されることを説明する。	「2 凸レンズの結像公式（物体が焦点距離の外側にある場合）」の空欄を埋める。 $\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$ より、 $AB : A'B' = a : b \dots\dots ①$ $\triangle OPF \sim \triangle A'B'F$ より、 $OP : A'B' = f : b - f \dots\dots ②$ また、BPが光軸に平行であるから、$AB = OP$ より、①式の右辺と②式の右辺は等しい。したがって、 $a : b = f : b - f$ が成り立つ。この式を整理すると、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \dots\dots ③$ という関係式が得られる。
○凸レンズの結像公式（虚像）の導出 - 実像のときと同様に、虚像ができるときについても、結像公式を導かせる。  - 実像の式③と虚像の式⑥は、bの符号を変えれば同等であることを説明する。	「3 凸レンズの結像公式（物体が焦点距離の内側にある場合）」の空欄を埋める。 $\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$ より、 $AB : A'B' = a : b \dots\dots ④$ $\triangle OPF \sim \triangle A'B'F$ より、 $OP : A'B' = f : b + f \dots\dots ⑤$ また、BPが光軸に平行であるから、$AB = OP$ より、④式の右辺と⑤式の右辺は等しい。したがって、 $a : b = f : b + f$ が成り立つ。この式を整理すると、 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \dots\dots ⑥$ という関係式が得られる。

○問題演習（凸レンズの結像公式）

- ・学習プリント1の演習問題を解かせることにより、結像公式の利用法を理解させる。
- ・焦点距離のわかっている凸レンズを用意し、豆電球の光をスクリーンに投影することにより、演習問題2の答えを検証する。



・「4 演習問題」を解く。

(1) (基本問題) 解答

	像の位置	像の大きさ
①	レンズの右15cm	1.0cm
②	レンズの右20cm	2.0cm
③	レンズの左40cm	10 cm

(2) (発展問題) 解答

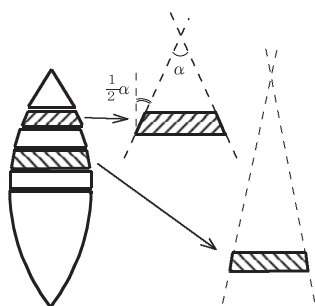
レンズ、物体間距離を x とすると、結像公式より

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x} = \frac{1}{f} \quad \therefore x^2 - Lx + fL = 0$$

この x に関する方程式が実数解をもてばよいから、
 $L^2 - 4fL \geq 0 \quad \therefore L \geq 4f$

○学習プリント2を配付する。

- ・球面凸レンズが微小プリズムの集合とみなせることを説明する。



- ・「1 球面レンズとプリズムの関係」を参照しながら、凸レンズの断面がプリズムのはたらきを理解することを確認する。
- ・レンズを通過する光線は、空気からガラスに入るとき、ガラスから空気に出る時の2回屈折することを確認する。
- ・レンズの光軸部分は、プリズムとみなしたときの頂角が0であることから、中心を通過する光線が直進することを確認する。
- ・プリズムの頂角の大きさは、球面の法線と光軸のなす角の2倍であることを理解する。

○発問1

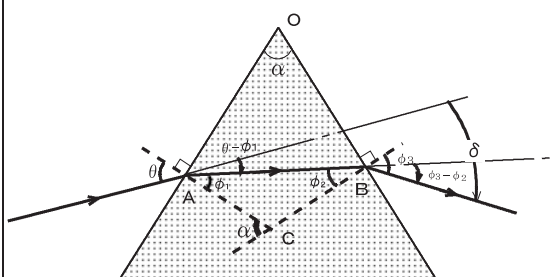
「凸レンズをプリズムの集合とみなしたとき、その頂角の大きさは光軸から離れるほど大きくなるか、小さくなるか。」

<生徒の答え>

- ・大きくなる。

○プリズムの頂角の大きさと光線の振れの角の関係を理解させる。

- ・光線の進行方向の変化を振れの角とよぶことを説明する。



- ・点Aにおける入射角を θ 、屈折角を ϕ_1 とすると、スネルの法則より $1 \cdot \sin \theta = n \cdot \sin \phi_1$ ・・・①
- ・同様に、点Bにおける入射角を ϕ_2 、屈折角を ϕ_3 とすると、 $n \cdot \sin \phi_2 = 1 \cdot \sin \phi_3$ ・・・②
- ・振れの角 δ は、 $\delta = (\theta - \phi_1) + (\phi_3 - \phi_2)$ ・・・③
- ・図より、 $\phi_1 + \phi_2 = \alpha$ ・・・④
- ・ θ 及び α が微小のときを考えると ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 も微小となり、 $\sin \theta \approx \theta$ 、 $\sin \phi_n \approx \phi_n$ の近似成立
 このとき、①、②、④より ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 をそれぞれ θ 、 n 、 α のみで表し、③に代入すると、
 $\delta = (n - 1) \alpha$ が得られる。

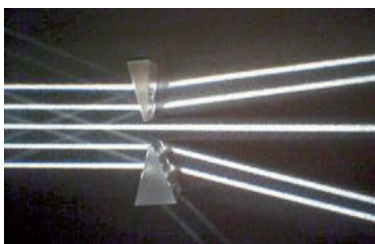
○課題

- ・屈折率1.5のガラス製で、頂角の大きさが 3° のプリズムに対し、小さな入射角で入射した光線の振れ角 δ は何[rad]か。また、頂角の大きさが2倍の 6° の場合、振れの角 δ は何[rad]になるか。

- ・ α の値 3° は[rad]単位に換算すると、 $3\pi/180$ であるから、 $\delta = (1.5 - 1.0) \times 3 \times 3.14 / 180$
 $= 0.026 \text{ rad}$
- ・ δ は α に比例するから、頂角の大きさが2倍の 6° のときは、 $\delta = 0.0261 \times 2$
 $= 0.052 \text{ rad}$

○演示実験 1

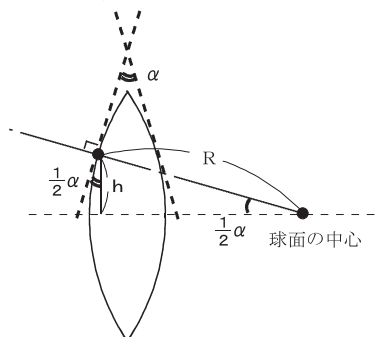
- ・頂角の異なる2つのプリズムによる振れの角の違いを観察させる。



- ・頂角の大きさ α が大きいほど、光線の振れの角が大きいことを確認する。
- ・入射角が小さいときは、振れの角 δ が入射角 θ にほとんど依存しないことを確認する。
- ・凸レンズを微小プリズムに分けて考えると、光軸から遠い部分ほどプリズムとしての頂角が大きくなるため、通過する光線の振れの角が大きくなることを理解する。

○凸レンズによる振れの角を考察させる。

- ・球面レンズの断面を板書し、球面の法線と光軸のなす角が、プリズムとしての頂角の半分に当たることを説明する。



- ・屈折率 n で、半径 R の両凸レンズについて、光軸からの距離 h の部分を微小プリズムと考えると、その頂角の大きさを α とすると、球面の法線と光軸のなす角は $\frac{1}{2}\alpha$ であり、

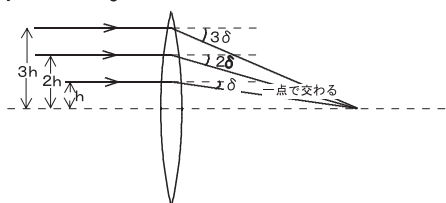
$$\frac{1}{2}\alpha \approx \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{h}{R} \quad \therefore \alpha \approx \frac{2h}{R}$$

よって、光線の振れの角 δ は、

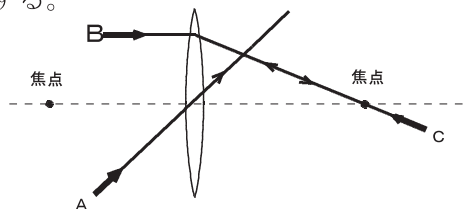
$$\delta = (n - 1)\alpha = \frac{2(n - 1)h}{R}$$

と表せ、光軸からの距離 h に比例することを理解する。

○凸レンズに入射する平行光線について考察させる。

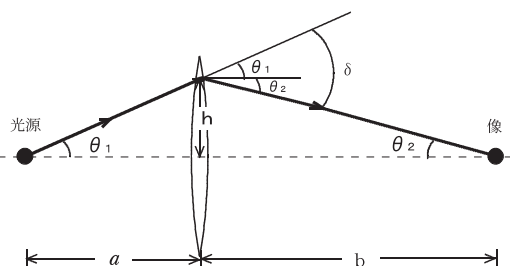


- ・凸レンズにおいては、レンズに入射した光線の振れの角 δ は、光軸からの距離 h に比例するため、レンズの中心を通過する光線は直進し、光軸に対して平行に入射した光線は、レンズ通過後一点に交わることを理解する。また、これは初めに学習した凸レンズの性質A、B、Cに他ならないことを確認する。



○凸レンズの結像公式を考察させる。

- ・ レンズからの距離 a の光源から出た光が凸レンズに入射すると、光軸からの距離 h によらず、常に一点に集まることを理解させる。
- ・ 凸レンズの結像公式と比較し、焦点距離 f と球面の半径の関係を導かせる。



- ・ レンズからの距離 a の光源から出た光線が、光軸となす角 θ_1 でレンズに入射し、レンズ通過後は、光軸となす角 θ_2 で進んで、レンズからの距離 b の位置に集まったとする。光線がレンズを通過する位置の、光軸からの距離を h とすると、

$$\delta = \frac{2(n-1)h}{R} = \theta_1 + \theta_2, \quad \theta_1 \doteq \frac{h}{a}, \quad \theta_2 \doteq \frac{h}{b}$$

より、

$$\frac{2(n-1)h}{R} = \frac{h}{a} + \frac{h}{b} \quad \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2(n-1)}{R}$$

が導ける。凸レンズの結像公式と比較すると、焦点距離 f は屈折率 n と球面の半径 R を用いて、

$$f = \frac{R}{2(n-1)}$$

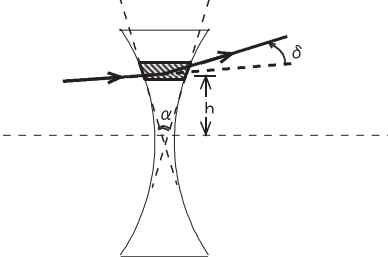
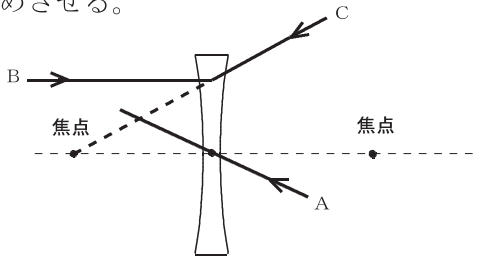
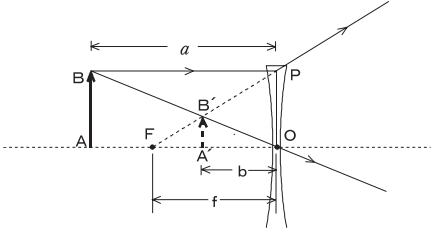
と表せ、 R が小さく、 n が大きいほど集光力の強いレンズであることを理解する。

○学習プリント3を配付する。

- ・ スネルの法則から結像公式を導く方法として、プリズムの振れ角を用いない展開法を紹介する。

- ・ プリント3を読むことにより、授業とは別な導出法を理解し、レンズによる結像がスネルの法則の結果であることを確認する。

[第2時] 授業展開

指 導 内 容	学 習 活 動
○学習プリント4を配付する。 ○凹レンズの性質を導かせる。 - 凹レンズによる光線の振れの角が、凸レンズと同様に、光軸からの距離 h に比例することを理解させる。  - 振れ角 δ が h に比例することから、光軸に対して平行に入射した光線は、レンズ通過後は、手前の一点から出た光のように進行することに気付かせる。 - 凹レンズを通過する光線の規則をまとめさせる。 	- 凸レンズのときと同様に、半径 R の球面から成る凹レンズを、微小なプリズムの集合と考え、光軸からの距離が h の部分のプリズムの頂角 α は、 $\alpha \doteq \frac{2h}{R}$ であるから、この部分を通過する光線の振れ角 δ の大きさは、凸レンズの場合と等しく、 $\delta = (n-1)\alpha = \frac{2(n-1)h}{R}$ と表せる。ただし、振れの向きは凸レンズのときの反対で、光軸に対し外向きになることを理解する。 - 凹レンズを通過する光線の進路に関する以下の規則 A、B、C を理解する - A：レンズの中心を通過する光線は直進する。 - B：レンズの光軸に平行に入射した光線は、手前の焦点から出た光のように進む。 - C：反対側の焦点を目指して入射する光線は、レンズ通過後は光軸に平行な向きに進む。 (Bの逆コースであるから、Bと同等)
○凹レンズの結像公式（虚像）の導出 - 凹レンズで虚像ができる様子を黒板に作図し、三角形の相似関係を用いて結像公式を導かせる。  - 物体の大きさに対する虚像の大きさの比 m は、①式より、 $m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{b}{a}$ で表されることを説明する。	「2 凹レンズの結像公式」の空欄を埋める。 $\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$ より、 $AB : A'B' = \boxed{a} : \boxed{b} \cdots \cdots ①$ $\triangle OPF \sim \triangle A'B'F$ より、 $OP : A'B' = \boxed{f} : \boxed{f-b} \cdots \cdots ②$ また、BP が光軸に平行であるから、$AB = OP$ より、①式の右辺と②式の右辺は等しい。したがって、 $\boxed{a} : \boxed{b} = \boxed{f} : \boxed{f-b}$ が成り立つ。この式を整理すると、 $\boxed{\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}} \cdots \cdots ③$ という関係式が得られる。

○凸レンズ、凹レンズの結像公式のまとめ

- 凸レンズで実像ができるとき、凸レンズで虚像ができるとき、および凹レンズで虚像ができるときの結像公式が、 a 、 b 、 f の符号を変えれば同一なものであることに気付かせる。

＜予想される生徒の質問＞

「どんなとき、 a が負になりますか。」

＜教師の答え＞

「レンズ一枚だけの場合は a は必ず正ですが、他の光学系(レンズや凹面鏡など)がレンズの反対側に実像を結ぼうとしているときは a が負になります。」

- 凸レンズ及び凹レンズの結像公式は次の式にまとめられることを理解する。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

＜符号＞

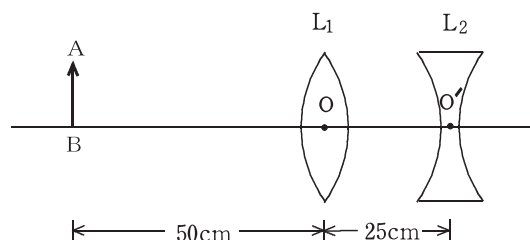
a : (光の進行の向きに対し) レンズの手前に物体があるとき正、反対側にあるとき負とする。

b : (光の進行の向きに対し) レンズの反対側に像ができるとき正、手前側にできるとき負とする。

f : 凸レンズの焦点距離を正、凹レンズの焦点距離を負とする。

○問題演習

- 学習プリントの演習問題を解かせることにより、凸レンズ及び凹レンズの結像公式の理解を深めさせる。



L_1 : 焦点距離30cmの凸レンズ

L_2 : 焦点距離60cmの凹レンズ

- 「3 演習問題」(複合レンズ) を解く。

(1) L_1 による AB の像 $A'B'$ と点 O との距離はいくらか。

(解答) $\frac{1}{50} + \frac{1}{b} = \frac{1}{30} \quad \therefore b = 75 \text{ cm}$

(2) 2つのレンズ L_1 、 L_2 による AB の像 $A'B''$ と点 O' との距離はいくらか。

(解答) $-\frac{1}{75-25} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{60} \quad \therefore b = 3.0 \times 10^2 \text{ cm}$

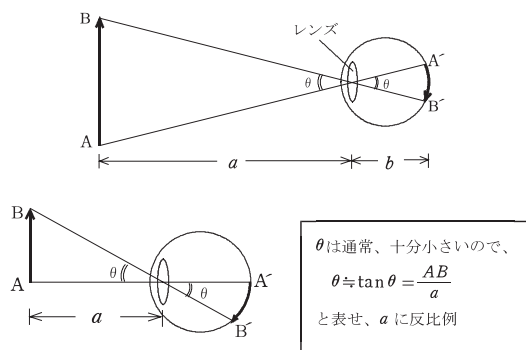
(3) 上問(2)の像は実像か虚像か。また、像の大きさは物体 AB の大きさの何倍か。

(解答) 実像、 $\frac{75}{50} \times \frac{300}{75-25} = 9$ 倍

○学習プリント5を配付する。

○目の構造

- 目で見たときの物の大きさが、視角に比例することを、目の構造とともに簡単に説明する。



- 物体 AB がはっきりと見えている状態である。このとき、物体 AB と目の距離を a 、レンズと網膜の距離を b 、レンズの焦点距離を f とすると、

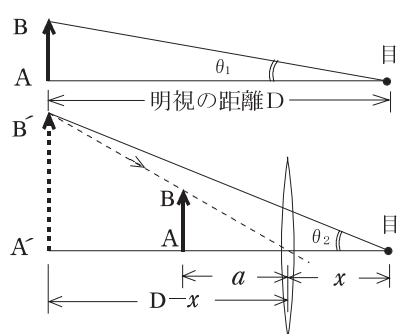
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

が成り立つ必要があり、 a の値に応じて水晶体のふくらみ具合を、ほとんど無意識のうちに変化させることによって、 f の値を調節し、ピントを合わせていることを理解する。

- 疲れないうで見続けることができる、 a の最小値には個人差があるが、成人の平均値は25 cm程度とされており、この距離25 cmを明視の距離とよび、光学機器の倍率計算に用いられることを理解する。

○虫眼鏡の原理を説明する。

- ・虫眼鏡は凸レンズによって、視角の大きい虚像をつくるものであり、像の倍率と虫眼鏡の倍率は必ずしも一致しないことを説明する。
- ・虫眼鏡の倍率は、レンズを目に近付けるほど大きくなることを計算によって示す。



- ・肉眼で観察するとき、ABを明視の距離Dの位置に置いたときの視角を θ_1 、目からの距離 x の位置に焦点距離 f の凸レンズを置き、ABの虚像 $A'B'$ が明視の距離の位置にできるようにしたとき、目から $A'B'$ を見込む角を θ_2 とすると、虫眼鏡を使ったことによる倍率 m は、

$$m = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

と表せ、

$$\theta_1 \doteq \tan \theta_1 = \frac{AB}{D}, \quad \theta_2 \doteq \frac{1}{D} \times AB \times \frac{D-x}{a}$$

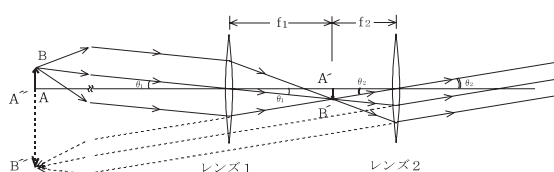
を代入し、結像公式 $\frac{1}{a} - \frac{1}{D-x} = \frac{1}{f}$ を用いると、

$$m = (D-x) \times \left(\frac{1}{D-x} + \frac{1}{f} \right) = 1 + \frac{D-x}{f}$$

と表され、 $x=0$ のとき最大となることから、目を虫眼鏡に接近させるほど高倍率が得られることを理解し、実際に虫眼鏡で観察して確認する。

○ケプラー式望遠鏡の原理を説明する。

- ・遠方の物体を拡大して観察しようとするときは、虫眼鏡のように凸レンズ一枚で大きな虚像をつくることはできないが、凸レンズを二枚用意し、一枚目の凸レンズでつくった実像を二枚目の凸レンズを用いて拡大して観察することが可能となることを説明し、参考として、ケプラー式望遠鏡の倍率計算の考え方を紹介する。



- ・凸レンズ1（焦点距離 f_1 ）と凸レンズ2（焦点距離 f_2 ）を、レンズ間の距離が $f_1 + f_2$ になるように配置してケプラー式望遠鏡を作る。物体ABを肉眼で観察したときの視角を θ_1 、望遠鏡で観察したとき、無限左方に見える倒立虚像 $A''B''$ の視角を θ_2 とすると、望遠鏡の倍率 m は、 θ_1 に対する θ_2 の比 $m = \theta_2 / \theta_1$ であることを理解する。

- ・図より $A'B' = f_1 \tan \theta_1 = f_2 \tan \theta_2$ が成り立ち、 θ_1 、 θ_2 が十分小さいものとする、近似的に $A'B' \doteq f_1 \theta_1 \doteq f_2 \theta_2$ としてよいから倍率 m は、

$$m = \frac{\theta_2}{\theta_1} \doteq \frac{f_2}{f_1}$$

と表せるため、対物レンズの焦点距離 f_1 が大きいほど、接眼レンズの焦点距離 f_2 が小さいほど、高倍率となることを理解する。

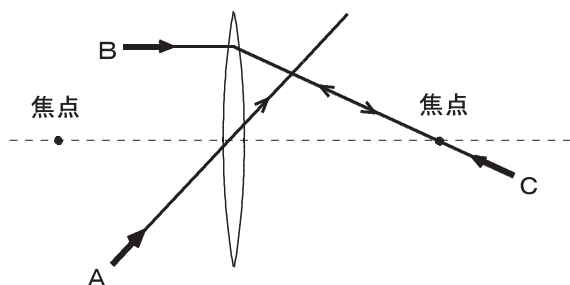
○学習プリント6を配付する。

- ・参考として、フェルマーの原理を紹介し、光の反射・屈折の法則について、今まで学習したものと全く別な表現法があることに気付かせ、物理に対する関心や探求心を高める。

- ・授業後に学習プリント6を読むことにより、フェルマーの原理を理解し、フェルマーの原理を基に幾何光学の規則の全てを導くことができることを理解する。
- ・フェルマーの原理によって、凸レンズの結像公式が直接得られることに気付く。

1 凸レンズの性質（凸レンズを通過する光線の進み方）

凸レンズに入射する無数の光線のうち、レンズ通過後の進路を作図しやすいのは次の3本です。



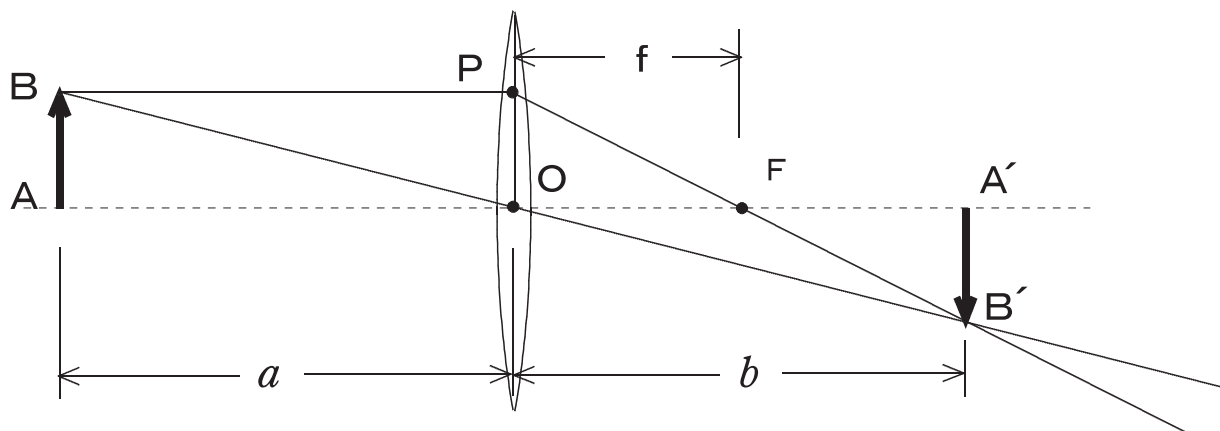
A :

B :

C :

2 凸レンズの結像公式（物体が焦点距離の外側にある場合）

図のように、凸レンズからの距離 a の位置にある物体 AB から出た光が、焦点距離 f の凸レンズに入射し、レンズからの距離 b の位置に実像ができています。 a 、 b 、 f の間に成り立つ関係式（結像公式）を導いてみましょう。



$\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$ より、

$$AB : A'B' = \boxed{} : \boxed{} \dots\dots ①$$

$\triangle OPF \sim \triangle A'B'F$ より、

$$OP : A'B' = \boxed{} : \boxed{} \dots\dots ②$$

また、 BP が光軸に平行であるから、 $AB = OP$ より、①式の右辺と②式の右辺は等しい。したがって、

$$\boxed{} : \boxed{} = \boxed{} : \boxed{}$$

が成り立つ。この式を整理すると、

$$\frac{1}{\boxed{}} + \frac{1}{\boxed{}} = \frac{1}{\boxed{}}$$

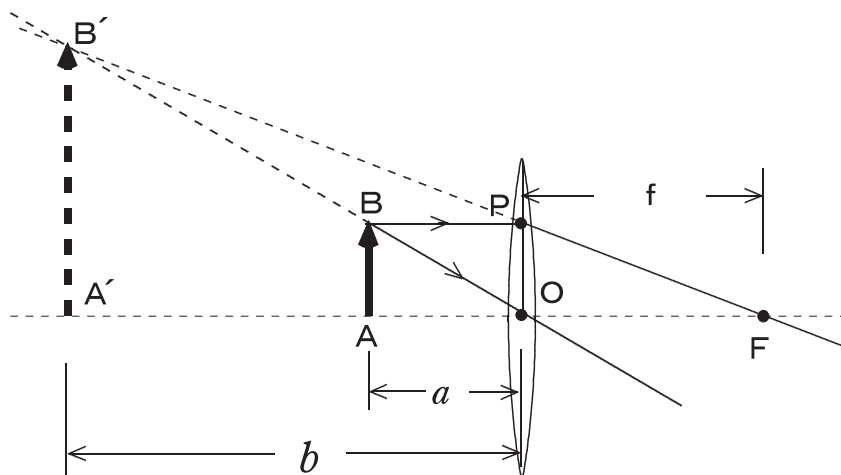
という関係式が得られる。また、物体の大きさに対する実像の大きさの比 m は、①式より、

$$m = \frac{A'B'}{AB} = \boxed{}$$

であることがわかる。

3 凸レンズの結像公式（物体が焦点距離の内側にある場合）

図のように、物体ABが凸レンズの焦点より内側にあるとき（ $a < f$ のとき）は、実像はできずレンズの左側に虚像ができます。虚像とレンズの距離を b として、 a 、 b 、 f の間に成り立つ結像公式を導いてみましょう。



$\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$ より、

$$AB : A'B' = \boxed{} : \boxed{} \cdots \cdots ④$$

$\triangle OPF \sim \triangle A'B'F$ より、

$$OP : A'B' = \boxed{} : \boxed{} \cdots \cdots ⑤$$

また、BPが光軸に平行であるから、 $AB = OP$ より、④式の右辺と⑤式の右辺は等しい。したがって、

$$\boxed{} : \boxed{} = \boxed{} : \boxed{}$$

が成り立つ。この式を整理すると、

$$\frac{1}{\boxed{}} - \frac{1}{\boxed{}} = \frac{1}{\boxed{}}$$

という関係が得られる。また、物体の大きさに対する虚像の大きさの比 m は、④式より、

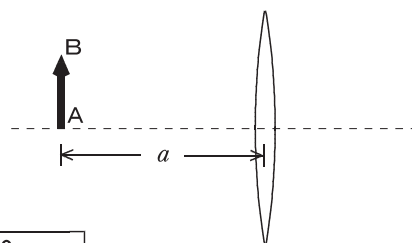
$$m = \frac{A'B'}{AB} = \boxed{}$$

であることがわかる。

4 演習問題

- (1) 焦点距離 10 cm の凸レンズの光軸上に、大きさ 2.0 cm の物体ABを置きます。物体ABとレンズの中心から物体ABまでの距離 a の値が、以下の①、②、③のとき、レンズによってできる像の位置と大きさをそれぞれ求めてみましょう。

- ① $a = 30 \text{ cm}$ ② $a = 20 \text{ cm}$ ③ $a = 8.0 \text{ cm}$



	① $a = 30 \text{ cm}$	② $a = 20 \text{ cm}$	③ $a = 8.0 \text{ cm}$
像の位置			
像の大きさ			

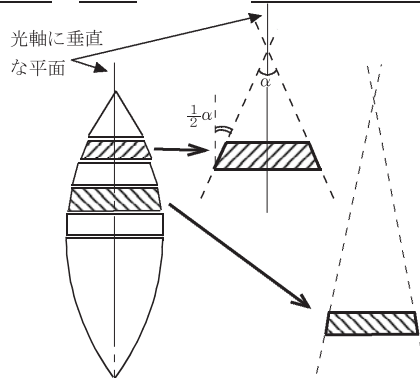
- (2) 光源から出た光を焦点距離 f [cm] の凸レンズで屈折させることにより、スクリーン上に実像をつくりたい。このとき、光源からスクリーンまでの距離 L はいくら以上であればよいですか。

答 [cm] 以上

____年 ____組 ____番 氏名 _____

1 球面レンズとプリズムの関係

右図のように、球面で構成される凸レンズは、微小なプリズムの集合体と考えることができます。微小プリズムの頂角の大きさ α は場所によって異なりますが、レンズ表面の傾き（光軸に垂直な平面とのなす角）の2倍に等しく、レンズの中心から離れた部分ほど大きいことがわかります。



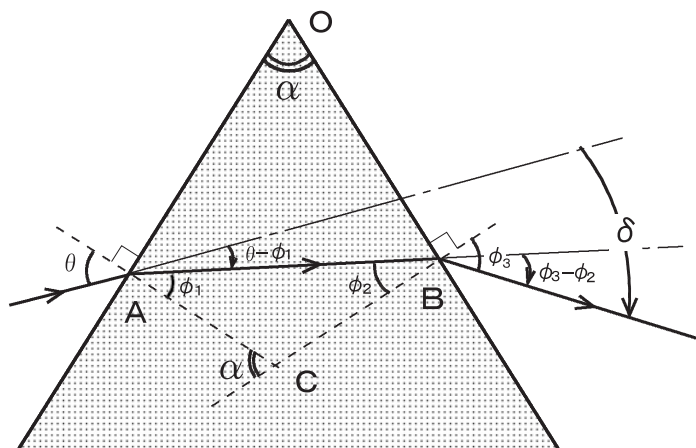
光線が空気中から屈折率 n 、頂角 α のプリズムに入射するとき、点Aにおける入射角を θ 、屈折角を ϕ_1 とすると、スネルの法則より、

$$1 \cdot \sin \theta = n \cdot \sin \phi_1 \cdots \textcircled{1}$$

また、この光線がプリズムから空気中に出る点を点Bとし、点Bにおける入射角を ϕ_2 、屈折角を ϕ_3 とすると、

$$n \cdot \sin \phi_2 = 1 \cdot \sin \phi_3 \cdots \textcircled{2}$$

光線は、点Aと点Bで、進行の向きを時計回りに回転させており、その回転角はそれぞれ、 $\theta - \phi_1$ 及び $\phi_3 - \phi_2$ です。



したがって、プリズムを通過することによる、この光線の振れの角（進行方向のずれ） δ は、これらの和ですから、 $\delta = (\theta - \phi_1) + (\phi_3 - \phi_2) \cdots \textcircled{3}$ と表せます。

ここで、四角形OACBで、 $\angle OAC + \angle CBO = \pi$ より、 $\angle ACB + \alpha = \pi$

また、 $\triangle ACB$ の内角の和が π より、 $\angle ACB + \phi_1 + \phi_2 = \pi$

したがって、 $\phi_1 + \phi_2 = \alpha \cdots \textcircled{4}$

θ 及び α が十分小さいときを考えると、 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 も十分小さくなるので、

$$\sin \theta \doteq \theta, \sin \phi_1 \doteq \phi_1, \sin \phi_2 \doteq \phi_2, \sin \phi_3 \doteq \phi_3$$

という近似が成り立ち、これらの関係及び④式を①式、②式に用いると、

$$\theta \doteq n \phi_1 \quad \therefore \phi_1 \doteq \frac{\theta}{n} \quad \phi_2 = \alpha - \phi_1 = \alpha - \frac{\theta}{n} \quad n \phi_2 \doteq \phi_3 \quad \therefore \phi_3 \doteq n \left(\alpha - \frac{\theta}{n} \right)$$

これらを③に代入すると、

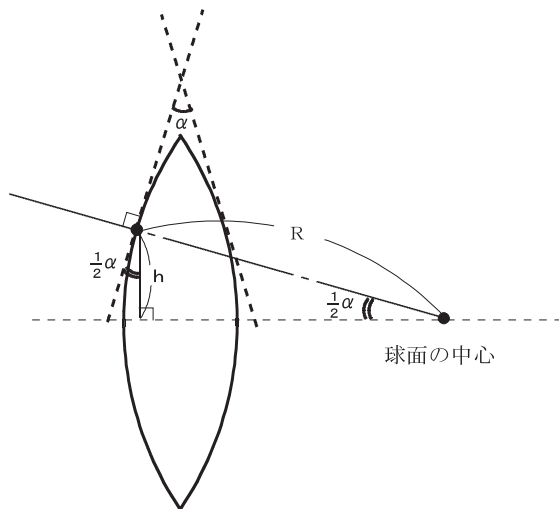
$$\delta = \theta - \frac{\theta}{n} + n \alpha - \theta - \alpha + \frac{\theta}{n} = (n - 1) \alpha$$

よって、光線が頂角 α の十分小さなプリズムに、小さな入射角で入射する場合、振れの角 δ は入射角の大きさによらず、 $\delta = (n - 1) \alpha$ と表せ、頂角 α に比例することがわかります。

(課題)

屈折率1.5のガラスでできた、頂角の大きさが 3° のプリズムに対して小さな入射角で入射した光線の振れ角 δ は何radですか。また、頂角の大きさが2倍の 6° の場合振れ角 δ は何radになりますか。

3 凸レンズによる振れの角



屈折率 n で、半径 R の2つの球面からなる薄い凸レンズを微小なプリズムに分けて考えましょう。レンズの光軸から距離 h だけ離れた部分を、微小なプリズムと考え、その頂角の大きさを α とすると、球面の法線と光軸のなす角は $\frac{1}{2}\alpha$ であり、

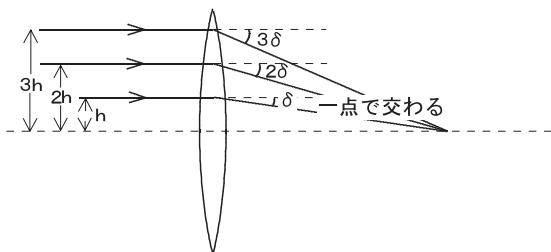
$$\frac{1}{2}\alpha \doteq \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{h}{R} \quad \therefore \alpha \doteq \frac{2h}{R}$$

よって、光線の振れの角 δ は、

$$\delta = (n-1)\alpha = \frac{2(n-1)h}{R}$$

と表せ、光軸からの距離 h に比例することがわかります。

4 凸レンズに入射する平行光線



光軸に平行に入射した光線の振れの角 δ は、光軸からの距離 h に比例するため、

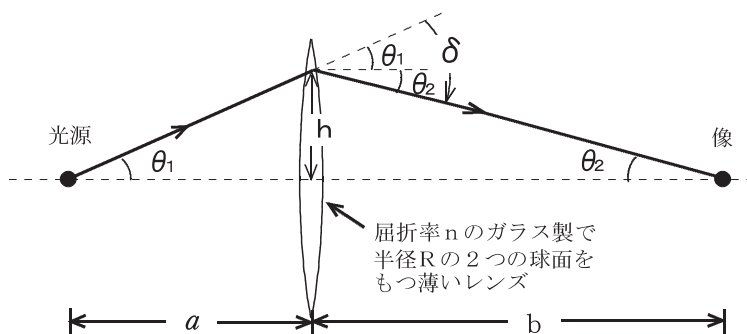
① レンズの中心に入射した光線は直進する。

② 光軸に平行な入射光線は、レンズを通過した後、焦点（一つの点）を横切る。

という凸レンズの性質が説明できます。

5 凸レンズの結像公式と振れ角の関係

図のように、レンズからの距離 a の光源から出た光線が、光軸となす角 θ_1 でレンズに入射し、レンズ通過後には、光軸となす角 θ_2 で進んで、レンズからの距離 b の位置に集まったとします。このとき、この光線がレンズを通過する位置の、光軸からの距離を h としましょう。



図より、振れの角 δ は、 $\delta = \frac{2(n-1)h}{R} = \theta_1 + \theta_2$ と表せ、 h が十分小さいとき、 $\theta_1 \doteq \frac{h}{a}$, $\theta_2 \doteq \frac{h}{b}$ と近似できますから、

$$\frac{2(n-1)h}{R} = \frac{h}{a} + \frac{h}{b} \quad \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2(n-1)}{R}$$

したがって、光源から出てレンズに入射した光線は、 h の値によらず、すべて一点に集まることがわかります。また、凸レンズの結像公式

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

と比較すると、焦点距離 f は、屈折率 n と球面の半径 R を用いて、

$$f = \frac{R}{2(n-1)}$$

であることがわかります。

学習プリント3 「屈折の法則」から「レンズの結像公式」を導こう(2)

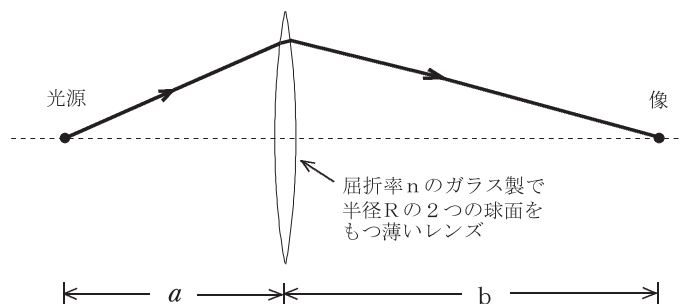
両面が球面でできた薄い凸レンズの場合、光源からレンズまでの距離 a 、レンズから像までの距離 b 、および、焦点距離 f の間には、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (\text{結像公式})$$

という関係が成り立つことを学習しました。これは、

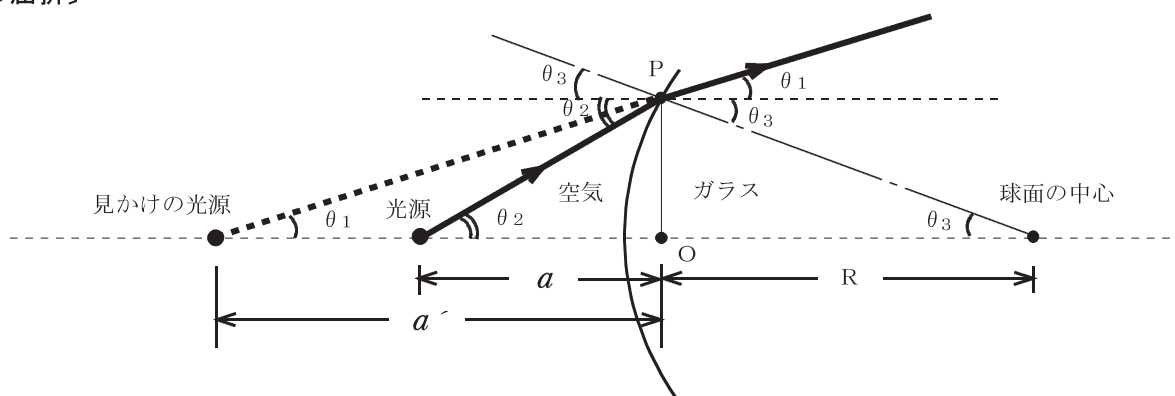
- ① レンズの光軸に平行な入射光線は、レンズを通過した後、反対側の焦点を横切る。
- ② レンズの中心に入射した光線は直進する。

などの凸レンズの性質から導け、球面の凸レンズがこのような性質をもつ理由を、[学習プリント1](#)では、凸レンズを微小プリズムの集合とみなして考察しましたが、ここでは別の考え方で、スネルの法則から直接凸レンズの結像公式を導いてみましょう。



上図のように、光源からの光がレンズによって像を結ぶときには、光線は空気中からレンズの左面に入るときと、右面から空気中に出るときに2回屈折して進路が曲がりします。光線は光軸に十分近いコースを通るものとし、両方の球面ともその半径 R は十分大きく、レンズの厚みは無視できるものとして、2回の屈折についてスネルの法則を用いてみましょう。(ただし、図は見やすさを考え、レンズの厚みやレンズ中の光線と光軸の距離などを実際より大きく表現しています。)

〔左面での屈折〕



図のように、光線が屈折率 n のガラスに入射する点を P 、レンズの中心を O とし、見かけの光源と点 O との距離を a' とします。また、図のように角度 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 を定めます。

図より、レンズ左面への入射角は、 $\theta_2 + \theta_3$ 、屈折角は、 $\theta_1 + \theta_3$ であるので、空気の屈折率を 1 としてスネルの法則を用いると、

$$1 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) = n \sin(\theta_1 + \theta_3)$$

また、図より距離 PO を θ_1 、 θ_2 、 θ_3 を用いて表すと、

$$PO = a' \tan \theta_1 = a \tan \theta_2 = R \tan \theta_3$$

となり、 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 が十分小さいものとする、上の2式は近似的に、

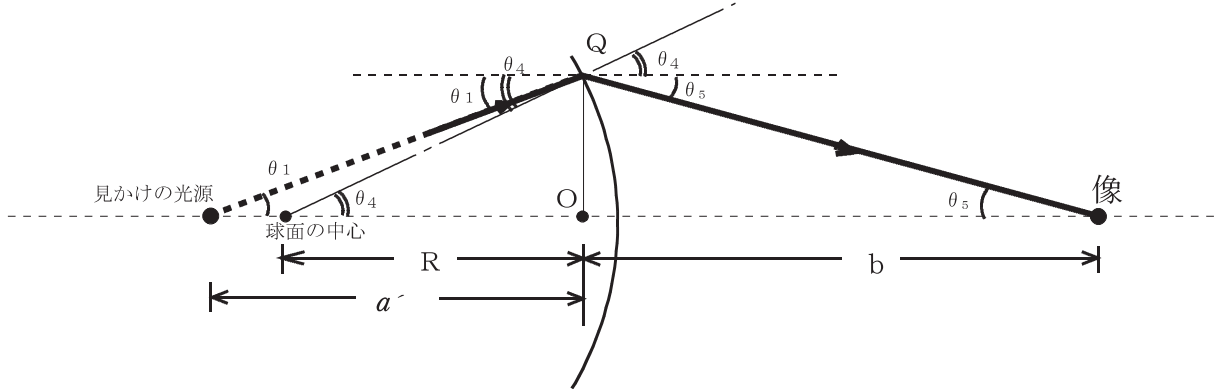
$$\theta_2 + \theta_3 = n(\theta_1 + \theta_3) \cdots \cdots ①$$

$$PO = a' \theta_1 = a \theta_2 = R \theta_3 \cdots \cdots ②$$

と表せます。①、②より a' を n 、 a 、 R を用いて表すと、

$$a' = \frac{nRa}{R - (n-1)a} \quad \cdots \cdots ③$$

〔右面での屈折〕



図のように、光線が屈折率 n のガラスから空気中に出る点を Q 、空気中に出た光線が光軸を横切る点に像ができるものとし、像と点 O との距離を b とします。また、図のように角度 θ_4 、 θ_5 を定めます。

図より、レンズ右面への入射角は、 $\theta_1 - \theta_4$ 、屈折角は、 $\theta_4 + \theta_5$ であるので、スネルの法則より、

$$n \cdot \sin(\theta_4 - \theta_1) = 1 \cdot \sin(\theta_4 + \theta_5)$$

また、図より距離 QO を θ_1 、 θ_4 、 θ_5 を用いて表すと、

$$QO = a' \tan \theta_1 = R \tan \theta_4 = b \tan \theta_5$$

となり、 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 が十分小さいものとする、上の2式は近似的に、

$$n\theta_4 - n\theta_1 = \theta_4 + \theta_5 \quad \cdots \cdots ④$$

$$QO = a'\theta_1 = R\theta_4 = b\theta_5 \quad \cdots \cdots ⑤$$

と表せる。④、⑤より a' を n 、 b 、 R を用いて表すと、

$$a' = \frac{nRb}{(n-1)b - R} \quad \cdots \cdots ⑥$$

よって、③、⑥の2式より、

$$\frac{nRa}{R - (n-1)a} = \frac{nRb}{(n-1)b - R} \quad \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2(n-1)}{R}$$

という、レンズの結像公式と同等の関係式が得られます。したがって、焦点距離 f と n 、 R の関係は、

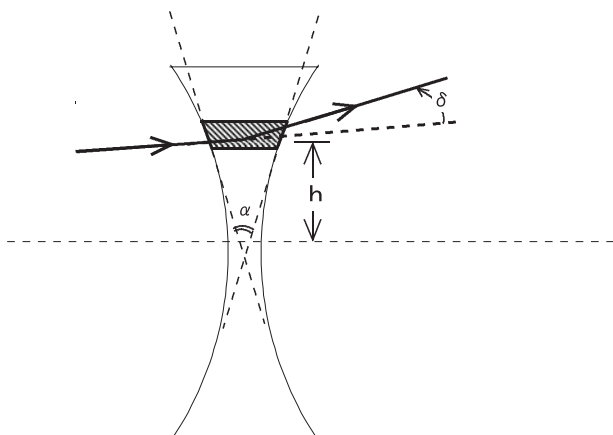
$$f = \frac{R}{2(n-1)}$$

であることがわかります。

学習プリント 4 凹レンズの結像公式

____年 ____組 ____番 氏名 _____

1 凹レンズの性質



凸レンズのときと同様に、半径 R の球面から成る凹レンズを、微小なプリズムの集合と考え、光軸からの距離が h の部分のプリズムの頂角 α は、

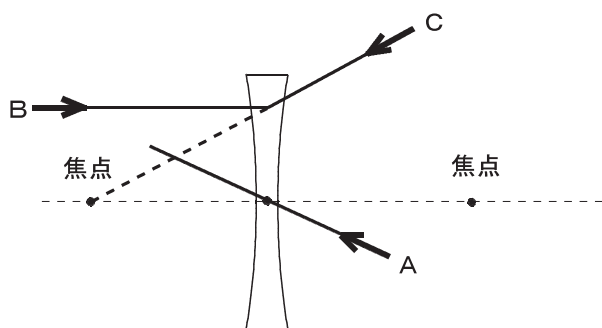
$$\alpha \doteq \frac{2h}{R}$$

であるから、この部分を通る光線の振れ角 δ は、凸レンズの場合と等しく、

$$\delta = (n-1)\alpha = \frac{2(n-1)h}{R}$$

と表せます。ただし、振れの向きは凸レンズのときの反対で光軸に対して外向きになります。

したがって、凹レンズを通る光線の振れ角は、光軸からの距離 h に比例するため、次のような3つの規則があります。



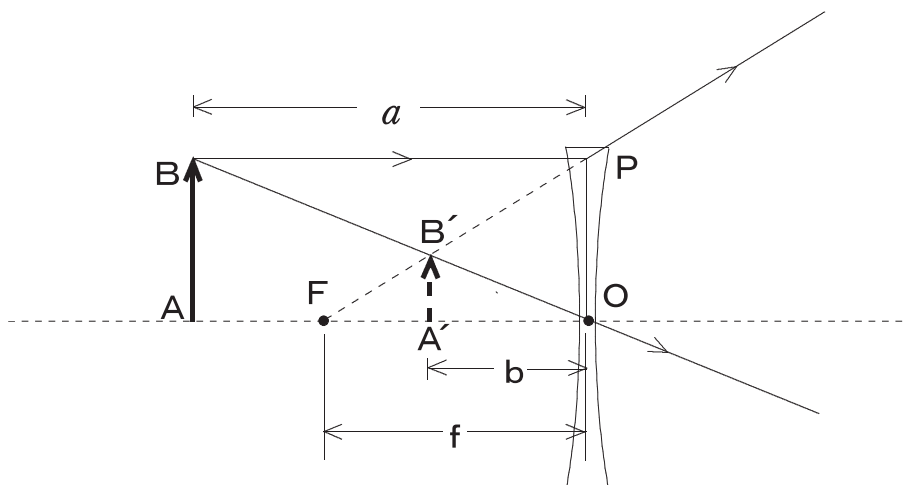
A :

B :

C :

2 凹レンズの結像公式

図のように、凸レンズからの距離 a の位置にある物体 AB から出た光が、焦点距離 f の凹レンズに入射し、レンズからの距離 b の位置に虚像ができているとき、 a 、 b 、 f の間に成り立つ関係式（結像公式）を導いてみましょう。



$\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$ より、

$$AB : A'B' = \boxed{} : \boxed{} \dots\dots ①$$

$\triangle OPF \sim \triangle A'B'F$ より、

$$OP : A'B' = \boxed{} : \boxed{} \dots\dots ②$$

また、BP が光軸に平行であるから、 $AB = OP$ より、①式の右辺と②式の右辺は等しい。したがって、

$$\boxed{} : \boxed{} = \boxed{} : \boxed{}$$

が成り立つ。この式を整理すると、

$$\frac{1}{\boxed{}} - \frac{1}{\boxed{}} = - \frac{1}{\boxed{}}$$

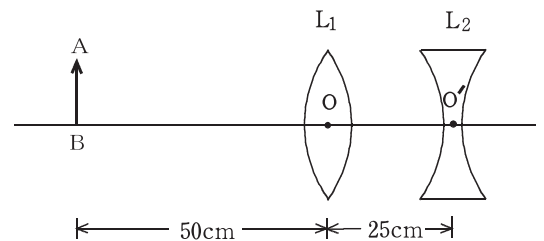
という関係式が得られる。また、物体の大きさに対する虚像の大きさの比 m は、①式より、

$$m = \frac{A'B'}{AB} = \boxed{}$$

であることがわかる。

3 演習問題

右図のように、焦点距離30cmの凸レンズ L_1 と、焦点距離60cmの凹レンズ L_2 および物体 AB を配置する。図の点 O と点 O' は、 L_1 および L_2 の中心を表している。以下の(1)から(3)の問題を解いてみましょう。



- (1) L_1 による AB の像 $A'B'$ と点 O との距離はいくらですか。

答 cm

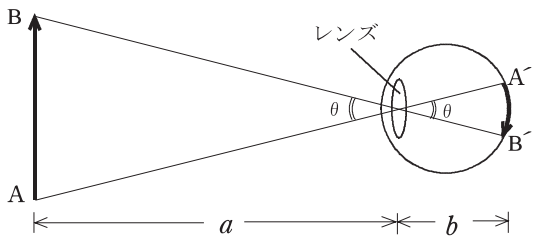
- (2) 2つのレンズ L_1 、 L_2 による AB の像 $A''B''$ と点 O' との距離はいくらですか。ただし、像 $A''B''$ は、 L_1 による像 $A'B'$ を実在の物体と見なしたとき、 L_2 によってできる $A'B'$ の像と考えられます。

答 cm

- (3) 前問(2)の像は、実像ですか、虚像ですか。また、その像の大きさは物体 AB の大きさの何倍になりますか。

答 像、 倍

1 目のレンズのはたらき



物体ABから出た光が角膜と水晶体で構成される凸レンズによって屈折し、網膜上に実像ができている状態が、物体ABがはっきりと見えている状態です。このとき、物体ABと目の距離を a 、レンズと網膜の距離を b 、レンズの焦点距離を f とすると、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

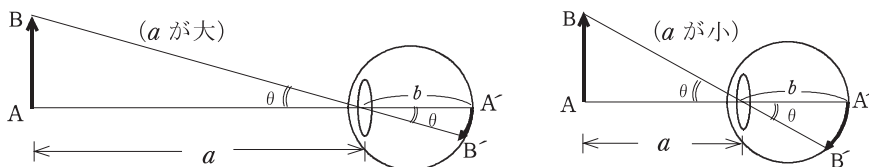
が成り立つ必要があります、 a の値に応じて水晶体のふくらみ具合を、ほとんど無意識のうちに変化させることによって f の値を調節し、ピントを合わせています。

(遠くのものを見ると a が大きい $\rightarrow f$ を大きく $\rightarrow$ 水晶体のふくらみを小さくする
 近くのものを見ると a が小さい $\rightarrow f$ を小さく $\rightarrow$ 水晶体のふくらみを大きくする)

2 目で見た物の大きさ

目で物体ABを見たとき感じる大きさは、網膜に写った実像A'B'の大きさに比例すると考えられ、 $A'B' = b \theta$ ですから、角 θ に比例します。(この θ を「視角」とよびます。)

物体ABをできるだけ大きく拡大して見たい場合は、 θ をできるだけ大きくすればよいから、 a をできるだけ小さくすればよいことになります。(目をできるだけ近づければよい、という当たり前の話)

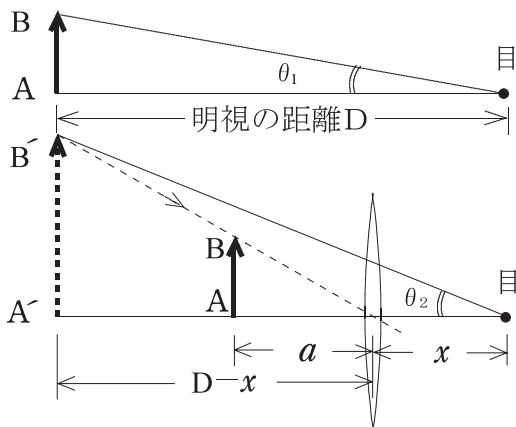


θ は通常、十分小さいので
 $\theta \approx \tan \theta = \frac{AB}{a}$
 より、 a に反比例

ただ、このとき目のピントを合わせるためには f をできるだけ小さくする必要がありますが、水晶体の調節には限度があります。長時間、疲れなくて見続けることができる、 a の最小値には個人差がありますが、成人の平均値は25 cm程度とされています。この距離25 cmを明視の距離とよび、光学機器の倍率計算に用いられます。したがって、肉眼でものを見ると、2.5 cmまで近づけて見ることができれば倍率は10倍、2.5 mmなら倍率100倍で観察できることになります。(できる人いますか？ 無理ですよ)

3 虫眼鏡の原理

凸レンズを用いて実物より大きな実像を明視の距離の位置につくることにより、視角 θ を大きくします。(肉眼で)



ABを明視の距離Dの位置に置きます。視角 θ_1 は、

$$\theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{AB}{D} \quad \dots \textcircled{1}$$

(虫眼鏡を使用して)

目からの距離 x の位置に焦点距離 f の凸レンズを置き、ABの虚像A'B'が明視の距離Dの位置にできるようにします。目の位置からA'B'を見込む角(視角) θ_2 は、

$$\theta_2 \approx \tan \theta_2 = \frac{A'B'}{D}$$

このとき、ABとレンズの距離を a とすると、

$$\theta_2 \approx \frac{1}{D} \times AB \times \frac{D-x}{a} \quad \dots \textcircled{2}$$

①、②より虫眼鏡を使ったことによる倍率 m は、 $m = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{D-x}{a}$ と表せます。

また、凸レンズの結像公式より $\frac{1}{a} - \frac{1}{D-x} = \frac{1}{f}$ の関係があり、これら2式より a を消去すると、

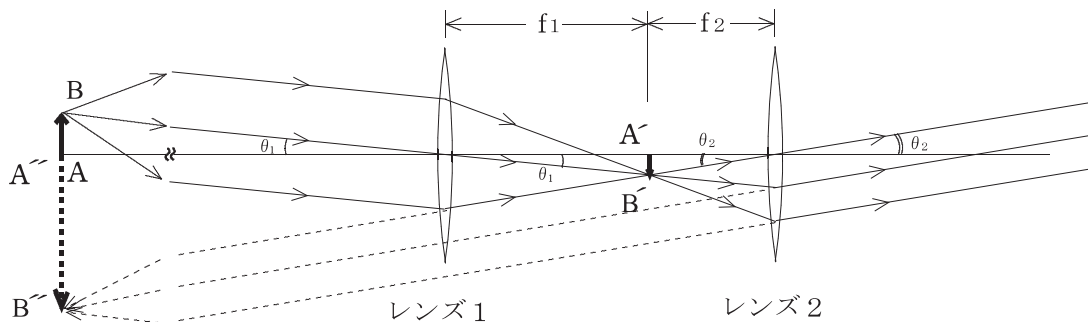
$$m = (D-x) \times \left(\frac{1}{D-x} + \frac{1}{f} \right) = 1 + \frac{D-x}{f}$$

が得られます。この結果から、 m は $x=0$ のとき最大値 $1 + \frac{D}{f}$ となり、これが一般に虫眼鏡の倍率とされています。したがって、 cm 単位で表した虫眼鏡の倍率 m は、 $m = 1 + \frac{25}{f}$ ということになり、焦点距離の短いレンズほど倍率が高いことがわかります。

4 ケプラー式望遠鏡の原理（参考）

遠方の物体を拡大して観察しようとするときは、虫眼鏡のように凸レンズ一枚で大きな虚像をつくることはできません。そこで、凸レンズを二枚用意し、一枚目の凸レンズでつくった実像を二枚目の凸レンズを用いて拡大して観察するようにします。この原理に基づく望遠鏡を、ケプラー式望遠鏡とよびます。

図のように、凸レンズ1（焦点距離 f_1 ）と凸レンズ2（焦点距離 f_2 ）を、光軸を合わせ、レンズ間の距離が $f_1 + f_2$ になるように配置してケプラー式望遠鏡をつくり、遠方の物体 AB を観察することを考えてみましょう。



物体 AB を肉眼で観察したときの視角が θ_1 であるとし、物体 AB が十分遠方にあるとき、光軸上の点 A から出てレンズ1に入射する無数の光線は、互いに平行になっているため、レンズ1の焦点に集まります。また、点 B からの光線も同様に平行光線となっていますから、レンズ1の焦点面（光軸に垂直で焦点を含む面）上の一点に集まるため、レンズ1の焦点面に実像 $A'B'$ ができます。このとき、レンズ1の焦点面とレンズ2の焦点面は一致しているため、点 A' から出たとみなせる無数の光線は、レンズ2通過後は光軸方向の平行光線となり、同様に点 B' から出たとみなせる無数の光線は、光軸に対してある傾きをもった平行光線となります。平行光線を目で観察すると、無限遠方からの光と同等ですから、レンズ2通過後の光を目で見ると、無限左方に倒立の虚像 $A''B''$ が見えることになります。

このとき、 $A''B''$ の視角を θ_2 とすると、望遠鏡の倍率 m は、 AB の視角 θ_1 に対する、 $A''B''$ の視角 θ_2 の比であるから、

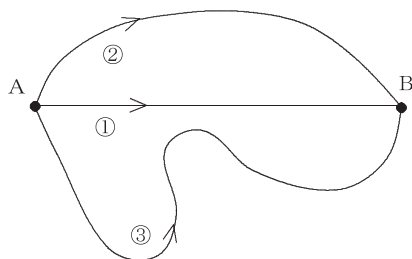
$m = \frac{\theta_2}{\theta_1}$ と表せます。また、図より $A'B' = f_1 \tan \theta_1 = f_2 \tan \theta_2$ の関係があり、 θ_1, θ_2 が通常は十分小さく、

$$A'B' \div f_1 \theta_1 \div f_2 \theta_2 \quad \text{と近似できるため、} \quad m = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{f_1}{f_2}$$

と表せます。したがって、対物レンズの焦点距離 f_1 が大きいほど、接眼レンズの焦点距離 f_2 が小さいほど高倍率となることがわかります。

光の性質については、これまで、反射の法則（媒質の境界で反射が起こるとき、入射角と反射角が等しい）、屈折の法則（入射角、屈折角と媒質中の光速の関係）を学習してきました。これらの法則は「ホイヘンスの原理」によって説明できたわけですが、これから紹介する「フェルマーの原理」によっても説明することができます。フェルマーは17世紀のフランスの数学者（職業は弁護士）で、フェルマーの最終定理で有名ですから聞いたことがある人もいるでしょう。

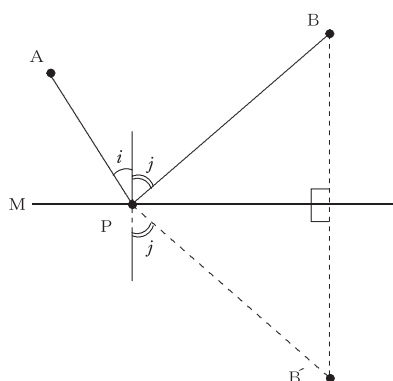
1 フェルマーの原理とは



フェルマーの原理をわかりやすく表現すると、「光線が一点から他の点まで進むときの実際の経路は、可能な全ての経路のうち、所要時間が最小となる経路である。」という原理です。（「所要時間が最小となる経路」の、より正確な表現は「その経路をわずかにずらしたとき、所要時間に実質的な変化が起こらないような経路」です。）

例えば図のように、点Aから出た光が点Bに到達するとき、真空中、または媒質が均質であれば光速は変化しませんから、実際の経路は距離が最短な経路ということになり、直線である①となります。

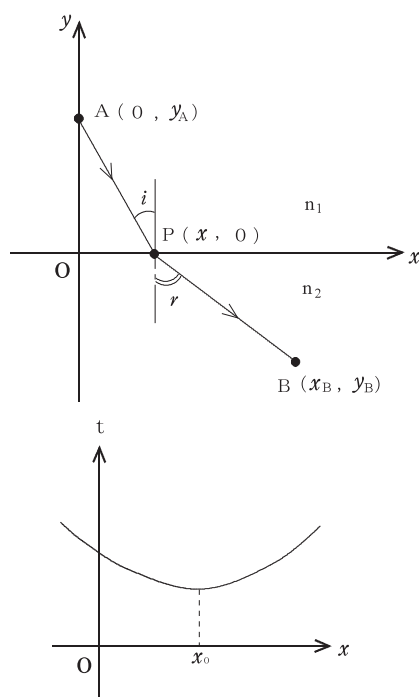
2 反射の法則



図のように、点Aから出た光のうち、鏡M上の点Pで反射してから点Bに到達する光線の経路を考えましょう。

真空中、または媒質が一様である場合、フェルマーの原理によれば、M上の点Pは距離 $AP + PB$ を最短にするような点ということになります。点Bの、Mに対して対称の位置にある点を B' とすると、 $PB = PB'$ ですから、点Pは $AP + PB'$ が最短になるような点であり、したがってA、P、 B' が一直線上に並ぶ必要があります。このとき、図より入射角 i と反射角 j が対頂角の関係にならないからこれらは等しいことになり、フェルマーの原理から反射の法則が導けたことになります。

3 屈折の法則



真空中の光速を c とし、屈折率 n_1 の媒質中の点Aから出た光線が屈折率 n_2 の媒質中の点Bに到達するとき、媒質境界面上の点Pを通過するものとします。図のように x 軸、 y 軸を定め、A、P、Bの座標を $(0, y_A)$ 、 $(x, 0)$ 、 (x_B, y_B) とし、所要時間を t とすると点Pは、

$$t = \frac{AP}{\frac{c}{n_1}} + \frac{PB}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_1 \sqrt{x^2 + y_A^2} + n_2 \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}{c}$$

を最小にする点ということになります。このとき、 x と所要時間 t の関係をグラフに表すと、 t が最小（極小）となる点 $(x_0, 0)$ でグラフの接線の傾きが0となるから、 $\frac{dt}{dx} = 0$ が成り立ち、 n_1, n_2, c は x によらない定数ですから、 $\frac{d}{dx}(n_1 \sqrt{x^2 + y_A^2}) + \frac{d}{dx}(n_2 \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}) = 0$

$$\therefore n_1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} \times 2x - n_2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} \times 2(x_B - x) = 0$$

入射角、屈折角を i, r とすると、

$$\sin i = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}}, \quad \sin r = \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

と表せますから、 $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ という、スネルの法則と同じ結果が得られます。

4 凸レンズの結像公式

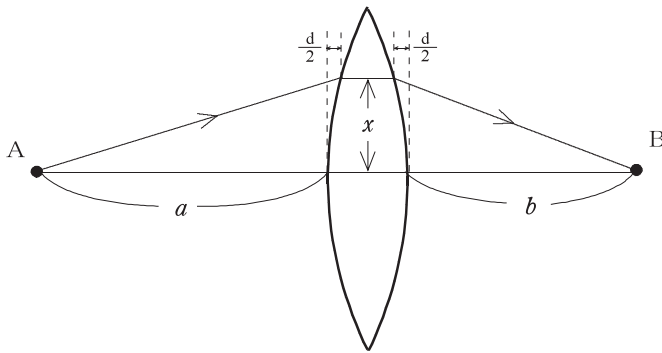


図 1

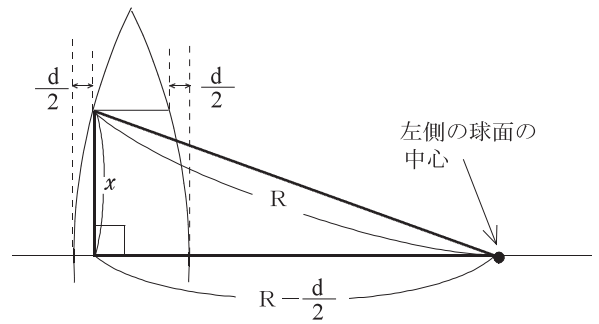


図 2

図 1 のように、点 A から出て凸レンズを通過する全ての光線が点 B に達する条件をフェルマーの原理によって考えてみると、全ての経路で所要時間が同じ、ということになります。そうでなければ、所要時間が最小となる光線のみしか B 点に達することができません。光は空気中からガラスに入るとスピードが落ちますから、空気中の距離の短い光軸付近を通るコースに対して、空気中を遠回りしてレンズの周辺部を通過するコースでは、ガラスの厚みが薄くなっていなければならないことになります。

凸レンズは屈折率が n の物質でできていて、その両面は半径 R の球面であるものとします。点 A から点 B まで直進する経路での所要時間を t_0 とし、また、光軸から x だけ離れた場所でレンズを通過する経路での所要時間を t とすると、 t が x によらず t_0 に等しくなれば、点 A から出て凸レンズを通過する光線は全て点 B に達することができます。

この関係を、点 A とレンズの距離を a 、レンズと点 B の距離を b とし、光軸上のレンズの厚みと光軸から x だけ離れた部分のレンズの厚みの差を d として、式に表してみましょう。

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + d + \sqrt{b^2 + x^2}}{c} - \left(\frac{a+b}{c} + \frac{nd}{c} \right) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 x が a 、 b 、 R に比べて十分小さい近軸光線に限るものとする、

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = a \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \doteq a \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{a^2} \right) = a + \frac{x^2}{2a} \cdots \textcircled{2}$$

同様に、

$$\sqrt{b^2 + x^2} \doteq b + \frac{x^2}{2b} \cdots \textcircled{3}$$

と近似できます。また、図 2 の直角三角形で、三平方の定理を式に表し、 $d \ll R$ として近似を行うと、

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + \left(R - \frac{d}{2} \right)^2 \\ &= x^2 + R^2 \left(1 - \frac{d}{2R} \right)^2 \\ &\doteq x^2 + R^2 \left(1 - 2 \times \frac{d}{2R} \right) \\ &= x^2 + R^2 - Rd \end{aligned}$$

よって、 $d = \frac{x^2}{R} \cdots \textcircled{4}$ と表せます。

これら②、③、④を①の式に代入すると、

$$\frac{x^2}{2a} + \frac{x^2}{2b} + (1-n) \times \frac{x^2}{R} = 0 \quad \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2(n-1)}{R}$$

このように x が消え、焦点距離 f が、 $f = \frac{R}{2(n-1)}$ の凸レンズの結像公式が得られました。

したがって、球面の凸レンズの場合、光源の一点から出てレンズの光軸付近を通過し、実像の一点に到達する無数の光線の所要時間は、全て等しいことが確かめられたことになります。