

## 事例2 「2次関数の定義域・値域」の指導

### 1. 事例の概要

関数の定義域・値域については、教科書の扱いは軽い。しかし、「範囲についての確認テスト（事前）」からも分かるとおり、生徒の理解は十分でない。また、数直線上で考えていた範囲を座標平面上で考えることに拡張することによって、範囲についての理解をさらに深めさせたいと考え、関数の定義域・値域について扱うことにした。

授業で値域を考えさせる際には、グラフ上で考察することが有効であることを実感させるとともに、値域をグラフ上に表現させ、それを言葉や不等式で表現させる。その際、コンピュータを用いることで、関数のグラフを動的なものとして捉えさせ、グラフが関数の値の変化を表現しているものであるとの認識を深めさせる。このことは、関数の最大値・最小値を考察することにつながるとともに、不等式にもつながることになる。また、値域の応用として、値域から定義域を考察することに取り組みさせる。このことは、直接、2次不等式の解法に結びつき、2次不等式への学習がスムーズに移行されることと考える。

指導の最後に、確認テストを行い、生徒の理解の状況を確認する。確認テストでは、実際にグラフをかかせ、そのグラフ上に値域を表現させることによって、範囲を的確に把握しているか、また、それを不等式で正しく表現できるかどうか確認した。

### 2. 指導の展開

#### (1) 単元「2次関数の値の変化」のねらい・評価規準、学習計画・評価計画

##### ①単元のねらい・評価規準

##### 単元のねらい

2次関数の値の変化を考察し、関数の定義域・値域について把握したり、関数の最大値・最小値を求めたりすることができるようにする。また、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できるようにし、それらを具体的な事象の考察に活用できるようにする。

##### 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
① 2次関数の値の増加・減少について、グラフを用いて捉えようとする。 ② 具体的な事象の考察に2次関数の最大・最小の考えを活用しようとする。	① 2次関数の値の増加・減少について、グラフを用いて考察することができる。 ② 具体的な事象の中に、2次関数の関係を見出し、式で表現することで、最大・最小について考察することができる。	① 2次関数の値域をグラフを用いて求めることができる。 ② 定義域が実数全体である2次関数の最大値・最小値をグラフを用いて求めることができる。 ③ 定義域が制限された2次関数の最大値・最小値を求めることができる。 ④ 具体的な事象の中に2次関数の関係を見出し、式で表現することができる。	① 座標平面上で定義域・値域の概念を理解している。 ② 2次関数の最大値・最小値の意味を理解している。

②学習計画・評価計画

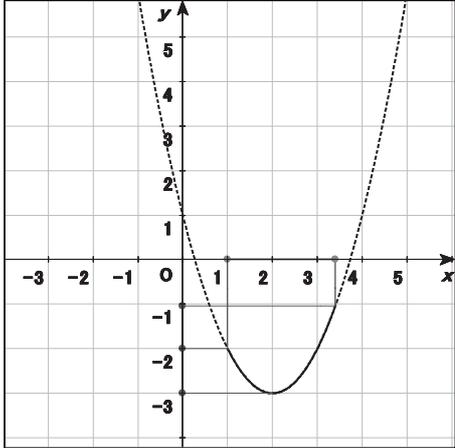
時間	学習活動	評価規準とのかかわり	評価方法
第1時間 (実践例の授業)	<p>&lt;2次関数の定義域・値域&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>2次関数の定義域・値域を、範囲として捉えるとともに、関数の値の変化として理解する。</li> <li>2次関数において、定義域から値域を求めたり、値域から定義域を考察したりすることによって、定義域・値域を理解する。</li> </ul>	㉑、㉒	ワークシート、小テストから理解の状況を把握する。
第2時間	<p>&lt;定義域が実数全体である2次関数の最大値・最小値&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>最大値・最小値を範囲(値域)の中の値として考察することによって、関数の値の変化としてグラフを用いて捉える。</li> <li>具体的な2次関数の最大値・最小値を求める。</li> </ul>	㉑、㉒、㉓	ワークシート、授業中の机間指導、発言の様子から考察の状況を把握する。
第3時間	<p>&lt;定義域が制限された2次関数の最大値・最小値&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>定義域が制限された2次関数の最大値・最小値をグラフを用いて求める。</li> <li>定義域が制限された2次関数の最大値・最小値を求めることを通して、最大値・最小値の意味を理解する。</li> </ul>	㉒、㉓、㉔	授業中の机間指導や小テストから理解の状況を把握する。
第4時間	<p>&lt;2次関数の最大・最小を用いた具体的な事象の考察&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>2次関数の定義域・値域の考え方や最大値・最小値の考え方を利用して、具体的な事象の解決を図る。</li> <li>2次関数の定義域・値域の考え方や最大値・最小値の考え方を利用して、解決できる問題を作成する。</li> </ul>	㉑、㉒、㉔	応用課題「問題作り」をレポートとして提出させ、取組の状況を把握する。

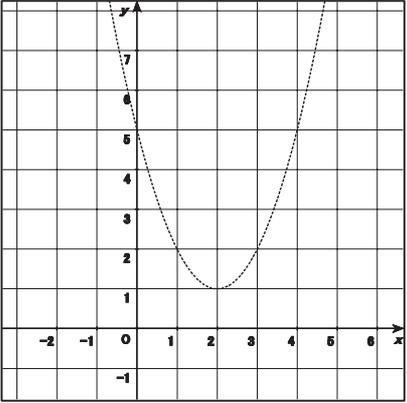
(2) 授業のねらいと評価方法

本授業のねらいは、「座標平面上で関数の定義域・値域の概念を理解し、2次関数の値域をグラフを用いて求めることができる」ことにある。また、評価については、ワークシートの記述内容を確認するとともに、小テストを実施して理解の状況を把握する。

(3) 授業展開

指導内容	学習活動(課題・発問・活動等)	指導上の留意点
<ul style="list-style-type: none"> <li>定義域・値域の確認</li> </ul>	<p>○用語(「定義域」、「値域」)の意味の確認</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p><b>課題1 (1次関数の定義域・値域)</b> 関数 <math>y=2x</math> (<math>-1 \leq x \leq 2</math>) の値域を求めよ。</p> </div>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>2次関数の値域</li> </ul>	<p>○定義域が制限された2次関数の値域の考察</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p><b>課題2 (2次関数の定義域・値域)</b> 1 関数 <math>y=(x-2)^2-3</math> (<math>2 \leq x \leq 4</math>) の値域を求めよ。 2 関数 <math>y=(x-2)^2-3</math> (<math>1 \leq x \leq 4</math>) の値域を求めよ。</p> </div> <p><b>【予想される生徒の反応】</b></p> <p>1は <math>-3 \leq y \leq 1</math> 2は <math>-3 \leq y \leq 1</math> または <math>-2 \leq y \leq 1</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>2で、<math>x=1</math> のとき <math>y=-2</math>、<math>x=4</math> のとき <math>y=1</math>。したがって、求める値域は「<math>-2 \leq y \leq 1</math>」であると考えた人がいます。さて、この考え方は正しいだろうか？もし、間違っているとしたら、どこに誤りがあるだろうか。</p> </div>	

指導内容	学習活動（課題・発問・活動等）	指導上の留意点
	<p>【予想される生徒の反応】</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・定義域の両端の値を代入しただけでは、求めることができない。</li> <li>・グラフをかいてみると分かるが、<math>y</math> が一番小さな値をとるのは頂点である。</li> </ul> <p>・2次関数の値域の考え方（コンピュータによる確認）</p>  <p>値域を求める際には、グラフをかくことによって、関数の値の変化を読み取る必要がある。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p><b>課題3（2次関数の定義域・値域の確認）</b></p> <p>1 関数 <math>y = -(x+1)^2 + 5</math> (<math>-2 \leq x \leq 1</math>) の値域を求めよ。</p> <p>2 関数 <math>y = -(x+1)^2 + 5</math> (<math>x &gt; 2</math>) の値域を求めよ。</p> </div> <p>(値域の求め方)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・定義域の端点の座標を求め、グラフを点線でかく。</li> <li>・不等式で表された定義域を <math>x</math> 軸上に表す。</li> <li>・定義域内のグラフを実線でかく。</li> <li>・値域を <math>y</math> 軸上に表す。</li> <li>・<math>y</math> 軸上に表された値域を不等式で表す。</li> </ul> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>課題3の1と2の違いは何だろうか。</p> </div> <p>【予想される生徒の反応】</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・定義域内に頂点が含まれているかいないか。</li> <li>・1は端点だけではなく頂点も考えなければならない。</li> <li>・値域を考える時に2は頂点を考えなくてもよい。</li> </ul>	<p>・「グラフをかく」という意見が出された時点で、課題2の1と2の違いを発表させ、定義域内の頂点の有無に気付かせる。</p> <p>・<math>x</math> の値に対する <math>y</math> の値を確認しながら、関数の値の変化を確認する。</p> <p>・<math>x</math> の範囲から <math>y</math> の範囲を意識させる。</p> <p>・意見を出させる中で、<math>x</math> の変化が単調であるにもかかわらず、<math>y</math> の変化が単調である時もあることに気付かせ、グラフをかくことの重要性を認識させる。</p>

指導内容	学習活動（課題・発問・活動等）	指導上の留意点
<p>・ 2次関数の値域の応用</p> <p>・ 本時のまとめ</p>	<p>○ 2次関数の値域から定義域への考察</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p><b>課題4（2次関数の定義域・値域の考察）</b></p> <p>右のグラフは2次関数のグラフである。次の問いに答えよ。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 <math>y \leq 5</math> となる <math>y</math> の範囲を <math>y</math> 軸上に図示せよ。</li> <li>2 グラフにおいて、<math>y \leq 5</math> となる部分を実線でかけ。</li> <li>3 <math>y \leq 5</math> となる <math>x</math> の範囲を <math>x</math> 軸上に図示し、その範囲を求めよ。</li> </ol> </div>  <p>・ 課題4を用いた本時の学習内容の確認、宿題（課題5）の確認、次時の予告、小テスト。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><b>課題5（2次関数の定義域・値域）</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 関数 <math>y = x^2 - 6x + 11</math> (<math>1 \leq x \leq 5</math>) の値域を求めよ。</li> <li>2 関数 <math>y = x^2 - 2x - 2</math> において、<math>y \geq 1</math> となる <math>x</math> の範囲を求めよ。</li> </ol> </div>	<p>・ 2次不等式につながる課題であるが、ここでは、値域についての考察であることに留める。</p> <p>・ 関数関係ではないが、<math>x</math> の値に対する <math>y</math> の値への関係を意識させながら、考察させる。</p>

(4) ワークシート

数学ワークシート 定義域・値域

～関数の定義域・値域について考えてみよう～

課題1 (1次関数の定義域・値域)

関数  $y=2x$  ( $-1 \leq x \leq 2$ ) の値域を求めよ。

定義域…

値域…

課題2 (2次関数の定義域・値域)

1 関数  $y=(x-2)^2-3$  ( $2 \leq x \leq 4$ ) の値域を求めよ。

2 関数  $y=(x-2)^2-3$  ( $1 \leq x \leq 4$ ) の値域を求めよ。

課題3 (2次関数の定義域・値域の確認)

1 関数  $y=-(x+1)^2+5$  ( $-2 \leq x \leq 1$ ) の値域を求めよ。

2 関数  $y=-(x+1)^2+5$  ( $x > 2$ ) の値域を求めよ。

(値域の求め方)

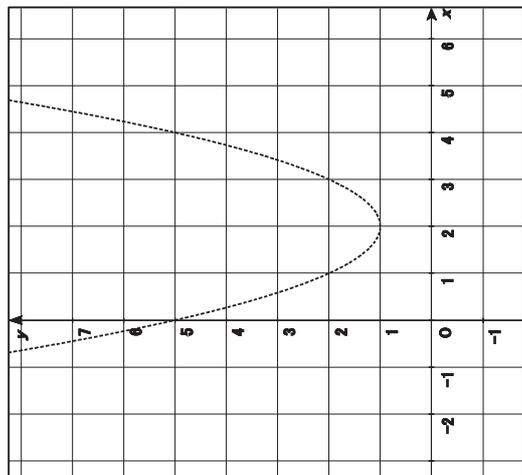
課題4 (2次関数の定義域・値域の考察)

右のグラフは2次関数のグラフである。次の問いに答えよ。

1  $y \leq 5$  となる  $y$  の範囲を  $y$  軸上に図示せよ。

2 グラフにおいて、 $y \leq 5$  となる部分を実線でかけ。

3  $y \leq 5$  となる  $x$  の範囲を  $x$  軸上に図示し、その範囲を求めよ。



課題5 (2次関数の定義域・値域)

1 関数  $y=x^2-6x+11$  ( $1 \leq x \leq 5$ ) の値域を求めよ。

2 関数  $y=x^2-2x-2$  において、 $y \geq 1$  となる  $x$  の範囲を求めよ。

### 3. 評価

指導の最後に小テストを実施するとともに、誤答の生徒に聞き取り調査を実施し、理解の状況の把握に努めた。

#### (1) 小テストの問題、予想される解答

##### ①小テストの問題

###### 確認テスト（定義域と値域）

問題1 次の関数のグラフをかき、値域を求めよ。

(1)  $y=2x$  ( $-1 \leq x \leq 2$ )

(2)  $y=-2x$  ( $1 \leq x \leq 3$ )

(3)  $y=(x-3)^2+2$  ( $2 \leq x \leq 5$ )

(4)  $y=-(x+2)^2+5$  ( $-1 \leq x \leq 1$ )

問題2 次の関数において、与えられた  $y$  の範囲に対応する  $x$  の範囲を求めよ。

(1)  $y=(x+1)^2-2$   $y \leq 7$

(2)  $y=x^2+2x-3$   $y > 0$

\*テスト用紙には、各問いにグラフ用紙を載せた。

また、問題1(1)から(2)については、事前に行った「範囲についての確認テスト」の問題と同じものとした。授業後に理解の状況がどの程度変化したかを確認する。

##### ②予想される解答

授業中の生徒の様子から、以下のような誤答を予想し、これに基づいて生徒の解答を分析し、今後の授業に活用することとした。

問題1 ア グラフから定義域、値域を把握しようとししない。

イ 与えられた定義域が把握できない。

ウ 定義域に対応する値域がグラフ上で把握できない。

エ 値域を不等式で表現することができない。

問題2 オ 与えられた  $y$  の範囲が把握できない。

カ  $y$  の範囲に対応する  $x$  の範囲が把握できない。

キ  $x$  の範囲を不等式で表現することができない。

また、事前に行ったテストの正答率は、問題1(1) 78.9%、(2) 68.4%であり、2次関数の値域については、「 $y=2x^2$  ( $-1 \leq x \leq 2$ )」では 36.8%、「 $y=-x^2$  ( $1 \leq x \leq 3$ )」では 44.7%であった。

#### (2) 小テストの結果（対象生徒：40名）

##### ①正答率

問題1 (1) 97.4% (+18.5) (2) 89.5% (+21.1)

(3) 72.5% (4) 80.0%

問題2 (1) 57.5% (2) 52.5%

## ②結果の考察

問題1では、すべての生徒がグラフをかいて、定義域、値域を把握しようとしていた。事前テストでは、式を与えられた時にグラフをかいて考えようとする生徒が半数程度しかいなかったことを考えると、グラフの有用性が実感できたようである。誤答は、「値域を不等式で表現することができない(問題1 エ)」ものがほとんどであり、グラフ上で値域を把握できるものの、それを表現することができない生徒がまだいることが分かった。1次関数については、解答状況から大多数の生徒が理解していることが読み取れた。等号を忘れた解答、 $x$ と $y$ を書き間違えた解答がいくつかあったが、テスト後の聞き取り調査では十分理解していると判断できた。また、2次関数については、事前に行ったテストにおいて、正答率36.8%、44.7%と大変低かったが、今回の小テストでは妥当な結果を得ることができた。しかし、依然として理解が十分でない生徒もいる。これらの生徒については、後日、補習の機会を設けることにした。今後の指導の中で、関数の値の変化としてグラフを捉えることができるように、再度注意を促したい。

問題2における、誤答としては、グラフはかけているが、不等式で表現できないものが目立った。グラフ上では、求める $x$ の範囲を「 $-4 \leq x \leq 2$ 」や「 $x < -3$  または  $1 < x$ 」を表現しているにもかかわらず、「 $x \leq -4$ 、 $2 \leq x$ 」や「 $-3 < x < 1$ 」といった誤答が多かった。特に、「または」という概念の定着が十分ではなかった。2次不等式を学習する際に、値域について再度確認するとともに、不等式の解の範囲が2か所になる場合と1か所になる場合の違いについて考えさせたい。

総じて、コンピュータでイメージをもてたため、グラフの有用性や、定義域・値域を関数の値の変化として捉えることができるようになったようである。ただし、グラフ上で範囲を把握しているにもかかわらず、それを表現できない生徒がまだいる。再度、授業で確認するとともに、「2次関数のグラフと方程式」、「2次不等式」、さらには、数学Aの「集合と論理」など、範囲に関わる内容を扱う時には、範囲を言葉で、数直線上で、不等式で表現させることを意識させて、定着を図っていきたい。