高等学校における教科指導の充実

数　学　科

「範囲の概念」の形成を促す指導の工夫

栃木県総合教育センター
平成19年３月

ま　え　が　き

　学力に関する国際的な調査や教育課程実施状況調査では、日本の高校生の学力の状況や学習に対する意識などが明らかにされ、国のレベルからも学力向上のための様々な提言がなされています。栃木県では、「とちぎ教育振興ビジョン（二期計画）」を策定し、中・長期的な展望に立った教育施策を、平成18年度より新たにスタートしました。ビジョンでは、「確かな学力」を育成することを教育施策推進上の重要な観点として掲げ、教材や指導の工夫をすること、思考力・判断力・表現力などを高める学び合いを充実することなどの指導のポイントを示しています。

　各学校においても、教育活動の改善充実に日々努めているところですが、特に教科指導においては、限られた時間の中でも効果的な指導を展開して、生徒の学力向上に資することが大切です。

　これらのことを踏まえ、総合教育センターでは、「高等学校における教科指導の充実に関する調査研究」に取り組んでおります。この調査研究の目的は、基礎・基本の確実な定着を図るための授業改善を目指して、教科指導の在り方について研究し、その成果を普及することにより、学力の向上に資することにあります。今年度は、国語科、数学科、理科（物理、化学、生物）、外国語科（英語）の４教科において、教育課程実施状況調査等の調査結果から指摘されている課題を踏まえ、その解決を図るための授業改善の方策等について研究に取り組みました。研究の成果をまとめた本冊子を、各学校の実情に応じて有効にご活用いただければ幸いです。

　最後に、今年度の調査研究を進めるにあたり、ご協力いただきました研究協力委員の方々に深く感謝申し上げます。

　平成19年３月

栃木県総合教育センター所長
五　味　田　謙　一

目　　　　　次

「範囲の概念」の形成を促す指導の工夫

はじめに

平成 15 年度から現行の学習指導要領が施行され、４年が経過した。今回の改定では、小学校・中学校の算数・数学科において、いくつかの学習内容が移行・削除されたことが話題になった。高等学校数学科においても、中学校から移行された内容が盛り込まれるなど、各科目の内容の変更が行われた。特に、「不等式」については、不等号が小学校第２学年から中学校第１学年に、１次不等式が中学校第２学年から高等学校数学Ⅰに移行された。この移行に伴い、「不等式」についての指導を工夫しなければならなくなったことはもちろんのこと、生徒の「範囲の概念」が十分に形成されていないことに配慮し、高等学校数学科の指導計画全体を見直すことも必要となった。

範囲の概念は、数の大小関係から集合としての範囲へと拡張されるなかで形成されると言われている。従前は、小学校第２学年で数の大小関係を学び、そこで不等号とその表現方法を学んだ。その後、小学校第６学年の資料の整理で「以上」、「以下」、「未満」といった言葉を通して、範囲について学んだ。さらに、中学校第２学年の資料の整理や近似値の中で範囲についての理解を深め、それらと並行して、１次不等式の解としての範囲、関数における変域としての範囲を学んだ。しかし、現在は、数の大小関係は小学校で学ぶが、その表現方法は中学校第１学年に移行された。また、範囲については、中学校第１学年の比例において、x の変域、y の変域として学ぶことになった。「以上」、「以下」、「未満」といった言葉や、数直線上に範囲を表現することも、ここで初めて学ぶことになった。関数を苦手にしている生徒が多い中で、変域としての範囲の扱いだけでは、範囲の概念が十分に形成されることは難しいと予想される。

小学校・中学校における範囲についての取り扱い

従前の学習指導要領

小学校第２学年　**不等号**（中学校１年生へ）
小学校第６学年　**資料の整理**（高等学校数学基礎、数学Ｂへ）
中学校第１学年　比例における x、y の変域
中学校第２学年　**１次不等式**（高等学校数学Ⅰへ）
　１次関数における x、y の変域
　資料の整理（高等学校数学基礎、数学Ｂへ）
　近似値
中学校第３学年　２乗に比例する関数における x、y の変域

現行の学習指導要領

中学校第１学年　不等号
　比例における x、y の変域
中学校第２学年　１次関数における x、y の変域
中学校第３学年　２乗に比例する関数における x、y の変域

これらの現状を踏まえて、高等学校数学科の全体的な指導の中で、範囲の概念の形成を促すことを考えていかなければならない。特に、不等式や定義域・値域などの範囲に関する内容を取り扱うときには、十分な配慮が必要となる。本研究では、生徒の現状、中学校での指導の状況の把握に努めるとともに、範囲の概念の形成を心がけた指導の工夫に取り組んだ。また、各事例における授業のねらい、教材、授業展開等は、実践者である研究協力委員の学校の実態に合わせて設定した。

＜研究協力委員＞
栃木県立鹿沼東高等学校　教　諭　前 橋 洋 子
栃木県立足利工業高等学校　教　諭　相 田 昌 宏
栃木県立真岡女子高等学校　教　諭　寺 崎 義 人
＜研究委員＞
総合教育センター　研究調査部　指導主事　吉 川 孝 昭
総合教育センター　研 修 部　指導主事　植 木 　 淳

Ⅰ　「範囲」についての現状

1　「範囲についての確認テスト」の結果から見えてくる生徒の現状

(1) 確認テスト（事前）の実施について

①対象、実施時期等

対　　象：研究協力委員の学校の第１学年　合計 234 名

実施時期：平成 18 年６月から７月　１次不等式、２次関数を学習する前

時　　間：おおむね 10 分程度

②出題のねらい

中学校の学習内容に配慮するとともに、範囲についての理解の状況を把握するために、言葉、図（数直線、グラフ）、式で表現された範囲を、他の形式で表現することができるかどうかを確認する。

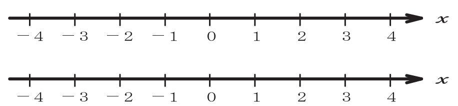
(2) 問題と正答率

①範囲の把握について（問題１、２）

1　次の範囲を右の数直線に図示せよ。

① $0 \leqq x \leqq 3$

② $x > -1$

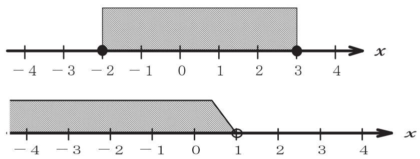


①正答率 66.2%
②正答率 50.0%

2　下の数直線に示された範囲を式で表せ。

①

②

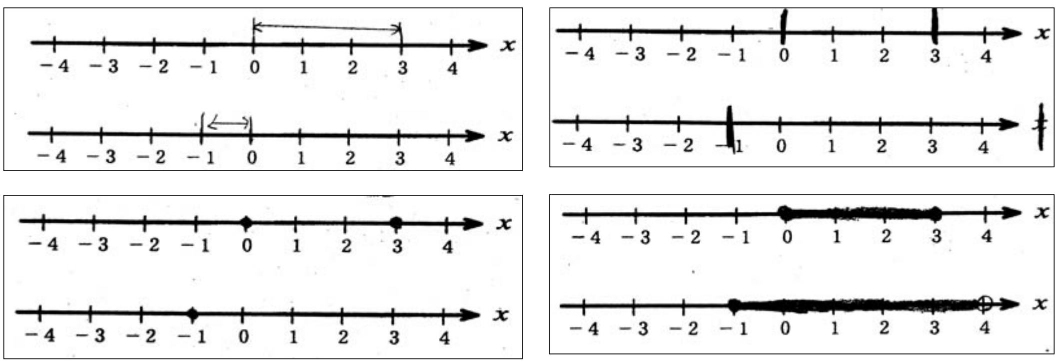


①正答率 85.5%
②正答率 59.8%

式で表現された範囲を数直線上に図示できるかどうか（問題１）、また、数直線上に図示された範囲を式で表現することができるかどうか（問題２）を確認した。

その結果、下図のように、様々な表現方法の解答が見られた。このことから、数直線上に範囲を表現することについては、中学校で学んだ表現方法と、高等学校で学ぶ表現方法が異なることに留意して指導しなければならないことが分かる。また、問題２②では、「$-x<1$」という解答がいくつか見られた。このような表現に疑問をもてる感覚を身に付けさせることも必要である。

問題１の生徒の解答



また、両端が決まっている範囲（$a \leqq x \leqq b$）を数直線上に図示したり、式で表現したりする方

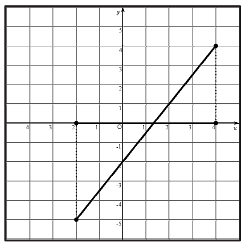
が、片端しか決まっていない範囲（$x > a$）を数直線上に図示したり、式で表現したりするよりも正答率が高い。このことは、中学校での変域の扱いにおいて「$a \leqq x \leqq b$」という形式の問題が多く、「$x > a$」という形式の問題が少ないことに起因していると考えられる。１次不等式が高等学校に移行したことによって、「$x > a$」という形式の範囲の認識が薄いことがうかがえる。

さらに、問題１②、問題２②の誤答を見ると、問題１②では、「$x < -1$」を図示した生徒が 11.5%、問題２②では、「$x > 1$」と表現した生徒が 16.7%あった。式で表現したときに、左辺に x があるときは、数直線上の範囲も−1 よりも左側であり、その逆も同様であると認識してしまっているようである。このことは、式で表現されたものと数直線上に表現されたものが関連付けられていないことから起こると考えられる。特に、「$x > -1$」の範囲を図示することができない生徒が半数いることから、範囲を言葉で表現すること、数直線上に表現すること、式で表現することを有機的に結び付けていく指導の工夫が大切となる。

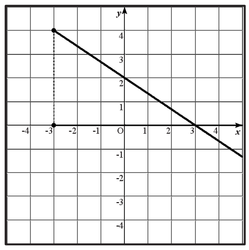
②関数の値域における範囲の把握について（問題３、４、５、６）

３　下の直線のグラフで表された関数の y の変域を求めよ。

①



②



①正答率 62.0%
②正答率 27.8%

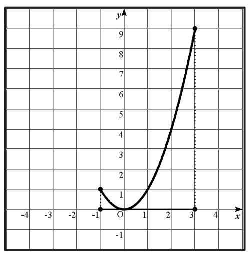
４　次の関数の y の変域を求めよ。

① $y = 2x$ （$-1 \leqq x \leqq 2$）
② $y = -2x$ （$1 \leqq x \leqq 3$）

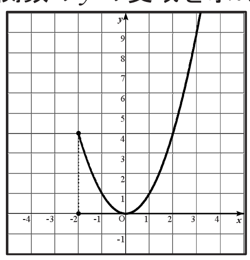
①正答率 68.8%
②正答率 59.4%

５　下の放物線のグラフで表された関数の y の変域を求めよ。

①



②



①正答率 58.5%
②正答率 30.8%

６　次の関数の y の変域を求めよ。

① $y = 2x^2$ （$-1 \leqq x \leqq 2$）
② $y = -x^2$ （$1 \leqq x \leqq 3$）

①正答率 29.1%
②正答率 40.5%

関数の値域については、１次関数、２次関数のそれぞれについて、グラフから値域を求める問題（問題３、５）と、式から値域を求める問題（問題４、６）を出題した。

１次関数よりも２次関数の値域を求める問題の方が正答率が低い。それぞれの問題を見ると、１次関数については、グラフから値域を求める問題よりも、式から値域を求める問題の方が正答率が高い。２次関数については、問題５①の正答率 58.5%に対して、問題６①の正答率 29.1%であることからも分かるとおり、式から値域を求める問題よりもグラフから値域を求める問題の方が正答率が高い。１次関数は式から形式的に値域を求めることができるが、２次関数について

はそのことを苦手としている状況がうかがえる。このことは、問題６①の正答率が 29.1%であったのに対して、問題６②の正答率が 40.5%であったことからもうかがえる。特に、問題６①では、「$2 \leqq y \leqq 8$」と解答している生徒が 34.6%であった。式を見ただけでは、２次関数の値の変化をイメージできない生徒が多いのではないかと考えられる。また、解答用紙の記入の状況からは、問題５でグラフから値域を考えているにもかかわらず、問題６ではグラフを用いて値域を考えている生徒が少なかった。

問題３、５から、１次関数、２次関数についても「$x > a$」という形式の問題についての正答率が低いことが分かる。このことは、問題１、２と同じように、中学校であまり扱っていないことに起因していると考えられる。

以上の結果から、範囲を言葉で表現することと、数直線上に表現することと、式で表現することとが的確に結びついていない生徒が多いのではないかと考える。また、グラフから値域を求めることができるにもかかわらず、グラフがないときには代数的に値域を求める生徒が多いことも分かった。これらのことを踏まえて、指導の際には、範囲について形式的な理解にとどまらず、範囲の概念を形成し、グラフを有効に使えるような指導の工夫が大切であると考えられる。

２　中学校数学科の先生方へのアンケートから見えてくる中学校数学科指導の状況

(1) アンケートの実施について

①対象、実施時期

対　　象：教職 10 年目研修（16 名)、教職５年目研修（５名)、初任者研修（14 名）を受講している中学校数学科教諭（合計 35 名）

実施時期：平成 18 年７月、８月、10 月の研修日

②アンケートのねらい

中学校数学科教諭を対象とする質問紙調査により、中学校での範囲、不等式についての指導の実際等を明らかにする。

(2) アンケート結果

①不等式の導入について（不等号の読み方）

１　不等号の読み方をどのように指導していますか。

「$x > 1$」はどのように読むように指導していますか？

「x は１より大きい」	「x 大なり１」	２通り	その他	合計
16(45.7%)	6 (17.1%)	12(34.3%)	1 (2.9%)	35

（数字は回答者数とその割合）

不等号の読み方については、学習指導要領でも特に言及されていない。アンケート結果からも、中学校では、教員によってまちまちであることが読み取れる。したがって、高等学校で１次不等式を指導する際には、最初の段階で読み方から丁寧に指導する必要がある。「x 大なり１」と読んだときに、その概念を理解できない生徒がいるということを教師は認識していなければならない。

②範囲の理解について（範囲の表現とその指導について）

２　生徒の理解の状況についてお答えください。Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄに○を付けてください。

（設問）①数直線上で表現された範囲を不等号を用いて表現することができる。
②不等号を用いた式で表現された範囲を数直線上に表現することができる。
③不等号を用いた式で表現された範囲を言葉で表現することができる。
④言葉で表現された範囲を不等号を用いた式で表現することができる。
Ａ：８割程度の生徒が理解している。　Ｂ：６割程度の生徒が理解している。
Ｃ：４割程度の生徒が理解している。　Ｄ：２割程度の生徒が理解している。

	A	B	C	D
①数直線→式	4 (11.8%)	16 (47.1%)	13 (38.2%)	1 (2.9%)
②式　　→数直線	3 (8.8%)	18 (52.9%)	11 (32.4%)	2 (5.9%)
③式　　→言葉	1 (2.9%)	17 (50.0%)	15 (44.1%)	1 (2.9%)
④言葉　→式	2 (5.9%)	10 (29.4%)	20 (58.8%)	2 (5.9%)

（数字は回答者数とその割合）

３　範囲を表す不等号（変域）を説明する場合、どのようなことに留意していますか。

（主な回答）
・範囲の概念を把握させる。
・不等号「＞」と「≧」の区別を明確にさせたい（含まれるか、含まれないか）。
・３つ以上の数を不等号を使って表すときに大きい順や小さい順に必ず並べてから書く。
・等号との違いを認識させる。
・大小関係を認識させる。（あるものと１を比べたらあるものの方が大きくなる）
・文字は考えられるものすべてを表すと説明する。
・具体的な数で考えさせる。
・図などを用いて、また、生活の中での例を用いて説明をする。
・考える範囲が限られることに留意する。
・x は常に左辺にして考えさせる。
・今まで「範囲」という概念に注意を払ったことがなかったので、今後注意したい。

範囲の表現（質問２）については、４割を超える教員が、生徒の理解は十分でないと感じている。個々に見ると、数直線上に表現された範囲を式で表現することや式で表現された範囲を数直線上に表現することは、おおむね把握していると感じている。また、式で表現された範囲を言葉で表現することは、それらよりもやや理解の程度が低いと感じている。さらに、言葉で表現された範囲を式で表現することは十分でないと感じていることが分かる。言葉で表現された範囲を把握することや、範囲を言葉で表現することなど、言葉に関する事項が予想していたよりも低かった。これは、指導の中で、範囲について考えさせる場面が少ないことや、それを発表させたり、生徒同士に意見交換をさせたりする場面が少ないからではないかと思われる。

指導の際に留意すること（質問３）については、自由記述で回答を求めた。回答では、等号が含まれる不等号と含まれない不等号について、意識して指導している教員が多かった。また、具体的な数や図を用いて考えさせたり、日常生活と関連付けたりするなど、工夫して指導している教員もいる。しかし、少数ではあるが、「x は常に左辺にして考えさせる。」など形式的に表現さ

せている教員もいる。今回の回答では、数直線上への表現方法に留意したり、言葉で表現させたりするといったものは見られなかった。

③変域の指導について

４　１次関数の x の変域に対する y の変域の求め方をどのように指導していますか。

（主な回答）

・グラフを利用して指導する。
・具体的な例を用いて理解させる。
・対応表を用いて指導する。
・最大値と最小値を考えて求める。

５　２乗に比例する関数の x の変域に対する y の変域の求め方をどのように指導していますか。

（主な回答）

・グラフを利用して指導する。
・原点を通る場合をしっかり頭に入れさせる必要がある。x の変域が０をまたぐ場合は必ず最大か最小は０になることをしっかりと頭に入れさせたい。
・対応表を用いて指導する。
・頂点が含まれる場合と含まれない場合に注意させ、代入して求めさせる。

変域の指導については、おおむねすべての教員がグラフを利用して指導していることが分かった。多くの教科書でも、導入の段階ではグラフを利用している。しかし、生徒に実施したテストの結果から見ると、グラフを利用して考察することが定着しているとは言えない。指導はしているが、問題演習の段階で、「x の変域の端点を代入して求めればいい」ことに気付いたのはよいが、変化の様子を考察することなく求めてしまっている生徒が多いのではないかと推測される。実際、中学校では、変域をさらに発展させる場面が少なく、生徒はそれで十分であると感じてしまうのであろう。

したがって、２次関数の最大値・最小値、２次不等式を指導する際には、単に値や解を求めさせるだけでなく、常に関数の値の変化をとらえさせながら、考察させる必要がある。その際、値の変化を範囲として適切にイメージし、表現できるようにさせなければならない。

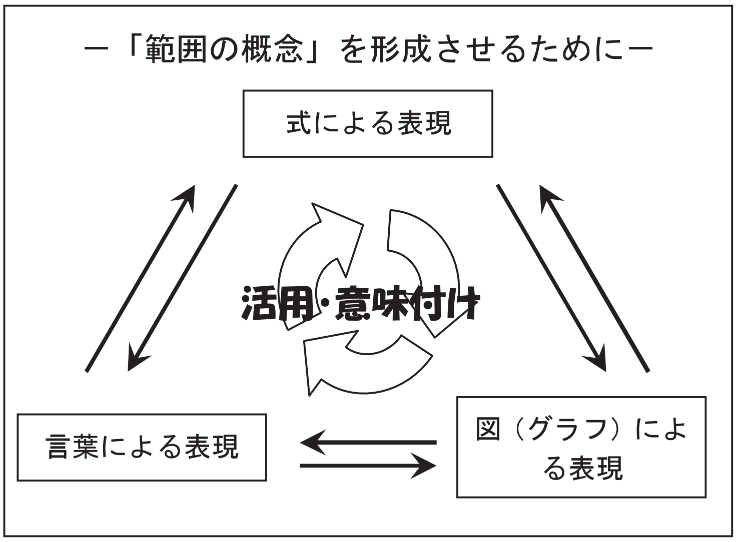
Ⅱ　「範囲の概念」の形成を促す授業の実践

従来、範囲の概念は、中学校までの算数・数学の学習で十分形成されていると考えられていた。しかし、現在ではすべての生徒に十分形成されているとは言い難い。ある生徒は、２次不等式の解を求めることができるにもかかわらず、「$x>1$」を図示することができなかった。その生徒は、不等式の解を求めることはできるが、解の意味を把握していないと思われる。しかし、そのような学習を繰り返していては、形式的解法は身に付くかもしれないが、「数学」を学習していることにはならない。数学を学ぶ意味を実感させるためには、問題の解法を身に付けさせることももちろん大切であるが、その解の意味や解法の意味を考えさせることが大切となる。

現行の学習指導要領では、「数学的活動」という言葉が１つのキーワードになっている。そこでは、次の３つのことが言われている。

・身近な事象を数学化すること
・数学化された課題を数学的に考察・処理し、その過程で見いだした数学的性質を論理的に系統化し、数学的知識（数学の新しい理論・定理等）を構成すること
・数学的知識を構成する過程を振り返ったり、身近な事象に戻って考えたり、他の具体的な事象の考察に活用したりすること

本研究においては、「範囲の概念」を形成させるために、言葉で表現すること、図（グラフ）で表現すること、そして、式で表現することを意識的に関連付ける数学的活動が有効であると考えた。生徒にとっては、式で表現することが最もなじみが深い。例えば、「範囲についての確認テスト」の問題１と問題２の正答率を見ても、明らかに式で表現することに慣れていることが分かる。しかし、生徒は言葉で表現することには不慣れである。その原因の１つとして、言葉による表現方法が未熟であったり、理解が十分でなかったりすることが考えられる。



そこで、指導に際しては、言葉で表現された範囲を、数直線上に表現したり式で表現したりすることや、数直線上に表現された範囲を式で表現したりすることなど、数学化の過程を重視した。また、式で表現された範囲を、言葉で表現したり数直線上に表現したりすることや、数直線上に表現された範囲を言葉で表現することで、範囲の意味を考えることができるようにした。このとき、できる限り生徒自身の言葉を利用して表現させることによって、数学的に考えることを、より一層身近なものとして捉えることができるように配慮した。さらに、それぞれの表現を関連付けた過程を振り返ることによって、範囲の概念の理解を深めさせることができる。そして、関数の定義域・値域や２次不等式の解法を考察する場面において、座標平面上で範囲を捉えるなど、発展的に考えさせることによって、数学的考察・処理の質を高めることができる。

本研究のような数学的活動に取り組むことによって、数学的に考察・処理する力、想像力及び直感力などを培い、数学への興味・関心を一層喚起することが期待できる。

以上のことを踏まえて、本研究では、系統的に指導することを、実践を通して考察した。各事例の内容は、次のとおりである。

事例１　**不等式と範囲**

「１元１次不等式」の導入として、「範囲」についての基礎的・基本的な内容を指導した。ここでは、数直線を用いて、数の大小関係から数の集合としての範囲へと概念を拡張させた。

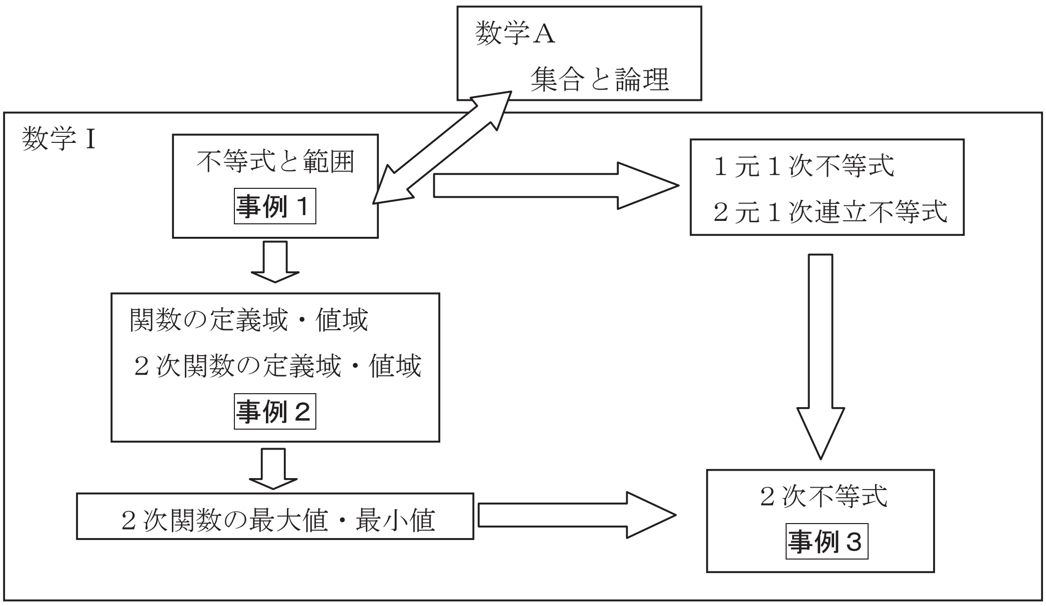
事例２　**２次関数の定義域・値域**

２次関数の定義域・値域について取り上げ、座標平面上における範囲について指導した。関数の定義域・値域については、関数の最大値・最小値の学習につながることはもちろんであるが、２次不等式の解法の導入にもつながることを意識した。

事例３　**２次不等式**

２次不等式の指導では、関数の定義域・値域についての学習をもとに、関数の値の変化として２次不等式を捉えるとともに、座標平面上のどの部分に２次不等式の解が範囲として表されるかを考察した。

数学Ⅰ、数学Ａにおける範囲の概念の形成に関わる系統図



本研究では取り上げなかったが、数学Ⅰと数学Ａを同時に履修させている場合には、数学Ａの「集合と論理」において、集合の概念を明確にさせるとともに、範囲についても扱い、学習の結び付きを深めさせることができる。また、数学Ⅱ、数学Ｂ、数学Ⅲ、数学Ｃと学習を進める生徒については、不等式の表す領域、三角関数、指数・対数関数、微分・積分、空間座標などの指導を工夫することによって、範囲の概念がさらに拡張され、理解を深めさせることができると考える。

事例１	「不等式と範囲」の指導

１．事例の概要

「範囲についての確認テスト（事前)」の結果を参考に、中学校での学習内容を踏まえて次のように指導を展開した。

導入では、数の大小関係を数直線上で確認し、それを不等号を用いて表現させることにした。その際、「$-2<0$」と「$0>-2$」の表現の違いにも言及した。このことは、「$x>1$」と「$1<x$」の表現の違いが不明確な生徒に、その違いを把握させるためである。次に、数直線上において、具体的な数をもとにして集合としての範囲の認識を深めさせた。その際、中学校での学習内容を踏まえ、数直線上における「範囲」の表現方法や、不等号の読み方にも触れた。指導の中心となる課題は、「範囲」を言葉で表現すること、数直線上に表現すること、不等式で表現することの３つを関連付けることである。これによって、生徒自身の中で「範囲」がイメージされ、自由に表現できるようになると考えた。

指導の最後に、確認テストを実施し、生徒の理解の状況を確認した。確認テストの問題は、「範囲についての確認テスト（事前)」の問題と同じものとして、指導後の変化が読み取れるようにした。

２．指導の展開

(1) 単元「不等式」のねらい・評価規準、学習計画・評価計画

①単元のねらい・評価規準

単元のねらい

不等式の解の意味について扱い、不等式が大小関係についての条件を式に表したものであり、この条件を満たす変数の値の集合が不等式の解であることを理解させる。

単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
Ⓐ1 数量の関係を不等式で表すことのよさをとらえようとする。 Ⓐ2 具体的な事象の考察に１次不等式を活用しようとする。	Ⓑ1 不等号の性質を等号の性質と対比してとらえることができる。 Ⓑ2 １次不等式の解について、数直線と対比したり、いろいろな数値を代入したりして考察することができる。 Ⓑ3 不等式の性質をもとにして、１次不等式の解き方を考察することができる。	**Ⓒ1 範囲を言葉、数直線、式で表現することができる。** Ⓒ2 数量の関係を１次不等式で表現することができる。 Ⓒ3 不等式の性質をもとにして、１次不等式を解くことができる。 Ⓒ4 １次不等式の解を数直線上に表現することができる。	**Ⓓ1 範囲の言葉、数直線、式による表現を関連付けて理解している。** **Ⓓ2 不等式の中に含まれている文字の意味を理解している。** Ⓓ3 不等式の性質を理解している。 Ⓓ4 １次不等式とその解の意味を理解し、解を求めるための基礎的な知識を身に付けている。

②学習計画・評価計画

時　間	学　習　活　動	評価規準	評価方法
第１時間 **(実践例の授業)**	**＜範囲の把握＞** ・具体的な数を用いて数の大小関係を数直線上で考察し、言葉や不等式を用いて表現する。 ・言葉、数直線、不等式を用いて範囲を表現する。	Ⓒ1、Ⓓ1、Ⓓ2	ワークシート、小テストにより理解の状況を把握する。
第２時間	**＜不等式の性質＞** ・具体的な数値を用いたり、方程式の性質と対比したりして不等式の性質を考察する。	Ⓑ1、Ⓓ3	ワークシート、机間指導から考察の状況を把握する。

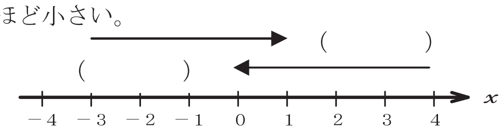
時　間	学　習　活　動	評価規準	評価方法
第３時間	＜１次不等式の解法＞ ・１次不等式にいろいろな数値を代入することによって、不等式の解の意味を考察する。 ・不等式の性質をもとにして、１次不等式の解法を考察するとともに、その解を数直線上に表す。	Ⓑ2、Ⓑ3、Ⓒ3 Ⓒ4、Ⓓ4	小テスト、机間指導、発言の様子から取組の状況を把握する。
第４時間	＜１次不等式を活用した具体的な事象の考察＞ ・具体的な事象について、１次不等式を活用して解決し、その解の意味を吟味する。また、１次不等式を活用して解決できる問題を作成する。	Ⓐ1、Ⓐ2、Ⓒ2	応用課題「問題作り」をレポートとして提出させ、取組の状況を把握する。

(2) 授業のねらいと評価方法

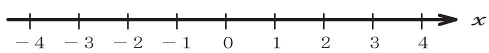
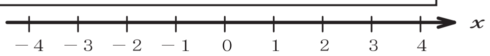
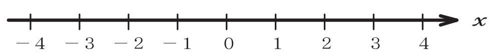
本授業のねらいは、「範囲を言葉で表現すること、数直線上に表現すること、不等式で表現することを関連付けて理解することができる。」ことにある。また、評価については、ワークシートの記述内容を確認するとともに、小テストを実施して理解の状況を把握する。

(3) 授業展開

<table>
<tr><th>指導内容</th><th>学習活動（課題・発問・活動等）</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td>・数の大小関係</td><td>
○数直線上での数の大小関係の考察
数の大小関係の式、言葉による表現

課題１（数の大小関係１）
１　数直線上では、（　　）にある数ほど大きく、（　　）にある数ほど小さい。

２　不等号を用いて表現せよ。
(1)　－２は０より小さい…（　　　　　　）
(2)　３は２より大きい　…（　　　　　　）

・不等号の読み方の確認
「－２＜０」…－２小なり０
－２は０より小さい
「３＞２」　…３大なり２
３は２より大きい

課題２（数の大小関係２）
次の空欄に、不等号＜または＞を入れよ。また、大小関係を言葉で表現せよ。
１　１□３

２　－２□－３

３　□に適当な数を入れ、大小関係を言葉で表現せよ。
□＜□

</td><td>
・数直線上の点は右にあるほど大きく、左にあるほど小さいことを確認する。

・不等式での表現では、主語となっている数を左辺にすることが予想されるが、小さい数を左辺とすることもあることに触れる。

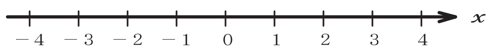
・整数以外の数を考えた生徒がいた場合は、発表させる。
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>指導内容</th><th>学習活動（課題・発問・活動等）</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr>
<td>・範囲の把握</td>
<td>

○範囲の数直線上での考察

<table><tr><td>

課題３（範囲１）



1　数直線上で、１より左側にある数を挙げよ。
（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

2　数直線上で、１より右側にある数を挙げよ。
（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

</td></tr></table>

<table><tr><td>１より左側にある数は他にどんな数があるだろうか。
また、言葉で表現するとどのように表現することができるだろうか。</td></tr></table>

【予想される生徒の反応】

・−5、−10、−100、0.9、0.5、…。

・１より小さい数。１以下の数。１未満の数。

</td>
<td>・生徒の発表に応じて、数直線上の整数以外の整数、または、小数、分数があることにも気付かせる。</td>
</tr>
<tr>
<td>・範囲の言葉、式、数直線による表現</td>
<td>

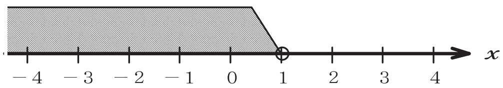
○範囲の不等式による表現、数直線上の表現

・不等式による表現

１より小さい数（数直線上で１より左側にある数）を x とすると不等号を用いて「 $x<1$ 」と表現する。

・数直線上の表現

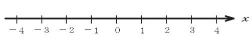
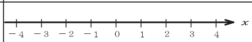
数直線上では、下のように表現する。



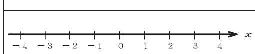
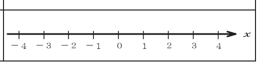
<table><tr><td>

課題４（範囲２）

1　１より左側、右側にある数をそれぞれ言葉と不等式で表現せよ。また、数直線上に表現せよ。

<table>
<tr><td>１より左側にある数</td><td></td><td>１より右側にある数</td></tr>
<tr><td></td><td>言　葉</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>不等式</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>数直線</td><td></td></tr>
</table>

2　１を含んで１より左側、右側にある数をそれぞれ言葉と不等式で表現せよ。また、数直線上に表現せよ。

<table>
<tr><td>１を含んで１より左側にある数</td><td></td><td>１を含んで１より右側にある数</td></tr>
<tr><td></td><td>言　葉</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>不等式</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>数直線</td><td></td></tr>
</table>

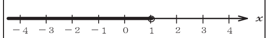
</td></tr></table>

・「より大きい」、「以上」、「より小さい」、「以下」、「未満」という範囲を表す言葉とその表現方法の確認

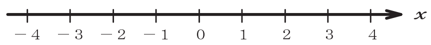
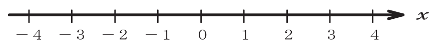
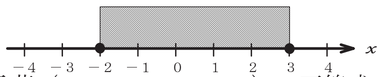
</td>
<td>

・「 $x<1$ 」も「 $1>x$ 」も同じであることを確認する。

・中学校の教科書では、下のように数直線上に示している。



</td>
</tr>
</table>

指導内容	学習活動（課題・発問・活動等）	指導上の留意点
・本時のまとめ	**課題５（範囲３）** 1　不等式 $x>2$ の表す範囲を、数直線上に表現せよ。また、言葉で表現せよ。  （　　　　　　　　　　　　　） 2　「x は２以下である」という範囲を、数直線上に表現せよ。また、不等式で表現せよ。  （　　　　　　　　　　　　　） 3　下の数直線上に表された範囲を言葉と不等式で表現せよ。  言葉（　　　　　　　　　）　不等式（　　　　　　　　） ・課題５を用いた本時の学習内容の確認。宿題の確認、次時の予告。	

(4) ワークシート

数学ワークシート　範囲と不等式

〜数や量の大小関係を言葉、数直線、不等式を使って表してみよう〜

課題１（数の大小関係１）

1　数直線上では、(　　)にある数ほど大きく、(　　)にある数ほど小さい。

(　　　　)　(　　　　)

−4　−3　−2　−1　0　1　2　3　4　x

2　不等号を用いて表現せよ。

(1)　−２は０より小さい…（　　　　　　　　）

(2)　３は２より大きい　…（　　　　　　　　）

課題２（数の大小関係２）

次の空欄に、不等号＜または＞を入れよ。また、大小関係を言葉で表現せよ。

1　１□３

−4　−3　−2　−1　0　1　2　3　4　x

2　−２□−３

−4　−3　−2　−1　0　1　2　3　4　x

3　□に適当な数を入れ、大小関係を言葉で表現せよ。

□＜□

−4　−3　−2　−1　0　1　2　3　4　x

課題３（範囲１）

−4　−3　−2　−1　0　1　2　3　4　x

1　数直線上で、１より左側にある数を挙げよ。

（　　　　　　　　　　　　　　）

2　数直線上で、１より右側にある数を挙げよ。

（　　　　　　　　　　　　　　）

○範囲の不等式による表現

・不等式による表現（不等号を用いて）

・数直線上の表現

−4　−3　−2　−1　0　1　2　3　4　x

課題４（範囲２）

1　１より左側、右側にある数を、それぞれ言葉と不等式で表現せよ。また、数直線上に表現せよ。

１より左側にある数		１より右側にある数
	言　葉	
	不等式	
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 x	数直線	−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 x

2　１を含んで１より左側、右側にある数をそれぞれ言葉と不等式で表現せよ。また、数直線上に表現せよ。

１を含んで１より左側にある数		１を含んで１より右側にある数
	言　葉	
	不等式	
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 x	数直線	−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 x

課題５（範囲３）

1　不等式 $x>2$ の表す範囲を、数直線上に表現せよ。また、言葉で表現せよ。

−4　−3　−2　−1　0　1　2　3　4　x

（　　　　　　　　　　　　）

2　「x は２以下である」という範囲を、数直線上に表現せよ。また、不等式で表現せよ。

−4　−3　−2　−1　0　1　2　3　4　x

（　　　　　　　　　　　　）

3　下の数直線上に表された範囲を、言葉と不等式で表現せよ。

−4　−3　−2　−1　0　1　2　3　4　x

言葉（　　　　　　　　）　不等式（　　　　　　　）

３．評価

指導の最後に小テストを実施するとともに、誤答の生徒に聞き取り調査を実施し、理解の状況の把握に努めた。

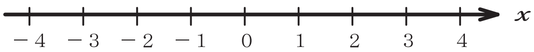
(1) 小テストの問題、予想される解答

①小テストの問題

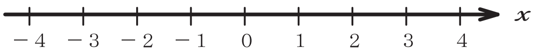
確認テスト（不等式の表す範囲）

問題１　次の範囲を右の数直線上に図示せよ。

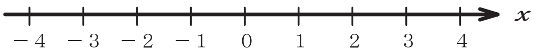
(1) $x<3$



(2) $0\leqq x\leqq 3$

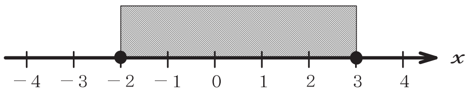


(3) $x>-1$

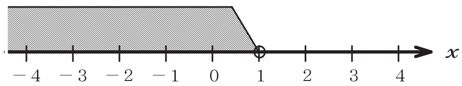


問題２　次の数直線上に示された範囲を不等式で表現せよ。

(1)



(2)

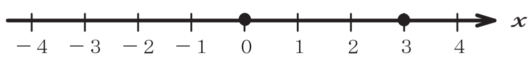


＊小テストの問題は、問題１(1)を除いて、事前に行った「範囲についての確認テスト」の問題と同じものとした。授業後に、理解の状況がどの程度変化したかを確認する。

②予想される解答

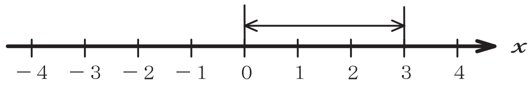
事前に行った「範囲についての確認テスト（事前)」の正答率は、問題１(2)は 55.3%、(3)は 25.0%、問題２(1)は 76.3%、(2)は 40.8%であった。その際に、問題１では、以下のような誤答が見られた。

(2)では、「



」

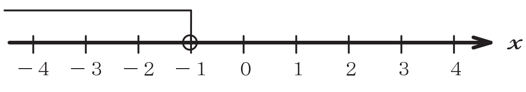
「



」

のように、０以上３以下であることは把握しているが、表現方法が未熟であった解答が、38.2%あった。

(3)では、「



」

のように、−1 より小さい範囲を図示したものが 40.8%あった。

また、問題２(1)では、「$-2\leqq 0\leqq 3$」、[$-2<x<3$]、「$-2<3$」といった解答が数は多くないが

見られた。問題２(2)では、「x＞1」など、１より大きいと考えた解答が 42.1%あった。

授業の中では、範囲の言葉、数直線、式による表現を関連付けるとともに、表現方法も確認するので、このような生徒は大きく減少すると期待できる。

(2) 小テストの結果（対象生徒 76 名）

①正答率（カッコ内は事前テストとの差）

問題１　(1) 96.1%　　(2) 90.8%（＋35.5）　(3) 88.2%（＋63.2）

問題２　(1) 84.2%（＋7.9）　(2) 81.6%（＋40.8）

②主な誤答

問題１(2)では、表現方法がまだまだ十分でない生徒が７名（9.2%）見られたが、範囲の把握については特に問題はないと考えられる。また、問題１(3)では、事前テストのように、−1 より小さい範囲を図示した生徒が８名（10.5%）いた。

問題２(1)において、間違えた生徒（12 名）のうちの半数は、「x は−2 以上で 3 以下」というように、言葉で表現した生徒であった。問題２(2)では、同じように言葉で表現してしまった生徒もいたが、事前テストと同様に、「x＞1」と解答した生徒が７名（9.2%）いた。これらの生徒は、問題１(3)の誤答の生徒に含まれる。これらの生徒については、後日、補習を行い再度理解を促した。

③結果の考察

事前テストの結果と小テストの結果を比較すると、多くの生徒が範囲についての理解を深めつつあることが分かる。特に、「x＞1」と「1＜x」が同じであることは、範囲を言葉で表現したり、数直線上に表現したりすることを通して実感できたようである。本単元を学習する前は、言葉での表現、数直線上での表現、不等式での表現が関連付けられず、別々のものとしてイメージしていたようである。また、表現方法についても、授業の中で確認することによって明確になり、自信をもって表現することができるようになった。中学校での学習内容が減ったことを十分考慮し、丁寧な指導が大切であることが実感できた。また、範囲については、１次不等式、関数の定義域・値域、最大値・最小値、２次不等式等でも扱うことになる。そして、数直線上で考えていたものを、座標平面上で考えるなど、拡張されていくことになる。それぞれの場面で、今回の学習を振り返らせ、範囲の概念をさらに形成させていきたい。

事例２	「２次関数の定義域・値域」の指導

１．事例の概要

関数の定義域・値域については、教科書の扱いは軽い。しかし、「範囲についての確認テスト（事前）」からも分かるとおり、生徒の理解は十分でない。また、数直線上で考えていた範囲を座標平面上で考えることに拡張することによって、範囲についての理解をさらに深めさせたいと考え、関数の定義域・値域について扱うことにした。

授業で値域を考えさせる際には、グラフ上で考察することが有効であることを実感させるとともに、値域をグラフ上に表現させ、それを言葉や不等式で表現させる。その際、コンピュータを用いることで、関数のグラフを動的なものとして捉えさせ、グラフが関数の値の変化を表現しているものであるとの認識を深めさせる。このことは、関数の最大値・最小値を考察することにつながるとともに、不等式にもつながることになる。また、値域の応用として、値域から定義域を考察することに取り組ませる。このことは、直接、２次不等式の解法に結びつき、２次不等式への学習がスムーズに移行されることと考える。

指導の最後に、確認テストを行い、生徒の理解の状況を確認する。確認テストでは、実際にグラフをかかせ、そのグラフ上に値域を表現させることによって、範囲を的確に把握しているか、また、それを不等式で正しく表現できるかどうか確認した。

２．指導の展開

(1) 単元「２次関数の値の変化」のねらい・評価規準、学習計画・評価計画

①単元のねらい・評価規準

単元のねらい

２次関数の値の変化を考察し、関数の定義域・値域について把握したり、関数の最大値・最小値を求めたりすることができるようにする。また、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できるようにし、それらを具体的な事象の考察に活用できるようにする。

単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
Ⓐ1 ２次関数の値の増加・減少について、グラフを用いて捉えようとする。 Ⓐ2 具体的な事象の考察に２次関数の最大・最小の考えを活用しようとする。	Ⓑ1 ２次関数の値の増加・減少について、グラフを用いて考察することができる。 Ⓑ2 具体的な事象の中に、２次関数の関係を見出し、式で表現することで、最大・最小について考察することができる。	**Ⓒ1 ２次関数の値域をグラフを用いて求めることができる。** Ⓒ2 定義域が実数全体である２次関数の最大値・最小値をグラフを用いて求めることができる。 Ⓒ3 定義域が制限された２次関数の最大値・最小値を求めることができる。 Ⓒ4 具体的な事象の中に２次関数の関係を見出し、式で表現することができる。	**Ⓓ1 座標平面上で定義域・値域の概念を理解している。** Ⓓ2 ２次関数の最大値・最小値の意味を理解している。

②学習計画・評価計画

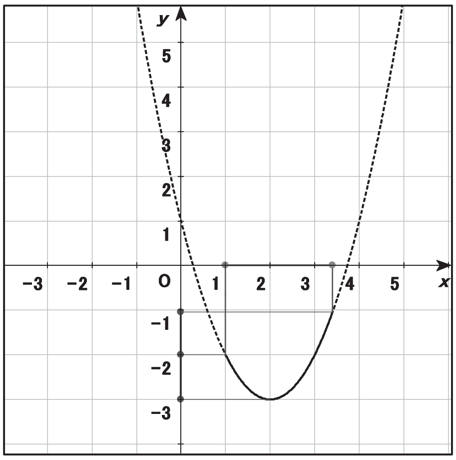
時　間	学　習　活　動	評価規準とのかかわり	評価方法
第１時間 （実践例の授業）	**＜２次関数の定義域・値域＞** ・２次関数の定義域・値域を、範囲として捉えるとともに、関数の値の変化として理解する。 ・２次関数において、定義域から値域を求めたり、値域から定義域を考察したりすることによって、定義域・値域を理解する。	Ⓒ1、Ⓓ1	ワークシート、小テストから理解の状況を把握する。
第２時間	**＜定義域が実数全体である２次関数の最大値・最小値＞** ・最大値・最小値を範囲（値域）の中の値として考察することによって、関数の値の変化としてグラフを用いて捉える。 ・具体的な２次関数の最大値・最小値を求める。	Ⓐ1、Ⓑ1、Ⓒ2	ワークシート、授業中の机間指導、発言の様子から考察の状況を把握する。
第３時間	**＜定義域が制限された２次関数の最大値・最小値＞** ・定義域が制限された２次関数の最大値・最小値をグラフを用いて求める。 ・定義域が制限された２次関数の最大値・最小値を求めることを通して、最大値・最小値の意味を理解する。	Ⓑ1、Ⓒ3、Ⓓ2	授業中の机間指導や小テストから理解の状況を把握する。
第４時間	**＜２次関数の最大・最小を用いた具体的な事象の考察＞** ・２次関数の定義域・値域の考え方や最大値・最小値の考え方を利用して、具体的な事象の解決を図る。 ・２次関数の定義域・値域の考え方や最大値・最小値の考え方を利用して、解決できる問題を作成する。	Ⓐ2、Ⓑ2、Ⓒ4	応用課題「問題作り」をレポートとして提出させ、取組の状況を把握する。

(2)　授業のねらいと評価方法

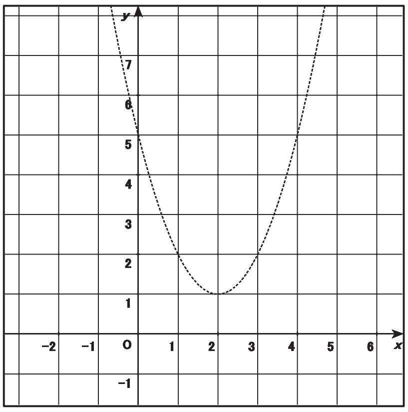
本授業のねらいは、「座標平面上で関数の定義域・値域の概念を理解し、２次関数の値域をグラフを用いて求めることができる」ことにある。また、評価については、ワークシートの記述内容を確認するとともに、小テストを実施して理解の状況を把握する。

(3)　授業展開

指導内容	学習活動（課題・発問・活動等）	指導上の留意点
・定義域・値域の確認	○用語（「定義域」、「値域」）の意味の確認 **課題１（１次関数の定義域・値域）** 関数 $y=2x$（$-1\leqq x\leqq 2$）の値域を求めよ。	
・２次関数の値域	○定義域が制限された２次関数の値域の考察 **課題２（２次関数の定義域・値域）** １　関数 $y=(x-2)^2-3$（$2\leqq x\leqq 4$）の値域を求めよ。 ２　関数 $y=(x-2)^2-3$（$1\leqq x\leqq 4$）の値域を求めよ。 【予想される生徒の反応】 １は　$-3\leqq y\leqq 1$ ２は　$-3\leqq y\leqq 1$　または　$-2\leqq y\leqq 1$ ２で、$x=1$ のとき $y=-2$、$x=4$ のとき $y=1$。したがって、求める値域は「$-2\leqq y\leqq 1$」であると考えた人がいます。さて、この考え方は正しいだろうか？もし、間違っているとしたら、どこに誤りがあるだろうか。	

<table>
<tr><th>指導内容</th><th>学習活動（課題・発問・活動等）</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td></td><td>【予想される生徒の反応】
・定義域の両端の値を代入しただけでは、求めることができない。
・グラフをかいてみると分かるが、y が一番小さな値をとるのは頂点である。</td><td>・「グラフをかく」という意見が出された時点で、課題２の１と２の違いを発表させ、定義域内の頂点の有無に気付かせる。</td></tr>
<tr><td></td><td>・２次関数の値域の考え方（コンピュータによる確認）

値域を求める際には、グラフをかくことによって、関数の値の変化を読み取る必要がある。</td><td>・x の値に対する y の値を確認しながら、関数の値の変化を確認する。

・x の範囲から y の範囲を意識させる。</td></tr>
<tr><td></td><td>課題３（２次関数の定義域・値域の確認）
1　関数 $y=-(x+1)^2+5$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$ の値域を求めよ。
2　関数 $y=-(x+1)^2+5$ $(x>2)$ の値域を求めよ。
（値域の求め方）
・定義域の端点の座標を求め、グラフを点線でかく。
・不等式で表された定義域を x 軸上に表す。
・定義域内のグラフを実線でかく。
・値域を y 軸上に表す。
・y 軸上に表された値域を不等式で表す。</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>課題３の１と２の違いは何だろうか。
【予想される生徒の反応】
・定義域内に頂点が含まれているかいないか。
・１は端点だけではなく頂点も考えなければならない。
・値域を考える時に２は頂点を考えなくてもよい。</td><td>・意見を出させる中で、x の変化が単調であるにもかかわらず、y の変化が単調である時もあれば、単調でない時もあることに気付かせ、グラフをかくことの重要性を認識させる。</td></tr>
</table>

指導内容	学習活動（課題・発問・活動等）	指導上の留意点
・２次関数の値域の応用	○２次関数の値域から定義域への考察 **課題４（２次関数の定義域・値域の考察）** 右のグラフは２次関数のグラフである。次の問いに答えよ。 １　$y \leqq 5$ となる y の範囲を y 軸上に図示せよ。 ２　グラフにおいて、$y \leqq 5$ となる部分を実線でかけ。 ３　$y \leqq 5$ となる x の範囲を x 軸上に図示し、その範囲を求めよ。 	・２次不等式につながる課題であるが、ここでは、値域についての考察であることに留める。 ・関数関係ではないが､x の値に対する y の値への関係を意識させながら、考察させる。
・本時のまとめ	・課題４を用いた本時の学習内容の確認、宿題（課題５）の確認、次時の予告、小テスト。 **課題５（２次関数の定義域・値域）** １　関数 $y=x^2-6x+11$（$1 \leqq x \leqq 5$）の値域を求めよ。 ２　関数 $y=x^2-2x-2$ において、$y \geqq 1$ となる x の範囲を求めよ。	

(4) ワークシート

数学ワークシート　定義域・値域

～関数の定義域・値域について考えてみよう～

課題１（１次関数の定義域・値域）

関数 $y=2x$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の値域を求めよ。

定義域…　　　　**値域…**

課題２（２次関数の定義域・値域）

1　関数 $y=(x-2)^2-3$ $(2\leqq x\leqq 4)$ の値域を求めよ。

2　関数 $y=(x-2)^2-3$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の値域を求めよ。

課題３（２次関数の定義域・値域の確認）

1　関数 $y=-(x+1)^2+5$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ の値域を求めよ。

2　関数 $y=-(x+1)^2+5$ $(x>2)$ の値域を求めよ。

（値域の求め方）

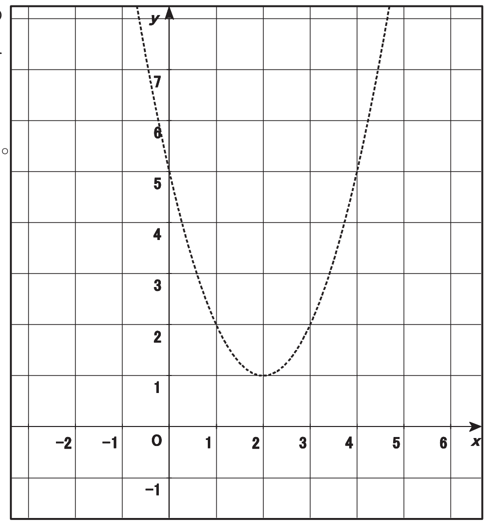
課題４（２次関数の定義域・値域の考察）

右のグラフは２次関数のグラフである。次の問いに答えよ。

1　$y\leqq 5$ となる y の範囲を y 軸上に図示せよ。

2　グラフにおいて、$y\leqq 5$ となる部分を実線でかけ。

3　$y\leqq 5$ となる x の範囲を x 軸上に図示し、その範囲を求めよ。



課題５（２次関数の定義域・値域）

1　関数 $y=x^2-6x+11$ $(1\leqq x\leqq 5)$ の値域を求めよ。

2　関数 $y=x^2-2x-2$ において、$y\geqq 1$ となる x の範囲を求めよ。

３．評価

指導の最後に小テストを実施するとともに、誤答の生徒に聞き取り調査を実施し、理解の状況の把握に努めた。

(1) 小テストの問題、予想される解答

①小テストの問題

確認テスト（定義域と値域）
問題１　次の関数のグラフをかき、値域を求めよ。
(1) $y=2x$ $(-1\leqq x\leqq 2)$
(2) $y=-2x$ $(1\leqq x\leqq 3)$
(3) $y=(x-3)^2+2$ $(2\leqq x\leqq 5)$
(4) $y=-(x+2)^2+5$ $(-1\leqq x\leqq 1)$
問題２　次の関数において、与えられた y の範囲に対応する x の範囲を求めよ。
(1) $y=(x+1)^2-2$　$y\leqq 7$
(2) $y=x^2+2x-3$　$y>0$

＊テスト用紙には、各問いにグラフ用紙を載せた。

また、問題１(1)から(2)については、事前に行った「範囲についての確認テスト」の問題と同じものとした。授業後に理解の状況がどの程度変化したかを確認する。

②予想される解答

授業中の生徒の様子から、以下のような誤答を予想し、これに基づいて生徒の解答を分析し、今後の授業に活用することとした。

問題１	ア	グラフから定義域、値域を把握しようとしない。
	イ	与えられた定義域が把握できない。
	ウ	定義域に対応する値域がグラフ上で把握できない。
	エ	値域を不等式で表現することができない。
問題２	オ	与えられた y の範囲が把握できない。
	カ	y の範囲に対応する x の範囲が把握できない。
	キ	x の範囲を不等式で表現することができない。

また、事前に行ったテストの正答率は、問題１(1) 78.9%、(2) 68.4%であり、２次関数の値域については、「$y=2x^2$ $(-1\leqq x\leqq 2)$」では 36.8%、「$y=-x^2$ $(1\leqq x\leqq 3)$」では 44.7%であった。

(2) 小テストの結果（対象生徒：40 名）

①正答率

問題１	(1) 97.4%（＋18.5）	(2) 89.5%（＋21.1）
	(3) 72.5%	(4) 80.0%
問題２	(1) 57.5%	(2) 52.5%

②結果の考察

問題１では、すべての生徒がグラフをかいて、定義域、値域を把握しようとしていた。事前テストでは、式を与えられた時にグラフをかいて考えようとする生徒が半数程度しかいなかったことを考えると、グラフの有用性が実感できたようである。誤答は、「値域を不等式で表現することができない（問題１　エ)」ものがほとんどであり、グラフ上で値域を把握できるものの、それを表現することができない生徒がまだいることが分かった。１次関数については、解答状況から大多数の生徒が理解していることが読み取れた。等号を忘れた解答、x と y を書き間違えた解答がいくつかあったが、テスト後の聞き取り調査では十分理解していると判断できた。また、２次関数については、事前に行ったテストにおいて、正答率 36.8%、44.7%と大変低かったが、今回の小テストでは妥当な結果を得ることができた。しかし、依然として理解が十分でない生徒もいる。これらの生徒については、後日、補習の機会を設けることにした。今後の指導の中で、関数の値の変化としてグラフを捉えることができるように、再度注意を促したい。

問題２における、誤答としては、グラフはかけているが、不等式で表現できないものが目立った。グラフ上では、求める x の範囲を「$-4 \leqq x \leqq 2$」や「$x < -3$ または $1 < x$」を表現しているにもかかわらず、「$x \leqq -4$、$2 \leqq x$」や「$-3 < x < 1$」といった誤答が多かった。特に、「または」という概念の定着が十分ではなかった。２次不等式を学習する際に、値域について再度確認するとともに、不等式の解の範囲が２か所になる場合と１か所になる場合の違いについて考えさせたい。

総じて、コンピュータでイメージをもてたため、グラフの有用性や、定義域・値域を関数の値の変化として捉えることができるようになったようである。ただし、グラフ上で範囲を把握しているにもかかわらず、それを表現できない生徒がまだいる。再度、授業で確認するとともに、「２次関数のグラフと方程式」、「２次不等式」、さらには、数学Ａの「集合と論理」など、範囲に関わる内容を扱う時には、範囲を言葉で、数直線上で、不等式で表現させることを意識させて、定着を図っていきたい。

事例３　「２次不等式」の指導

１．事例の概要

２次不等式の指導においては、$\boxed{\text{事例１}}$、$\boxed{\text{事例２}}$を踏まえて、座標平面上に表された範囲を数直線上で考えたり、言葉や不等式で表現したりすること通して、２次不等式の解法を理解させる。

導入では、代数的な解法が中心であった１元１次不等式を、関数の定義域と値域との関係をもとに座標平面上で考察させ、不等式とグラフとの関係を把握させる。その際、座標平面上で考えた１次不等式の解を、数直線上で表現させ、既習事項との結び付きを図った。同様にして、２次関数の定義域と値域との関係から２次不等式の解となる範囲を考察させた。考察させる際には、座標平面上に表された範囲を、言葉で表現させ、さらにそれを不等式で表現させることによって、範囲の表現方法を確認した。また、グラフ上で考えられる範囲（グラフ上の$y>0$である範囲、$y>0$であるxの範囲、$y>0$であるyの範囲）が、それぞれ何を意味しているか考察させることによって、不等式と関数の値の変化の関係の理解を深めさせ、２次不等式の解法に習熟させたいと考えた。

指導の最後に、確認テストを行い、理解の状況の把握に努めた。不等式を解かせることだけでなく、グラフ上に不等式の解を表現させることによって、解の範囲を的確に把握しているかどうか、それを表現することができるかどうか確認した。

２．指導の展開

(1) 単元「２次不等式」のねらい・評価規準、学習計画・評価計画

①単元のねらい・評価規準

単元のねらい

２次関数のグラフとx軸との位置関係から、２次不等式の解の意味を理解させ、２次不等式の解を求めることができるようにし、グラフを活用することのよさを認識させる。また、具体的な事象の中に、不等式が成り立つ関係があることを考察し、２次不等式を活用して、解決できるようにさせる。

単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
Ⓐ1２次不等式の解に関心をもち、２次関数のグラフを活用して、２次不等式を解こうとする。 Ⓐ2具体的な事象の考察に２次不等式を活用しようとする。	**Ⓑ1２次不等式の解と２次関数のグラフの関係を考察することができる。** Ⓑ2具体的な事象の中に不等式が成り立つ関係があることを考察することができる。	Ⓒ1２次関数のグラフを活用して、２次不等式の解を求めることができる。 Ⓒ2数量の関係を２次不等式で表すことができる。	Ⓓ1２次不等式の解の意味を２次関数のグラフとの関係から理解している。

②学習計画・評価計画

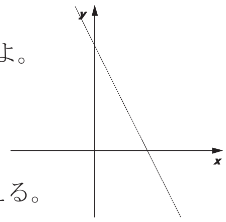
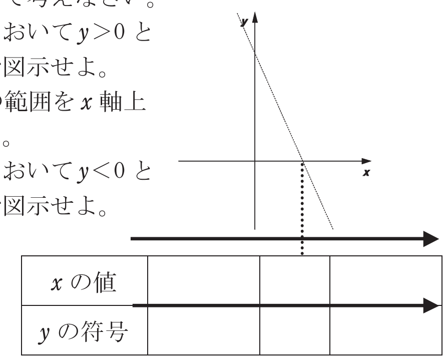
時　間	学　習　活　動	評価規準	評価方法
第１時間 **（実践例の授業）**	**<関数のグラフと不等式>** ・関数の定義域・値域の考察をもとに、１次関数のグラフと１次不等式の関係を把握し、１次不等式の解を座標平面上に表現する。 ・関数の定義域・値域の考察をもとに、２次関数のグラフと２次不等式の関係を把握し、２次不等式の解をグラフ、言葉、不等式で表現する。	Ⓐ1、Ⓑ1	ワークシート、発言の様子、小テストから考察の状況を把握する。

時　間	学　習　活　動	評価規準	評価方法
第２時間	＜２次不等式の解法１＞ ・２次関数のグラフが x 軸と異なる２点で交わるとき、そのグラフを活用して、２次不等式の解を求める。	Ⓒ1、Ⓓ1	ワークシート、机間指導から取組の状況を把握する。
第３時間	＜２次不等式の解法２＞ ・２次関数のグラフが x 軸と１点で接するとき、または、共有点をもたないときに、そのグラフを活用して、２次不等式の解を求める。	Ⓒ1、Ⓓ1	ワークシート、小テスト、机間指導から取組の状況を把握する。
第４時間	＜２次不等式を活用した具体的な事象の考察＞ ・具体的な事象について、２次不等式を活用して解決し、その解の意味を吟味する。また、２次不等式を活用して解決できる問題を作成する。	Ⓐ2、Ⓑ2、Ⓒ2	応用課題「問題作り」をレポートとして提出させ、取組の状況を把握する。

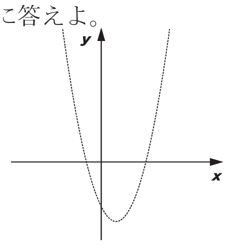
(2) 授業のねらいと評価方法

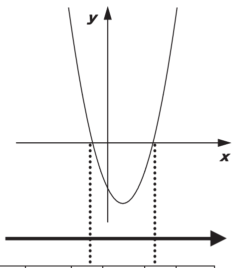
本授業のねらいは、「関数の定義域・値域の考察から、関数のグラフと不等式の関係を把握し、不等式の解をグラフ上に表現したり、言葉や不等式で表現したりすることができる」ことにある。また、評価については、ワークシートの記述内容や授業中の発言から考察の状況を確認するとともに、小テストを実施して理解の状況を把握する。

(3) 授業展開

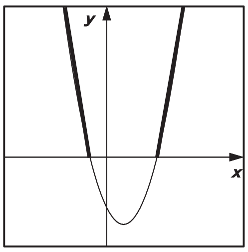
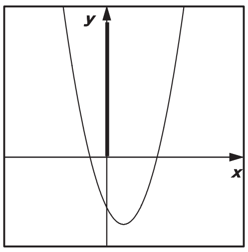
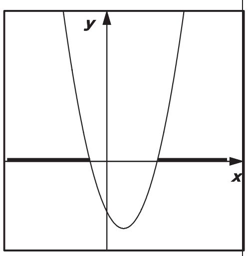
指導内容	学習活動（課題・発問・活動等）	指導上の留意点
・１次関数のグラフと１次不等式の関係	○１次関数の定義域・値域と値の変化と１次不等式の解のグラフ上での考察 **課題１（１次関数の定義域・値域、グラフ、１次不等式）** 関数 $y=-2x+5$ について次の問に答えよ。 １　定義域が $-1 \leqq x \leqq 3$ のとき値域を求めよ。  ２　関数 $y=-2x+5$ の y の値の符号を考える。 下のグラフを用いて考えなさい。 ①関数のグラフにおいて $y>0$ となる部分を赤で図示せよ。 ②$y>0$ となる x の範囲を x 軸上に太く図示せよ。 ③関数のグラフにおいて $y<0$ となる部分を青で図示せよ。  ３　関数 $y=-2x+5$ の値の符号について、２を参考にして、表に言葉でまとめよ。 ・１次関数の定義域・値域と１次不等式の関係の考察 $y>0$ である x の範囲は、結局、何になっているだろうか。 $y=-2x+5$ であるから、$y>0$ である x の範囲は、不等式 $-2x+5>0$ の解と同じである。	・範囲をグラフ上で確認するとともに、言葉で表す（事例１）。 ・座標平面から数直線上の範囲を考察することにより、既習事項との関連を図る。 ・定義域と値域との関係が不等式に関連していることに気付かせる。 ・不等式を代数的に解いた解と一致していることに気付かせる。

<table>
<tr><th>指導内容</th><th>学習活動（課題・発問・活動等）</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td></td><td>不等式$-2x+5>0$の解を、グラフの下の直線上に表してみよう。</td><td></td></tr>
<tr><td>・２次関数の定義域・値域と値の変化</td><td>○２次関数の定義域・値域と値の変化

課題２（２次関数の定義域・値域と値の変化）
２次関数$y=x^2-2x-3$について、次の問いに答えよ。
１　定義域が$0\leqq x\leqq 3$のとき値域を求めよ。

２　関数$y=x^2-2x-3$のyの値の符号を考える。
①関数のグラフにおいて$y>0$となる部分を赤で図示せよ。
②関数のグラフにおいて$y<0$となる部分を青で図示せよ。

３　関数$y=x^2-2x-3$の値の符号を表に言葉でまとめよ。

<table><tr><td>xの値</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>yの符号</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td>・１次関数と同様に考察させる。</td></tr>
<tr><td>・２次関数のグラフと２次不等式の関係</td><td>○２次不等式の解のグラフ上での考察

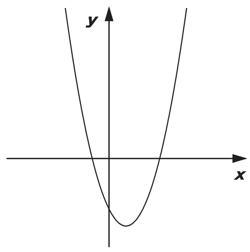
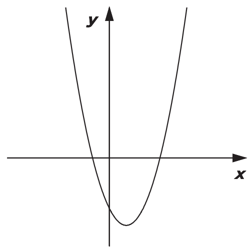
２次不等式$x^2-2x-3>0$の解を表しているのは、グラフ上では、どこになるだろうか。

【予想される生徒の反応】
①

②

③


①、②、③で示された部分はそれぞれ何を表しているだろうか。

①は関数$y=x^2-2x-3$のグラフにおいて、$y>0$である部分
②は$y>0$であるyの範囲
③は関数$y=x^2-2x-3$のグラフにおいて、$y>0$を満たすxの範囲</td><td>・不等式の解とは何かを確認する。

・それぞれが何を表しているかを生徒に発言させ、生徒の言葉でまとめていく。</td></tr>
</table>

指導内容	学習活動（課題・発問・活動等）	指導上の留意点
	→２次不等式 $x^2-2x-3>0$ の解は、関数 $y=x^2-2x-3$ のグラフにおいて、$y>0$ を満たす x の範囲、すなわち、③が２次不等式の解を表している。 **課題３（２次不等式とグラフとの関係）** １　２次不等式 $x^2-2x-3<0$ の解をグラフ上に表し、解を言葉と式で表せ。  言葉：＿＿＿＿＿＿＿＿ 式　：＿＿＿＿＿＿＿＿ ２　２次不等式 $x^2-2x-3\geqq 0$ の解をグラフ上に表し、解を言葉と式で表せ。  言葉：＿＿＿＿＿＿＿＿ 式　：＿＿＿＿＿＿＿＿	・範囲をグラフ上で確認するとともに、言葉、式で表現させる（事例１）。 ・「または」と「かつ」を確認する。
・本時のまとめ	・課題３を用いた本時の学習内容の確認、宿題（課題４）の確認、次時の予告、小テスト	

(4) ワークシート

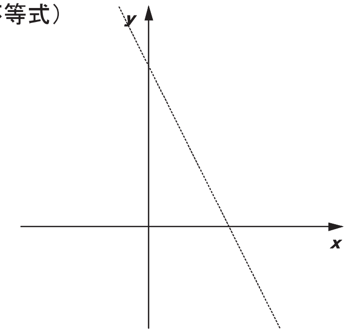
数学ワークシート　２次不等式

～２次不等式はどのように解けばいいんだろう～

課題１（１次関数の定義域・値域、グラフ、１次不等式）

関数$y=-2x+5$について次の問いに答えよ。

1　定義域が$-1\leqq x\leqq 3$のとき値域を求めよ。



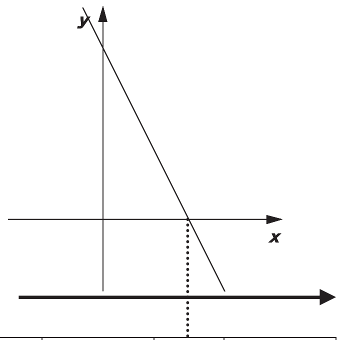
2　関数$y=-2x+5$のyの値の符号を考える。下のグラフを用いて考えなさい。

①関数のグラフにおいて$y>0$となる部分を赤で図示せよ。

②$y>0$となるxの範囲をx軸上に太く図示せよ。

③関数のグラフにおいて$y<0$となる部分を青で図示せよ。

3　関数$y=-2x+5$の値の符号について、２を参考にして、表に言葉でまとめよ。

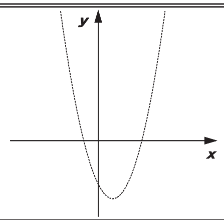


xの値			
yの符号			

課題２（２次関数の定義域・値域と値の変化）

２次関数$y=x^2-2x-3$について、次の問に答えよ。

1　定義域が$0\leqq x\leqq 3$のとき値域を求めよ。

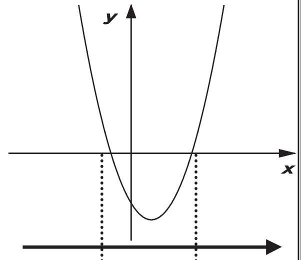


2　関数$y=x^2-2x-3$のyの値の符号を考える。

①関数のグラフにおいて$y>0$となる部分を赤で図示せよ。

②関数のグラフにおいて$y<0$となる部分を青で図示せよ。

3　関数$y=x^2-2x-3$の値の符号を表に言葉でまとめよ。



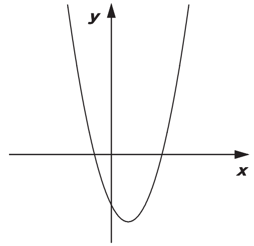
xの値					
yの符号					

課題３（２次不等式とグラフとの関係）

1　２次不等式$x^2-2x-3<0$の解をグラフ上に表し、解を言葉と式で表せ。

言葉：＿＿＿＿＿＿＿＿

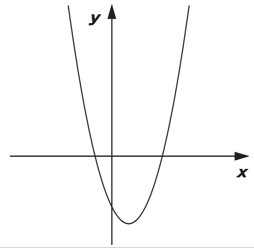
式　：＿＿＿＿＿＿＿＿



2　２次不等式$x^2-2x-3\geqq 0$の解をグラフ上に表し、解を言葉と式で表せ。

言葉：＿＿＿＿＿＿＿＿

式　：＿＿＿＿＿＿＿＿



３．評価

授業後に小テストを実施するとともに、誤答の生徒に聞き取り調査を実施し、理解の状況の把握に努めた。

(1) 小テストの問題、予想される解答

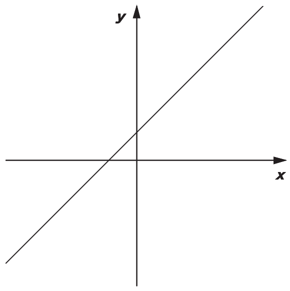
①小テストの問題

確認テスト（２次不等式）

問題１　右の図は、関数$y=x+1$のグラフである。次の問に答えよ。

(1) 関数のグラフにおいて$y<0$となる部分を赤で図示せよ。

(2) $y<0$となるxの範囲をx軸上に青で図示し、その範囲を式で答えよ。

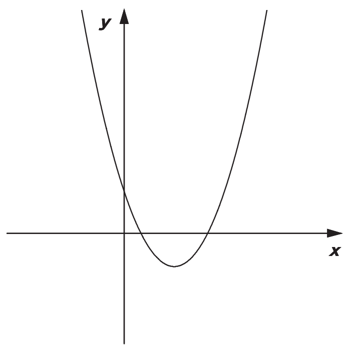


問題２　右の図は、関数$y=x^2-6x+5$のグラフである。次の問に答えよ。

(1) 関数のグラフにおいて$y>0$となる部分を赤で図示せよ。

(2) $y>0$となるxの範囲をx軸上に赤で図示し、その範囲を式で答えよ。

(3) ２次不等式$x^2-6x+5\leqq 0$の解をグラフ上に青で図示し、解を式で答えよ。



②予想される解答

「関数のグラフにおいて$y<0$となる部分」と「$y<0$となるx軸上のxの範囲」との区別が十分でないことから、グラフ上に範囲を図示することはできないが、範囲を式で答えることはできる生徒がいることが予想される。

また、生徒によっては、範囲の表現する力が十分養われていなく、図示することはできるが、式で答えることはできない生徒もいると思われる。特に、問題２(2)では図示することはできるが、それを式に表したときに「$x>1$、$5<x$」や「$1<x<5$」となってしまうような解答が予想される。また、等号が含まれる場合と等号が含まれない場合の区別がつかない生徒がいることも考えられる。

(2) 小テストの結果（対象生徒　39名）

①正答率

問題１　(1) 97.4%　(2) 92.3%

問題２　(1) 97.4%　(2) 79.5%　(3) 82.1%

②主な誤答

問題１(1)では、「$y>0$」である範囲を図示した生徒が１名いた。この生徒に確認したところ、

勘違いであることが分かり、すべての生徒が、グラフ上で不等式を考えることができていた（問題２(1)も同様)。しかし、(2)では、正しく図示できているにもかかわらず、それを表現することができない生徒が２名いた。範囲を不等式で表現することは、その都度確認していかなければならない。

問題２(2)では、「$x>1$、$5<x$」と解答した生徒が２名、「$1<x<5$」と解答した生徒が１名いた。また、不等式の形は正しいが、x 軸との交点の座標を正しく求めることができずに誤答となった生徒が３名いた。

問題２(3)では、「$1\geqq x$、$5\leqq x$」と解答した生徒が１名、「$x\geqq 1$、$x\leqq 5$」と解答した生徒が１名いた。これらの生徒は、(2)で、「$x>1$、$5<x$」、「$1<x<5$」と間違えた生徒であった。これらの生徒のうち１名は、問題１でも範囲を正しく表現できていなかった。また、x 軸との交点を正しく求めることができなかった生徒は、同様に(3)も間違っていた。しかし、考え方、表現方法は正しく、正確に交点の座標を求めることができれば問題はないと考えられる。

③結果の考察

不等式の解をグラフ上で考察することについては、おおむね定着が図られた。関数の定義域と値域の関係から、不等式の解を考察することによって、既習事項との結びつきを意識できた。また、関数の値の変化として、グラフを捉えることも理解が深まった。

しかし、グラフ上に２次不等式の解を表現できても、それを言葉や式で表現することができない生徒が、依然として存在する。２次不等式の学習の直前にも「範囲の表現」については復習したが、十分とは言えなかった。「$x<1$、$5<x$」と表現すべきところを「$x>1$、$5<x$」と表現してしまう生徒については、補習の機会を設定して再度指導し、理解の定着を図りたい。これらの生徒については、「うっかり」間違ってしまったところもあるが、誤答に疑念をもてるようになるまで取り組ませたい。

また、特に２次不等式の解では、「または」と「かつ」の理解が明確でない生徒が存在することも分かった。「$x<1$、$5<x$」と「$1<x<5$」の意味を再度考えさせる場面を次時に設定し、２次不等式の理解の定着を図りたい。２次不等式の解とともに、２次方程式の解についても、数学Ａの「論理」の単元で再度確認する必要がある。

Ⅲ　指導後の生徒の状況

研究協力委員の学校で、指導後に、確認テスト（事前）と同じ問題を用いて確認テスト（事後）を実施した。

(1) 確認テスト（事後）の実施について

①対象、実施時期等

対　　象：研究協力委員の学校の第１学年　合計 230 名（事前テストは 234 名）

実施時期：平成 18 年 10 月から 12 月

時　　間：おおむね 10 分程度

②出題のねらい

範囲の概念の形成をねらった指導に取り組むことによって、範囲のイメージを的確に捉え、それを数直線上や不等式で正しく表現することができるようになったかどうかを判断する。ただし、事後のテストでは、変域ではなく値域という語句を用いた。

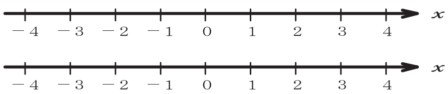
(2) 問題と正答率の変化（ 正答率は　事前→事後 ）

①範囲の表現について（問題１、２）

１．次の範囲を右の数直線に図示せよ。

① $0 \leqq x \leqq 3$

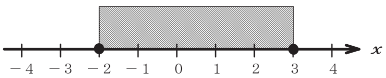
② $x > -1$



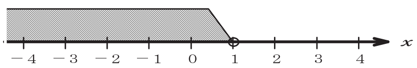
①正答率 66.2%→92.2%
②正答率 50.0%→80.9%

２．下の数直線に示された範囲を式で表せ。

①



②



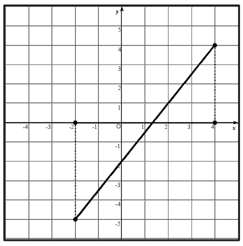
①正答率 85.5%→89.1%
②正答率 59.8%→76.1%

事前のテストの結果と比べると、表現されているものを適切に捉え、また、それを表現することができるようになった。誤答の生徒に確認をしたところ、「勘違い」がほとんどであり、理解はされているようであった。しかし、問題２②の形式については、やはりつまずきやすいことが分かる。「$x<1$」と「$1>x$」など、表現は異なるが同じ範囲を示していることについて、機会ある毎に復習の機会を設け、さらに定着を図っていく必要がある。

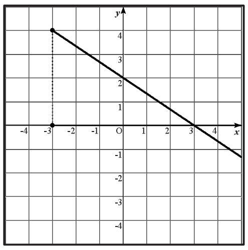
②１次関数の値域について（問題３、４）

３．下の直線のグラフで表された関数の値域を求めよ。

①



②



①正答率 62.0%→64.3%
②正答率 27.8%→37.8%

４．次の関数の値域を求めよ。

① $y=2x$（$-1 \leqq x \leqq 2$）

② $y=-2x$（$1 \leqq x \leqq 3$）

①正答率 68.8%→73.0%
②正答率 59.4%→67.4%

事前のテストと比べると、正答率が上がっているが、十分な正答率とは言えない。ただし、これは研究協力委員の３校の学校のうち１校が、この研究のまとめの時期までに２次関数の単元に入っておらず（事例１まで学習済み）、関数の定義域・値域、２次不等式について学習していないことが原因の１つとして考えられる。関数の定義域・値域、さらに２次不等式まで学習した２校の生徒の正答率は、次のとおりである。

関数の定義域・値域、２次不等式を学習済みの生徒の正答率の変化

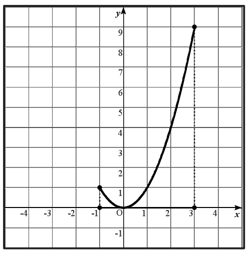
問題３	①73.4%→83.7%	②34.8%→48.4%
問題４	①86.1%→90.8%	②73.4%→85.6%

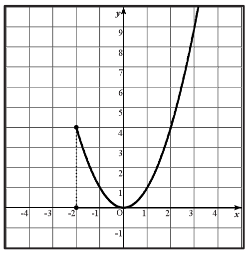
この結果を見ると、事例１、事例２、事例３まで学習した生徒は、おおむね良好な状況にあることが分かる。範囲についての表現を身に付け（事例１）、さらに定義域・値域（事例２）、２次不等式（事例３）まで学習した生徒にとっては、座標平面上での範囲についての理解、定義域・値域についての理解はおおむね満足できるものであった。しかし、問題３②の形式については、授業で扱わなかったこともあるが、状況を把握できなかった生徒が半数以上いた。さらに、グラフや数直線から範囲を把握する力を付けさせていきたい。

また、定義域・値域、２次不等式を学習していない生徒は、高等学校では関数について全く学習していないにもかかわらず、正答率は上がっている。変域については理解しているものの、それを表現することができなかった生徒がいることが分かる。

③２次関数の値域について（問題５、６）

５．下の放物線のグラフで表された関数の値域を求めよ。

①


②


①正答率 58.5%→65.2%
②正答率 30.8%→43.9%

６．次の関数の値域を求めよ。

① $y = 2x^2$（$-1 \leqq x \leqq 2$）
② $y = -x^2$（$1 \leqq x \leqq 3$）

①正答率 29.1%→37.0%
②正答率 40.5%→42.6%

１次関数の値域と同様に、学習済みの生徒の正答率は次のとおりである。

関数の定義域・値域、２次不等式を学習済みの生徒の正答率の変化

問題５	①73.4%→83.7%	②39.9%→59.5%
問題６	①39.2%→51.6%	②49.4%→52.9%

１次関数の値域と比較すると、満足いく結果は得られなかった。特に、問題５①では83.7%の正答率であるにもかかわらず、問題６①では 51.6%の正答率に留まり、依然として 30%以上の差がついている。誤答の生徒に確認すると、定義域・値域を考える際にグラフを用いないで代数的に解決を図った生徒が多かった。グラフから値域を読み取ることができるにもかかわらず、敢えて、代数的に解いていることになる。これらの生徒については、関数の値の変化を読み取るには、グラフが有効であることをさらに実感させたい。

(3) 実施結果から

事後のテストの状況を見ると、範囲の概念は徐々に形成されていることが分かる。範囲を数直線上に表現したり、言葉や式で表現したりすることについては、おおむね定着が図られてきた。不等号の読み方についても、いろいろな表現方法を聞き分けることができるようなるとともに、そのうちの１つを適切に使って自分自身で表現することができるようになった。また、座標平面上に表された関数のグラフから、その定義域・値域を把握して表現することもできるようになってきた。

しかし、関数の値の変化を考察する際のグラフの有用性を、十分に実感したとは言えない。２次不等式はグラフを用いて解いているにもかかわらず、関数の値域を求める際には、代数的に解いてしまう。関数の値域も２次不等式も、同じように関数の値の変化を考察していることを把握させるとともに、その際には関数のグラフを用いることが有効であることを、さらに実感させていきたい。

おわりに

１．小学校・中学校での学習内容の把握

高等学校の教科指導に際しては、小学校・中学校の学習内容を把握しておくことが大切である。従前の学習指導要領から移行・削除された項目が多い現行の学習指導要領のもとでは、その重要度は従来にも増して高くなっている。「１次不等式」が移行されたことについては、単に生徒が不等式の解法を学ばずに高等学校に入学しているということだけではなく、それに伴って、「範囲の概念」が十分に形成されていないという実態にも結びついている。我々はこれらのことに十分配慮しなければならない。教材研究に際しては、単にある分野が移行されたり削除されたりしたことだけに目を向けるのではなく、生徒の学習状況や身に付いている学力の状況なども的確に把握し、適切な指導法を吟味する必要がある。

中学校と高等学校における指導内容の変化は、教科書に使われている用語や表現方法にも及んでいる。本研究で触れた「不等号の読み方」、「数直線上での範囲の表現方法」など、改めて教科書を見直す必要がある。従前の学習指導要領を知っている教師にとっては既知の事項であるとの思いがあるために、生徒にとっても同様であると思いかねないが、生徒にとっては未知の事項であるといったことが往々にしてあるかも知れない。

２．生徒の学習状況の把握

生徒の学習状況を把握することは、あらゆる場面において大切なことである。本研究においては、指導の前、指導の直後、一定期間が過ぎたところで小テストを実施して、生徒の学習状況の把握に努めた。十分な成果が得られない面もあったが、その後の指導には十分生かすことができた。生徒の学習状況を把握する際には、ペーパーテストの問題の内容に留意しなければならない。授業で扱った問題や教科書に載っている問題をそのまま出題するのではなく、指導のねらいに沿って、生徒に身に付けさせたい力を適切に測定できる問題を作成する必要がある。

３．言葉、図形（グラフ）、式による表現の関連付け

数学の学習においては、特有の式や記号が出てきて、生徒にとって理解しにくい場面が多々ある。そのような時は、日常なじみのある言葉を補って考えさせてみたり、図やグラフなど視覚に訴えて考えさせたりすることが効果的である。代数、解析、幾何、確率・統計などすべての領域において、言葉で表現すること、図（グラフ）で表現すること、そして、それらを式で表現することができれば、学習した内容を十分理解することができる。言葉、図形（グラフ）、式による表現を関連付ける指導を繰り返して、そのよさを十分感じ取らせることで、数学への理解が深まることが期待できる。

本研究は、以上の視点から展開したものである。本資料の作成に当たり、研究協力委員の先生方に取り組んでいただいた指導は、特別なものではない。各校においても、生徒の実態に合わせて本資料を取組の参考にしていただき、数学の授業が、生徒にとって「楽しい授業」、「分かる授業」、そして、「できる授業」になるような一助になれば幸いである。

高等学校における教科指導の充実

数　学　科

発　行　　平成19年3月

栃木県総合教育センター　研究調査部

〒320-0002　栃木県宇都宮市瓦谷町1070

TEL 028-665-7204　　FAX 028-665-7303

URL http://www.tochigi-c.ed.jp