高等学校における教科指導の充実

数　学　科

数学科における指導と評価の一体化
～数学的な見方や考え方の育成を目指して～

栃木県総合教育センター
平成26年３月

ま　え　が　き

現代を生きる私たちは、政治・経済・文化・情報・科学・技術など様々な面において状況が絶えず変化する社会の中にいます。今後も、少子化・高齢化の急速な進行や、グローバル化にともなう国際競争の激化、地球規模での環境の変化等が予想されるとともに、世界的に知識基盤社会へと移行しつつあり、新しい知識・情報や的確な判断力、コミュニケーション能力等を身に付けることの重要性がますます増大していくものと思われます。

そのような中で「基礎・基本を確実に身に付け、いかに社会が変化しようと、自ら課題を見付け、自ら学び、自ら考え、主体的に判断し、行動し、よりよく問題を解決する資質や能力」をもち、あわせて「自らを律しつつ、他人とともに協調し、他人を思いやる心や感動する心などの豊かな人間性」や「たくましく生きるための健康や体力」を備えた人間を育成すること、つまり「生きる力」をもつように子どもたちを教育することが求められています。

高等学校においては、平成25年度入学生より新しい学習指導要領が全面実施となっています。この新学習指導要領では、「生きる力」を育むためには、「基礎的・基本的な知識・技能の習得」と「それらを活用して課題を解決するために必要な思考力、判断力、表現力等の育成」をバランスよく行うことが重要であるとしています。また、「主体的に学習に取り組む態度」の育成も大切です。このように様々な面でバランスのよい教育を実施するためには、指導を計画的に行うとともに、ＰＤＣＡサイクルに基づく工夫・改善を進めていく必要があります。また、学習の評価についても、計画的に多角的な観点から生徒を評価するとともに、その評価を次の指導の改善につなげる「指導と評価の一体化」を図ることが求められています。

これらの求めに応じるためには、多くの努力と工夫・改善が必要となります。そこで、栃木県総合教育センターでは、平成17年度から「高等学校における教科指導の充実に関する調査研究」を行ってきました。特に今年度は、学習指導要領の改訂の趣旨を踏まえるとともに、指導と評価の一体化を図るための授業改善について、国語科、数学科、理科、保健体育科、家庭科の各教科で調査研究に取り組みました。教科指導を充実させるために、本冊子を活用し、生徒の学力向上に向けた取組の成果をあげていただきたいと願っています。

最後になりますが、調査研究を進めるに当たり、御協力いただきました研究協力委員の方々に深く感謝申し上げます。

平成26年３月

栃木県総合教育センター所長
金　井　　正

目　　次

※本資料は、栃木県総合教育センターのホームページ「とちぎ学びの杜」内、「調査研究」と「教材研究のひろば」のコーナーにも掲載しています。
「とちぎ学びの杜」 http://www.tochigi-edu.ed.jp/center/

Ⅰ　本調査研究の背景

今年度の「高等学校における教科指導の充実に関する調査研究」は、平成21年告示の高等学校学習指導要領の改訂の趣旨を踏まえるとともに、「指導と評価の一体化」等の各教科に求められている課題解決を図るための教科指導の在り方を探ることに重点を置き、国語科、数学科、理科、保健体育科及び家庭科で実施するものである。

各教科で調査研究した内容を次章以降に提示するに当たり、まず、平成21年告示の高等学校学習指導要領改訂の基本的な考え方及び学習評価の在り方について整理する。

1　学習指導要領改訂の基本的な考え方

(1) 教育基本法の改正から、学習指導要領の改訂までの流れ

ア　教育基本法の改正（平成18年）

「科学技術の進歩・情報化・国際化・少子高齢化・核家族化」「価値観の多様化」「社会全体の規範意識の低下」など、昨今の教育を取り巻く環境の変化を受けて、平成18年に教育基本法が約60年ぶりに改正された。

新しい教育基本法では、「人格の完成」や「個人の尊厳」など、これまでの教育基本法の普遍的な理念は大切にしつつ、時代の変化に即した内容を盛り込みながら、

○　知・徳・体の調和がとれ、生涯にわたって自己実現を目指す自立した人間
○　公共の精神を尊び、国家・社会の形成に主体的に参画する国民
○　我が国の伝統と文化を基盤として国際社会を生きる日本人

の育成を目指している。

イ　学校教育法の改正（平成19年）

教育基本法の改正を受けて、学校教育法をはじめとする教育に関係する諸法令が改正された。平成19年に改正された学校教育法では、新たに「義務教育の目標」が規定された。また、小・中・高等学校等においては、「生涯にわたり学習する基盤が培われるよう、基礎的な知識及び技能を習得させるとともに、これらを活用して課題を解決するために必要な思考力、判断力、表現力その他の能力をはぐくみ、主体的に学習に取り組む態度を養うことに、特に意を用いなければならない」と定められた（第30条第2項、第49条、第62条等)。

ウ　中央教育審議会答申（平成20年）

新しく明確にされた教育の基本理念を受けて、平成20年１月に中央教育審議会答申「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について」が出された。この答申では、知識基盤社会への移行や、グローバル化による国際競争の激化等、大きく社会構造が変化する中で、ますます「生きる力」が重要であるとしている。

また「生きる力」を支える「確かな学力」「豊かな心」「健やかな体」の調和を重視するとともに、学力の重要な要素は「基礎的・基本的な知識・技能の習得」「知識・技能を活用して課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力等」「学習意欲」の三つであるとした。

エ　高等学校学習指導要領改訂（平成21年）

以上の法改正及び答申を受けて、平成20年には小・中学校の、平成21年には高等学校・特別支援学校の学習指導要領が改訂された。小・中学校においてはそれぞれ平成23・24年度から一斉実施、高等学校においては原則として平成25年度入学生から年次進行で実施されている。なお、総合的な学習の時間や数学、理科など一部の教科等では先行実施されている。

(2) 学習指導要領改訂の基本的な考え方

今回の学習指導要領の改訂は、平成20年１月に出された中央教育審議会答申「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について」に基づいている。この答申の中では、学習指導要領改訂の基本的な考え方として、改正教育基本法等で示された教育の基本理念を踏まえるとともに、

① 「生きる力」という理念の共有

② 基礎的・基本的な知識・技能の習得

③ 思考力・判断力・表現力等の育成

④ 確かな学力を確立するために必要な授業時数の確保

⑤ 学習意欲の向上や学習習慣の確立

⑥ 豊かな心や健やかな体の育成のための指導の充実

の６点を挙げており、その中でも、特に、②を基盤とした③、⑤及び⑥が重要としている。

これらをまとめると、

◇ 大きく変化する社会に生きる中で必要とされる「生きる力」を育むため、「確かな学力」「豊かな心」「健やかな体」の調和のとれた教育をすること **【生きる力】**

◇ 「確かな学力」を身に付けるためには、「基礎的・基本的な知識・技能の習得」と、それらを活用して「課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力等の育成」をバランスよく行うこと **【習得と活用】**

◇ 「学習意欲」を高め、家庭学習も含めた「学習習慣の確立」を図ること **【学習に取り組む態度】**

などが主なポイントとして挙げられる。

２ 学習評価の在り方

平成22年３月に、中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会において、「児童生徒の学習評価の在り方について（報告）」（以下「報告」という。）がとりまとめられた。その中で、「学習評価の意義と学習評価を踏まえた教育活動の改善の重要性」について、次のように述べられている。

○ 学習評価は，児童生徒が学習指導要領の示す目標に照らしてその実現状況を見ることが求められるものである。学習指導要領は，各学校において編成される教育課程の基準として，すべての児童生徒に対して指導すべき内容を示したものであり，指導の面から全国的な教育水準の維持向上を保障するものであるのに対し，学習評価は，児童生徒の学習状況を検証し，結果の面から教育水準の維持向上を保障する機能を有するものと言える。

○ また，従前指導と評価の一体化が推進されてきたところであり，今後とも，各学校における学習評価は，学習指導の改善や学校における教育課程全体の改善に向けた取組と効果的に結び付け，学習指導に係るPDCAサイクルの中で適切に実施されることが重要である。

特に、「教育水準の維持向上を保障する」という観点で学習評価を見ることは重要であり、単に生徒の成績を付けるために学習評価があるのではないことに留意する必要がある。

(1) 学習評価の基本的な考え方

先ほど述べた「報告」を受けて、同年５月に、文部科学省初等中等教育局長通知「小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校等における児童生徒の学習評価及び指導要録の改善等について（通知）」（以下「改善通知」という。）が出された。

「改善通知」では、「学習評価の改善に関する基本的な考え方」を次のように述べている。

> ○　学習評価を通じて，学習指導の在り方を見直すことや個に応じた指導の充実を図ること，学校における教育活動を組織として改善することが重要であること。その上で，新しい学習指導要領の下における学習評価の改善を図っていくためには以下の基本的な考え方に沿って学習評価を行うことが必要であること。
>
> 【1】　きめの細かな指導の充実や児童生徒一人一人の学習の確実な定着を図るため，学習指導要領に示す目標に照らしてその実現状況を評価する，目標に準拠した評価を引き続き着実に実施すること。
>
> 【2】　新しい学習指導要領の趣旨や改善事項等を学習評価において適切に反映すること。
>
> 【3】　学校や設置者の創意工夫を一層生かすこと。

また、「報告」においては、

> ○　学習状況を分析的に見る「評価の観点」については，成績付けのための評価だけでなく，指導の改善に生かす評価においても重要な役割。
>
> ○　そのため，今回，学習指導要領等で定める学力の3つの要素に合わせ，評価の観点を整理することとし，概ね，
>
> 【1】　基礎的・基本的な知識・技能は「知識・理解」「技能」において，
>
> 【2】　これらを活用して課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力等は「思考・判断・表現」において，
>
> 【3】　主体的に学習に取り組む態度は「関心・意欲・態度」において，
>
> それぞれ評価を行うことと整理。
>
> ○　各教科の評価の観点は上に示した観点を基本としつつ教科の特性に応じて設定。

としており、簡潔に言えば次の３点、

◇　観点別学習状況の評価の実施

◇　目標に準拠した評価（いわゆる絶対評価）の実施

◇　指導と評価の一体化

の更なる充実が求められている。

なお、「報告」では、高等学校における学習評価の現状と課題として「(高等学校においては) 現在の学習評価の考え方に基づく実践について小・中学校ほど十分な定着は見られない」と指摘し、高等学校においても、評価による指導の改善を図るとともに、評価を通じた教育の質の保障を図るため、観点別学習状況の評価を推進していくことが必要であるとしている。ただし、高等学校においては、各学校の生徒の特性、進路等が多様であることへの配慮も必要としている。

(2) 観点別評価

これまで述べてきたとおり、学力の三要素を適切に評価するために、原則として四つの観点で学習評価を行うことが求められている。

学力の三つの要素	学習評価の観点
○　基礎的・基本的な知識・技能	「知識・理解」 「技能」
○　知識・技能を活用して課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力等	「思考・判断・表現」
○　主体的に学習に取り組む態度	「関心・意欲・態度」

ただし、上の四つの観点を基本としつつ教科の特性に応じて「各教科の評価の観点」をそれぞれ設定している。

これまで、学校においては「ペーパーテストの点数による評価」が中心で、「知識・理解」への偏重があり、更にはいわゆる「詰め込み型の学習」につながる面もあった。また、経済協力開発機構（OECD）が行う「生徒の学習到達度調査（PISA)」などの国際調査の結果から、日本の児童生徒には「読解力」「表現力」「知識の活用能力」「学習意欲」などの面で課題があると指摘された。これらの反省から、小・中学校においては「思考力・判断力」等のペーパーテストには現れにくい学力を適切に評価するための取組がなされ、観点別評価が着実に実施されている。一方、高等学校においては、指導要録に「観点別学習状況の評価」を記載することとはされておらず、観点別評価が小・中学校に比べると定着していない状況にある。

高等学校においても、ペーパーテストだけでなく、日頃から観察、生徒との対話、ノート、ワークシート、学習カード、作品、レポート、質問紙、面接などの様々な評価方法の中から、学習活動の特質、評価の観点、場面などに応じて、生徒の学習状況を的確に評価できる方法を選択することが大切である。

(3) 目標に準拠した評価

以前、小・中学校では児童生徒の成績を集団の中における相対的な位置（順位）により評価する「集団に準拠した評価」（いわゆる相対評価）が行われていた。

平成10年の学習指導要領改訂にともなって学習評価の在り方が見直され、現在のような児童生徒一人一人の学習状況を学習指導要領の定める目標に対する実現状況によって評価する「目標に準拠した評価」（いわゆる絶対評価）に改められた。右の図１、図２にそれぞれのイメージを示す。

「集団に準拠した評価」においては、「どのような集団においても学業成績の分布はほぼ同じになる」という考え方が根底にある。この考えを基にして上位から何％は「評定：５」のように、順位による評定を行うことになる。しかし、実際には集団によって分布に違いがあり、また児童生徒一人一人の達成度を適切に評価する必要から、「目標に準拠した評価」に改められた。

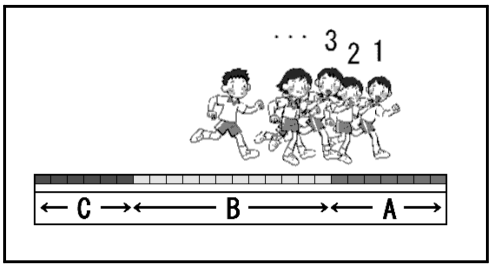


図１　集団に準拠した評価のイメージ

図２　目標に準拠した評価のイメージ

「目標に準拠した評価」においては、「児童生徒一人一人が、学習の目標をどの程度達成しているか」によって評価を行う。そのためには「学習の目標を達成した」とはどのような状況かを各教科の観点別に明確化しておく必要があり、その判断の拠り所とするものを**評価規準**という。評価規準は通常、学習の内容ごとに学習指導要領の定める学習の目標と照らし合わせて「おおむね満足できる状況」を示す。

例えば、理科の科目「物理基礎」の学習内容において、「イ　様々な力とその働き」のうちの「(イ) 力のつり合い」の目標は、（学習指導要領より）次のように設定できる。

◇目標：　物体に働く力のつり合いを理解する。

この目標が、「達成された状況」とはどういう状況であるかを観点別に具体的に示したものが評価規準であり、例えば、

「関心・意欲・態度」：〇身の回りの物体における力のつり合いを考察しようとしている。
「思考・判断・表現」：〇物体に働く力がつり合う条件について考察している。
〇物体に働く力のつり合いから、未知の力を見いだしている。
「実験・観察の技能」：〇力の三要素に留意して、力をベクトルの矢印で表している。
「知識・理解」　　　：〇力は、向きをもつベクトル量であることを理解している。
〇二つ以上の力について、向きを考えて合成している。

などとなる。これらの評価規準は、各学校において、生徒の実態等を考慮して学習指導計画とともに設定することになる。

なお、評価規準の語尾については、「～しているか。」（疑問形）や「～することができる。」（可能表現）などを用いる例が散見されるが、評価規準は「おおむね満足できる状況」を示すものであるから、原則として「～している。」などとするのが望ましい。ただし、「関心・意欲・態度」の観点のように、「～しようとしている」でおおむね満足できる場合や、教科や内容の特性によっては「～できる」という表現を用いる場合もあり得る。

授業時には、設定した評価規準に照らし合わせて、

Ａ：「十分満足できる」　Ｂ：「おおむね満足できる」　Ｃ：「努力を要する」

のいずれになるかを判断する。その際に、判断の基準とするものを「評価基準」と言うことがある。例えば、「10問の評価問題中、８問以上を正解した場合をＡ、６～７問正解した場合をＢ」としたり、「物体に働く力がつり合う条件について考察していればＢ、物体の運動状態と関連づけて働く力のつり合いを考察している場合をＡ」としたりするなどの基準が考えられる。いずれの場合でもＢに達しない状況をＣとする。

ここで、「評価規準」と「評価基準」という二つの語を使い分けているので注意したい。これらの違いは、前ページの図２において次のように例えると分かりやすい。

評価規準（目標を達成した状況を明確化したもの）＝ものさしの種類
評価基準（評価を出す段階における判断の基準）　＝ものさしの目盛

以上のように、各単元（題材）毎に「観点別学習状況の評価」を行い、最終的にはそれを評定へと総括する。

なお、「評価規準の作成，評価方法等の工夫改善のための参考資料　～新しい学習指導要領を踏まえた生徒一人一人の学習の確実な定着に向けて～」（国立教育政策研究所教育課程研究センター　平成24年７月）には、各教科ごとの評価規準の設定例や総括の仕方等がまとめられているので、参考にするとよい。

(4) 指導と評価の一体化

既に述べたように、学習評価の目的は、単に生徒の成績を付けるためにあるのではなく、教育の質を保障する役割がある。とりわけ、学習評価の結果から、個に応じた指導を行ったり、学習指導の在り方を見直したりすること、つまり「指導と評価の一体化」が求められている。

学習評価を単に学習指導の結果としてとらえるのではなく、評価を通じて指導の改善を行ったり、組織的な見直しをしたりするなど、指導と評価を一体的に行うことが重要である。そのためには、「成績を付けるための評価」だけでなく「指導に生かす評価」を行い、それを学習指導に係るＰＤＣＡサイクルに組み込むことが大切である。具体的には、

① 「指導計画」を立案する際に「評価計画」を立てる。

② その際に、評価の観点のバランスに留意する。

③ また、総括の資料とする評価（成績を付けるための評価）だけでなく、「指導に生かす評価」を盛り込むよう留意する。

④ 評価の結果から、指導上の成果や課題を検証し、次の指導に生かす。

⑤ 個々の達成状況の把握から、達成度が不十分な生徒に対して指導の手立てを講じる。

などがポイントとなる。

これらの取組により、次のようなメリットがあると考えられる。

○ あらかじめ学習内容の指導計画とともに評価の観点を生徒に示すことにより、生徒にポイントを押さえた学習をさせるとともに、学習意欲の向上を図ることができる。

○ 指導計画とともに評価の観点を明確にすることにより、特定の観点に偏ることなく、バランスの取れた指導をすることができる。

○ ペーパーテスト、ノート、レポート、発問等の様々な評価方法の中から、評価の目的・場面等に応じて適切なものを選択することができる。

○ 個々の達成状況をこまめに確認することにより、きめ細かい指導をすることができる。

○ 評価が計画的・客観的になり、信頼性が高まるとともに、教育水準の保障に寄与する。

ここに挙げたもののほかにも、「指導と評価の一体化」によって、様々な効果を期待することができる。以下では、各教科における指導と評価の一体化の在り方と、実践事例を紹介する。

Ⅱ　数学科における指導と評価の一体化

1　高等学校数学科における評価の在り方

(1)　数学科の目標と評価規準

ア　指導と評価の一体化の必要性

平成 20 年１月の中央教育審議会において、学習指導要領改訂の基本的な考え方が示されるとともに、算数・数学科の改善の基本方針や主な改善事項が示されている。

算数・数学科の改善の基本方針をまとめると、次のようになる。

改善の基本方針

> (ｱ) 数学的活動を一層充実させ、基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付け、数学的な思考力や表現力を育て、学ぶ意欲を高めるようにする。
> (ｲ) 内容の系統性を重視しつつ、学年間や学校間で内容の一部を重複させて、発達や学年の段階に応じたスパイラルによる教育課程を編成できるようにする。
> (ｳ) 根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する。
> (ｴ) 数学を学ぶ意欲を高めたり、学ぶことの意義や有用性を実感したりできるようにする。
> (ｵ) 数学的活動を生かした指導を一層充実するため、必履修科目などに課題学習を位置付ける。

数学科の目標の改善に当たっては、上記の「改善の基本方針」等を踏まえるとともに、高等学校における数学教育の意義を考慮し、小・中学校及び高等学校での教育の一貫性を図り児童生徒の発達に応じた適切かつ効果的な学習が行われるよう配慮し、学習指導要領で数学科の目標は次のように示されている。

> 数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。

数学科の目標はいくつかの点で改善がされているが、その一つは、「数学的活動を通して」という文言を文頭に出し、これまで以上に数学的活動を重視していることである。

授業で数学的活動を充実させるためには、生徒の実現状況を適切に把握しておくことが必要である。例えば、「２次関数とそのグラフ」の指導で、それまでの生徒の学習の実現状況が良好であれば、「２次関数の最大・最小」で扱うような課題をまず提示して考えさせ、「課題を解決するにはグラフを用いて関数の変化を捉えることが必要である」ことを感じ取らせた上でその後の授業を展開することが考えられる。また、学習の実現状況が良好でなければ、中学校で学習した関数 $y=ax^2$ のグラフの特徴を復習し、身の回りの事象で関数 $y=ax^2$ のグラフを用いて解決できる課題を考えさせたり、高等学校で学習する２次関数 $y=ax^2+bx+c$ の変化の様子は中学校で学習した関数 $y=ax^2$ と同じように考えられることを知らせたりした後、知識や技能の定着を丁寧に確認しながら授業を展開することが考えられる。いずれにしても、数学的活動を充実させる前提とし

て生徒の学習の実現状況の適切な把握が必要である。
また、数学的活動を通して、学習内容に対する理解を深めるとともに、「なぜだろう？」、「どうしてだろう？」と問いながら学ぶ態度（批判的に学ぶ態度）を身に付けさせることも大切である。批判的に学ぶ態度を身に付けさせるには、課題を「自分ごと」として捉えさせる工夫や、「おやっ？」と思わせたり生徒の意見が割れたりするような発問の工夫などが必要であるが、このような工夫は、関心・意欲・態度の評価をどのように行うかを検討する中で考え付くことが多い。どのように指導するかを考えることは、何をどのように評価するかを考えることと表裏のことであると考えられる。
現在の高等学校の数学の授業は、多くの問題の解法の説明が中心となっていると指摘されることが少なくない。このような授業では、１時間の授業の目標が曖昧になり、生徒にとっては「分かりにくい」授業になっていることが多いともいわれる。
授業は、授業の目標と、その目標が実現されているか否かをどのような様子や姿でみるか（評価規準）を明確にして実施し、目標が実現されていないと判断したときには「目標が実現されるにはどのような取組が必要か」を考え即座に指導を改善していくことが必要である（指導と評価の一体化）。したがって、「分かる」授業にするためには指導と評価を一体化することと、評価もそれに適したものに改善していくことが必要である。
指導と評価を一体化するためには、目標とその評価規準を明確にし、適切な場面で評価をするとともに、評価を通してその時間のその後の展開、あるいは次時の授業展開を変えるなど、指導を見直すことが大切である。例えば、多くの生徒が「おおむね満足できる」状況であるとして評価できなければ、同じ内容を改善した授業展開でもう一度指導をすることも必要である。

イ　数学科の目標と評価規準

数学科の目標は、数学の指導全体を通して達成させるものであり、一般的かつ包括的に一文で示されているが、次の６つの部分に分けることができる。その構造と評価の４つの観点について、学習指導要領解説から次のようになる。

①	数学的活動を通して	
②	数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め	⇒知識・理解
③	事象を数学的に考察し表現する能力を高め	⇒数学的な見方や考え方
④	創造性の基礎を培う（とともに）	⇒数学的な見方や考え方
⑤	数学のよさを認識し	⇒関心・意欲・態度
⑥	それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる	⇒関心・意欲・態度

数学科の目標は、数学的活動を重視することを表すとともに、思考力・判断力・表現力を身に付けさせること、数学のよさを認識させることに重点が置かれていることから、「数学的な見方や考え方」や「関心・意欲・態度」の観点からの評価は重要である。この思考・判断・表現の観点である「数学的な見方や考え方」の「表現」については、基礎的・基本的な知識・技能を活用しつつ、数学的に考えたり、判断したりしたことを、生徒の説明・論述・討論などの言語活動等を通じて評価することを意味している。つまり、これまでの「表現・処理」として評価されていた「表現」ではなく、思考・判断した過程や結果を言語活動等を通じて生徒がどのように表出しているかを内容としている。「数学的な技能」については、これまでの「表現・処理」として評価されていた「表現」をも含む観点として設定されている。このように、「表現」が区別されたものであることを押さえておきたい。

学習指導要領を踏まえ、数学科の特性に応じた評価の観点及びその趣旨は以下のとおりである。

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
数学の論理や体系に関心をもつとともに，数学のよさを認識し，それらを事象の考察に積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断しようとする。	事象を数学的に考察し表現したり，思考の過程を振り返り多面的・発展的に考えたりすることなどを通して，数学的な見方や考え方を身に付けている。	事象や数学的に表現・処理する仕方や推論の方法などの技能を身に付けている。	数学における基本的な概念，原理・法則などを体系的に理解し，知識を身に付けている。

(2) 観点別評価の進め方

生徒の実態を踏まえ、目標を明確にし、評価規準を設定する。評価規準を設定することは、教師にとっては指導の在り方を考え直すことにもつながり、生徒にとっては学習のめあてとなる。公表することも踏まえ分かりやすい表現を心がけるようにする。

指導と評価の計画は、単元を通して作成する。その際、１時間ごとではなく複数時間ごとに作成してもよい。ただし、指導と評価の計画を複数時間ごとに作成した場合でも、それぞれの授業を実施するときには、より具体的な目標とその評価規準を明確にすることが必要である。

ア　単元の目標の設定

単元の目標は、学習指導要領やその解説に記述されている内容のまとまりごとの目標と指導内容をもとに、各学校の生徒の実態を考慮して設定することになる。例えば、下の図は、学習指導要領で示されている数学Ⅰ「(3)　２次関数」の目標をもとに設定した「ア　２次関数とそのグラフ」の目標である。

内容のまとまり　…　多くの教科書では、章に該当するものであり、事例では「２次関数」、「指数関数・対数関数」、「微分・積分の考え」に相当する。

単　元　……………　多くの教科書では、節に該当するものであり、事例では「２次関数とそのグラフ」、「対数」、「導関数の応用」に相当する。

「２次関数」の目標（学習指導要領から）
２次関数とそのグラフについて理解し，２次関数を用いて数量の関係や変化を表現することの有用性を認識するとともに，それらを事象の考察に活用できるようにする。

⇒

「２次関数とそのグラフ」の目標（事例１）
具体的な事象と関連付けて、関数概念の理解を深め、２次関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できるようにする。また、２次関数の式とグラフを関係付けて考察し、２次関数のグラフの特徴について理解することができるようにする。

イ　評価規準の設定

評価規準は、それぞれの単元ごとに４つの観点の評価規準がそろうようにする。数学科の場合、どのような知識や技能を身に付けさせるかを明確にした上で、知識や技能を身に付けさせることを通してどのような数学的な見方や考え方を身に付けさせるか、数学的な見方や考え方のよさはどこにあるか、知識や技能をどのような場面で活用するか、などを考えていくと設定しやすい。

評価規準を設定する際には、評価規準が１～２つの観点となるように注意するとともに、分かりやすい表現となるよう注意する。

なお、評価規準の語尾を次のようにそろえ、分かりやすくする。

「関心・意欲・態度」：～しようとしている。～に関心をもっている。
「数学的な見方や考え方」：～を考察することができる。
～して考察し、それらを～に表現することができる。
～（帰納的、演繹的、発展的…）に考えることができる。
「数学的な技能」：～（表現する、かく、説明する、求める…）ことができる。
～（表現や処理）の方法を身に付けている。
「知識・理解」：～な知識を身に付けている。～について理解している。

評価規準は、一度設定したら以後変更しないというのではなく、実際に指導する生徒の実態を踏まえ、適宜更新していく方がよい。更新に当たっては、実際の指導場面を想定し、生徒にとってどのような指導を重視すべきかを検討することが大切である。

（参考資料：「評価規準の作成，評価方法等の工夫改善のための参考資料」平成 24 年７月
国立教育政策研究所　教育課程研究センター）

各事例では、内容のまとまりごとの目標とその評価規準をもとに、国立教育政策研究所が平成 24 年７月に発表した「評価規準の作成，評価方法等の工夫改善のための参考資料（高等学校　数学)」を参考にして、単元の目標から評価規準を作成した。

「評価規準の作成，評価方法等の工夫改善のための参考資料（高等学校　数学)」から「２次関数」の評価規準、「２次関数とそのグラフ」の評価規準の設定例を示す。

「２次関数」の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
２次関数とそのグラフや値の変化に関心をもつとともに,関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識し,事象の考察に２次関数を活用しようとしている。	事象を２次関数を用いて考察し表現したり，その過程を振り返ったりすることなどを通して，関数的な見方や考え方を身に付けている。	２次関数を用いて数量の変化を表現し,関数の値の変化を調べることができる。	２次関数とそのグラフ及び関数の値の変化における基本的な概念，原理・法則などを理解し，知識を身に付けている。

「２次関数とそのグラフ」の評価規準の設定例

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
２次関数とそのグラフについて関心をもち、それらを２次関数の考察に活用しようとしている。	２次関数の式とグラフを関係付けて考察することができる。	２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと関数 $y=ax^2$ のグラフの位置関係を調べることができる。	２次関数の式やグラフの特徴について理解している。

ウ　「関心・意欲」及び「数学的な見方や考え方」の観点

４つの観点のうち、評価が難しい「関心・意欲・態度」及び「数学的な見方や考え方」の観点の基本的な考え方について、以下のとおりである。

㋐ 関心・意欲・態度の観点の基本的な考え方

「関心・意欲・態度」の観点の趣旨は、「数学の論理や体系に関心をもつとともに，数学のよさを認識し，それらを事象の考察に積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断しようとしている。」と述べられており、この観点では少なくとも次の３点をみることが必要である。

・数学の論理や体系に関心をもっているか。 ・数学のよさを認識しているか。 ・事象の考察に学習した内容を活用して（判断しようとして）いるか。

１点目の「数学の論理や体系に関心をもっているか」については、関心のある事柄に対しては自分なりの考えをもったり、疑問をもったりすることが多いことから、内容に即して生徒がもった考えや疑問を把握し、それらを基に評価することが考えられる。

２点目の「数学のよさを認識しているか」については、学習を通して生徒がどのような数学のよさを認識したかを記述表現させることにより評価することが考えられる。

３点目の「事象の考察に学習した内容を活用しているか」については、指導の在り方と強く関連していると思われるが、どのような場面で学習した内容を活用するかを記述表現させることで評価することが考えられる。

したがって、授業、確認テスト、単元テストやレポートなどで次のように問うことで「関心・意欲・態度」の評価をすることができる。

・～を学習して考えたことをその内容に関連させて（簡潔に）述べなさい。
・～を学習して疑問に思ったことをその内容に関連させて具体的に述べなさい。
・～を学習して面白いと思った考え方などを述べなさい。また、その理由を簡潔に述べなさい。
・～で学習した内容を活用して解決できると考えられる場面を述べなさい。また、どのように活用して解決するのかを述べなさい。

なお、「関心・意欲・態度」の評価では、その観点の趣旨から考えてやや長い期間で評価する方がよい。したがって、確認テスト、単元テストやレポートなどを基に評価することはできるが、評定につながる評価は教師の観察の結果も適宜、加味して評価するようにする。

㋑ 数学的な見方や考え方の観点の基本的な考え方

「数学的な見方や考え方」の観点の趣旨は、「事象を数学的に考察し表現したり，思考の過程を振り返り多面的・発展的に考えたりすることなどを通して，数学的な見方や考え方を身に付けている。」と述べられており、この観点では少なくとも次の２点をみることが必要である。

・数学的な見方や考え方を身に付けているか。 ・自分の考えなどを適切に表現できているか。

数学的な見方や考え方については、数学が構成されていくときの中心となる見方や考え方と、問題解決の過程などにおいて数学を活用していくときの見方や考え方に大きく分けられる。特に後者に関連して「知識・理解」の観点の知識とどこが違うのかと問われることがある。これについては、「知識・理解」の観点の知識は基本的な概念や用語・記号などと直接結びついたものであり、「数学的な見方や考え方」の観点で求められるのは、問題解決の方略など、より

一般性の強いものである。
「自分の考えなどを適切に表現できる」ということについては、言語活動の充実とも関連し、「数学的な見方や考え方」の観点で評価する。口頭での表現も評価すべきであるが、高等学校数学科では記述表現をより重視して評価すべきである。記述表現を重視する方が生徒の思考を深めることになり、評価もより的確に行うことができるからである。

エ　評価方法

・観察、生徒との対話、ノート、ワークシート、学習カード、作品、レポート、ペーパーテスト、質問紙、面接などの評価方法の中から、その場面における学習状況を的確に評価できる方法を選択していくことが必要である。
・生徒による自己評価や生徒同士の相互評価を工夫することも考えられる。
・生徒の学習状況を適切に評価し、その評価を指導に生かす点に留意する必要がある。
・ペーパーテストは、評価方法の一つとして有効であるが、ペーパーテストにおいて得られる結果が、目標に準拠した評価における学習状況の全てを表すものではない。

オ　評価の記録

指導の過程で評価の記録を丁寧にとっておくことは大切なことであるが、記録したデータを全て観点別の総括や評定に使う必要はない。何が身に付いて、何が身に付いていないかが明確になるよう工夫する。ただし、どのデータを観点別の総括や評定に使うかは、指導と評価の計画においてあらかじめ考えておくようにする。

授業における評価の基本は観察である。観察に当たっては、何を、いつ、どのように把握するのかを授業前に考えておかなければならない。また、「学習指導要領」で重視している言語活動の充実は、生徒の実現状況を的確に把握するためにも大切である。

２～３時間ごとに１度、簡単なテスト（確認テスト）をすることも考えられる。確認テストは、５分程度で観点を絞って行うテストであるが、指導の定着を確認し、次時以降の授業展開を工夫することを主眼とするものである。したがって、このテストの内容は観点を踏まえ、指導内容に即したものであることが大切である。なお、確認テストは生徒同士が交換してお互いに採点をさせてもよい。採点することによって内容の理解を深めることがあるからである。

定期試験では、確認テストとは異なり応用的な内容も出題する。出題に当たっては、それぞれの観点を踏まえるとともに、出題のねらいを明確にするようにする。

なお、数学科では、評価をするためにペーパーテストを行うことが多いが、自ら課題を見付け、自分の考えや解決の方法などをまとめさせ、評価することも大切である。

２　数学的な見方や考え方の指導と評価の一体化

⑴　数学的な見方や考え方について

数学科の指導において多くの先生方は、「考える力を育てたい」、「表現力を身に付けさせたい」という思いをもっているのではないだろうか。

数学科における思考力や表現力の育成は、従来から一貫して重視されてきた。しかし、その一方で、「考える力が育っていない」、「表現力が身に付いていない」と感じている先生方は少なくないのではないだろうか。実際、各種の国際調査や国内調査で、「思考力や表現力が十分に身に付いていない」点が指摘されている。

このことは、思考力・表現力の育成の難しさを物語っているといえよう。

では、数学の授業を通して思考力・表現力を身に付けさせるためには、どのような指導を行えばよいのだろうか。

ア　数学的な見方や考え方とは

数学的な見方や考え方について、「高等学校学習指導要領解説数学編」（平成 21 年 12 月）では次のように述べられている。

『数学的な思考力や表現力を支えているのは，数学に関する知識や技能、数学的な見方や考え方である。数学的な見方や考え方については，**数学が構成されていくときの中心となる見方や考え方**と，**問題解決の過程などにおいて数学を活用していくときの見方や考え方**に大きく分けられる』　　（太字は筆者による）

①　「数学が構成されていくときの中心となる見方や考え方」について

数学の様々な概念や原理・法則がどのような着想や考え方を基にして、どのように構成され組み立てられているかなどに関する見方や考え方である。そこでは、数学を既に出来上がった完成品として提示してそれを暗記させるのではなく、数学が創造される過程をどう実感させていくかが重要な課題となる。概念や原理・法則は、それらを断片的、固定的な知識として覚えただけでは生きた知識として活用することはできない。

②　「問題解決の過程などにおいて数学を活用していくときの見方や考え方」について

主として、問題解決等に当たって、問題を数学の対象としてとらえたり、直観、類推、帰納、演繹などにより、いろいろな角度から問題を考察し、解決の方向を構想したりするときの見方や考え方である。

問題解決に当たって、そのための手立てや着眼点、あるいは既習の知識や技能を引き出す原動力となるものなどである。

問題解決に当たっては、次のような段階を経ることが多い。

（ⅰ）　問題の意味を明確にし、解決への見通しを立てる。
（ⅱ）　幾つかの簡単な場合を取り上げて、解決への糸口を見つける。
（ⅲ）　文字や記号を用いて、数学の場にのせる。
（ⅳ）　一般化する。
（ⅴ）　視点を変えて考える。

このように、数学的な関係を用いることを念頭において問題を分析・整理しその解決を図るのも、ここでいう数学的な見方や考え方の一つである。

一つの問題を解決するに当たっても、いろいろな数学的な見方や考え方があり、また、発展

させたり拡張させたりすることもできる。ここで大切なことは、ただ単に与えられた問題を解くだけでなく、問題解決の過程で用いられた数学的な見方や考え方を整理し、それらを正しく理解させていくことである。

イ　数学的な見方や考え方のよさ

数学的な見方や考え方のよさは、簡潔さ、明瞭さ、的確さであり、それに基づいて定式化、公式化することにある。他方、数学教育において大切なことは、学習活動の中で簡潔さ、明瞭さ、的確さや定式化、公式化に至るまでの過程をどのように生徒に体験させ、その過程をどう納得させるかである。その際、数学的な見方や考え方を通して今まで見えなかったものが見えたりしたときなどに、そのよさが認識できるのである。

ウ　数学的な見方や考え方の具体化

数学的な見方や考え方を具体化しようとするとき、多くの先行研究があるが、本冊子では数学的な見方や考え方は、片桐重男氏による「数学的な考え方の具体化」を基本とした。そこで定義されている数学的な見方や考え方は以下のとおりである。しかし、これらの考え方がすべてではなく、授業で取り上げる教材で数学的なアイデアや方法に気付いたものに「○○○の考え方」などとネーミングし、見方や考え方を広げたり、深めたりしていけばよい。

①　数学が構成されていくときの中心となる見方や考え方
　⇔　数学の内容に関係した数学的な考え方

(ｱ) 単位の考え	(ｲ) 表現の考え	(ｳ) 操作の考え
(ｴ) アルゴリズムの考え	(ｵ) 総括的把握の考え	(ｶ) 基本的性質の考え
(ｷ) 関数的な考え	(ｸ) 式についての考え	

②　問題解決の過程などにおいて数学を活用していくときの見方や考え方
　⇔　数学の方法に関係した考え方

(ｱ) 帰納的な考え方	(ｲ) 類推的な考え方	(ｳ) 演繹的な考え方
(ｴ) 統合的な考え方	(ｵ) 発展的な考え方	(ｶ) 抽象化の考え方
(ｷ) 単純化の考え方	(ｸ) 一般化の考え方	(ｹ) 特殊化の考え方
(ｺ) 記号化の考え方		

（参考文献：「数学的な考え方の具体化」（明治図書）片桐重男(1988)）

数学的な見方や考え方とは、論理的・体系的に物事を考える側面だけでない。統合、抽象化、数量化、記号化、図形化などの方法を用いて問題を分析・整理する見方や考え方もある。また、問題に対して、直観、類推、帰納、演繹などの方法を用いて、多様な角度や観点から検討する見方や考え方がある。本研究では、それらの見方や考え方に注目している。それらの育成が、生徒にとって将来生活を営む上で、物事に対してより深く多様な考えのできる力に結びつくであろうし、そこに数学を学ぶ意義があると考える。

(2) 数学的な見方や考え方のよさを認識させるための指導

ア　数学的活動

数学的な見方や考え方を生徒に身に付けさせるには、教師による説明中心の授業より数学的活動を取り入れた授業を行うことが必要である。数学的活動とは、数学学習にかかわる目的意識をもった主体的活動のことをいう。したがって、数学的活動は、生徒が数学を学習する方法というだけでなく、数学の学習を通して身に付けるべき内容である。特に次の数学的活動を重視している。

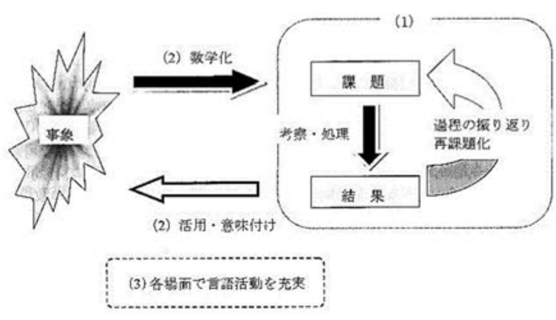
(1) 自ら課題を見いだし、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりすること。

(2) 学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用すること。

(3) 自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること。

要約すれば、次の３つに整理できる。

(1) 見いだし、振り返り、発展させる活動
(2) 具体的な事象の考察に活用する活動
(3) 説明したり、議論したりする活動



高等学校学習指導要領解説　数学編ｐ68

イ　数学的な見方や考え方のよさと数学的活動

教師がどのような観点・意図で数学的活動を取り入れたのか、その数学的活動は授業をどのように変え、生徒にどのような変容をもたらせたかを評価することになる。その点からも観点別評価は欠かせない。

数学の指導において、知識や技能を中心とした認知的な側面ばかりが重視されると、「数学の学習は社会に出てから役に立たない」とか、「数学は苦手だったが卒業してから困ったことはない」などと批判されることがある。また、問題解法のための技巧が強調され、記憶することが重視されると、数学不必要論と併せて生徒の数学離れを引き起こすことが憂慮される。

数学的活動は生徒が数学的な見方や考え方のよさを認識することと一体である。教師が一方的に教え込む授業では、数学的な見方や考え方を育成できず、そのよさも感得できない。言い換えれば、一人一人の生徒が自ら考え主体的に判断し行動する授業を通して、数学的な見方や考え方が育成でき、そのよさも認識できるのである。

数学的な見方や考え方のよさを認識することにより、生徒が数学を主体的に学習していこうとする意欲をもつようになる。したがって、生徒が主体的に取り組む場をどう授業の中に設定するかが重要になる。つまり、授業の中で生徒が感動したり、納得したりする場面を適切に設けていくことが大切になる。また、数学的な見方や考え方を育成するためには、そのような見方や考え方で学習活動が展開できる教材を作成したり、指導を工夫したりする必要がある。

いずれにしても、生徒が数学的な見方や考え方のよさを感じ取れるようにするためには、まずもって教師がよさを感じ取ることが肝要である。

これからの高等学校数学においては、数学的活動を通して、数学の学習が単に知識の習得や技能の習熟にとどまることなく、数学的な見方や考え方のよさの認識を通して、数学を学習するこ

との楽しさを感じ、主体的に学習していこうという意欲を育て、数学を様々な面で活用していこうとする能力や態度を育てようとしているのである。

日頃の授業実践の中で、生徒の自主的主体的な数学的活動が生まれるような環境をつくり、一人でも多くの生徒が大人になって「数学を学んでいてよかった」といってくれるような指導を心がけたいものである。

(3) 数学的な見方や考え方の指導と評価

ア　生徒への指導

(ｱ) 「努力を要する」状況と評価した生徒に対して

「努力を要する」状況と評価した生徒に対しては、「おおむね満足できる」状況に至るように、適切な指導が必要である。しかし、数学的な見方や考え方については、学習の内容についてだけでなく、それへアプローチする仕方自体を対象化して学習することが求められるので、短期間の補充学習などによって、その効果を期待することはなかなか困難である。

数学的な見方や考え方の指導においては、まず授業の中で生徒自身が数学的な見方や考え方に触れるという経験を大切にし、そうした経験を繰り返すことで徐々に慣れさせていくことが必要である。「努力を要する」状況と評価した生徒に対しては、こうした経験の場面で、友だちや教師の示したアイデアが意識できるように、注意を喚起するようにする。

例えば、授業の中で役に立った重要なアイデアを自分なりにまとめたノートなどに記録する習慣を身に付けさせることができれば、その生徒の状況を把握することができるとともに、素晴らしいアイデアを直接見いだすことができなくても、そのよさを考えるきっかけをつくることができる。そして、次に同じアイデアを用いる場面で、生徒がそのことに気付くよう、「この考え方は、どこかで使ったね」などと教師が問いかけることで、生徒の気付きを促すようにする。

(ｲ) 「おおむね満足できる」状況と評価した生徒に対して

どうしても「努力を要する」状況と評価した生徒ばかりに注意が行きがちであるが、「おおむね満足できる」状況と評価した生徒に対しても、より一層の努力を促し、「十分満足できる」状況が実現できるようにすることも忘れてはならない。そのためには、数学的な見方や考え方について、「おおむね満足できる」と判断される状況を表す評価規準を基に、

- 自ら見いだし考察することができるか
- よさを生かして考えることができるか
- より広い視野から発展的に考察することができるか

などの点から、より一層深まりや広がりのある評価規準を設定しておくようにするとよい。

イ　指導の改善

(ｱ) 見通しをもった指導計画に基づく指導

評価規準に基づく評価の結果は、生徒のこれからの学習の励みになるばかりでなく、教師の指導の改善にも役立てられなければならない。

「数学的な見方や考え方」の観点からの評価は、「次」や単元など、ある程度の指導期間を見通した上で行われる。したがって、これに基づく指導の改善も、１時間程度の授業についてではなく、「次」や単元程度の期間について行われることになる。

(ｲ) 生徒のよい面を積極的に評価することができる指導

「数学的な見方や考え方」の観点の評価については、「数学的な技能」や「知識・理解」などの指導のように、短期間に繰り返し評価することはなかなか困難である。したがって、教師が、生徒の優れた発想を積極的に評価する姿勢を大切にし、「数学的な見方や考え方」の評価規準に照らして、生徒のよい面が見られた場合は、それを逃さずにとらえ、その生徒やクラスの仲間にも数学的な見方や考え方の意義を知らせることができるような授業を心がけたい。「○○さんの今の意見はとても大切だね。なぜだか分かるかな？」といったような問いかけから、数学的な見方や考え方自体について検討する場面も考えられる。教師が、生徒の意見を優れた発想として評価のために記録したとしても、生徒自身がそのことに気付いていないのでは、数学的な見方や考え方の育成にはつながらない。

Ⅲ　指導実践例

授業構成の工夫、課題設定の工夫にポイントを置いて、それぞれの切り口から、数学的な見方や考え方の育成を目指すための具体的な指導実践例の作成を試みた。

事例１　２次関数「２次関数とそのグラフ」の指導の工夫

～　類推的な考え方　～

２次関数 $y = a(x-p)^2$ のグラフを考えるに当たって、先に式を与えてグラフをかかせることが一般的であるが、ここでは、先にグラフを与えてその式を考えさせることにした。そのことにより式を予想して確かめるという数学の方法を身に付けさせたい。確かめるに当たって、具体的な座標（数値）を当てはめてみることや１次関数の式とグラフの考察から類推が正しいことを確認させる。学習が進めば、関数の式に興味・関心をもち、$y = a(x-p)^2$ を見てそのグラフを考えようとするが、初歩の段階では、式よりグラフの方が生徒は興味・関心をひかれる。

事例２　指数関数・対数関数「対数」の指導の工夫

～　記号化の考え方　～

対数の導入に当たって、具体的な場面を取り上げ、対数の意味とその必要性を実感させたい。$10^x = 2$ を満たす実数 x はこれまで学習した数を使って表すことができないが、関数電卓を効果的に利用し、逐次近似的に探し出す経験をさせる。このような学習経験は、対数の意味の理解を深めるだけでなく、数学的な追求の方法やそのよさを知ることにもなる。また、対数のおよその値を求めることは、対数の意味を理解する上で重要であり、対数の大きさについての数感覚を身に付けることにつながる。およその値を求める経験をさせ、無理数という数の存在を認識させるようにする。そして、この数を、記号 log を用いて表すことで、簡潔、明瞭に表現できるなど、記号化のよさを実感させたい。

事例３　微分・積分の考え「導関数の応用」の指導の工夫

～　発展的な考え方　～

極値や極値を与える x の値から３次関数を決定する問題は扱っている。この授業では、３次関数のグラフを表す関数を決定する方法を複数考えさせる。グラフの読み取りから既習問題としての解法やそれ以外の解法など多様な考え方を導き、それぞれの解法の着眼点や発想などのよさを学び、生徒自身のものとできるようにさせたい。また、グラフは導関数を応用してかくことができるので、グラフから導関数を調べることを通して微分の逆操作の必要性に焦点をあてる。演算（積分）が用いられる場合について知り、演算の意味を明らかにし、その意味に基づいて考え、これを正しい式に表現させるようにしたい。導関数の応用の評価とともに、積分の考えの単元「不定積分」の学習に入る前に生徒がその単元を学習するに当たっての準備状態や生徒の興味・関心を評価する。それによって今後の不定積分の授業計画を立て、また、指導方法の改善を行おうとした。

事例１　２次関数「２次関数とそのグラフ」の指導の工夫
～　類推的な考え方　～

１　単元の指導計画・評価計画

(1) 単元の目標

具体的な事象と関連付けて、関数概念の理解を深め、２次関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できるようにする。また、２次関数の式とグラフを関係付けて考察し、２次関数のグラフの特徴について理解することができるようにする。

(2) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
A1　具体的な事象の中にある２つの数量の関係を見いだそうとしている。 A2　２次関数とそのグラフについて関心をもち、それらを２次関数の考察に活用しようとしている。	B1　２つの数量の関係を表、式、グラフなどを用いて考察することができる。 B2　２次関数の式とグラフを関係付けて考察することができる。	C1　関数について、対応表を基に丁寧に点をとってグラフに表すことができる。 C2　２次関数の式とグラフとの関係を把握し、グラフをかくことができる。 C3　$y=ax^2+bx+c$ のグラフと $y=ax^2$ のグラフの位置関係を調べることができる。	D1　関数の定義や関数のグラフの意味を理解している。 D2　２次関数の式やグラフの特徴について理解している。

(3) 単元の指導計画並びに評価計画（８時間）

時間	学習活動	評価規準とのかかわり	評価方法
第１時間	２つの数量の関係を調べ、関数の定義の意味を理解する。	A1、D1	観察、小テスト、自己評価
第２時間 第３時間	関数の対応表を基に点をとって、１次関数と２次関数 $y=ax^2$ のグラフをかく。	C1、D1	観察、ワークシート、小テスト、自己評価
第４時間 第５時間 **（本時）**	２次関数 $y=ax^2$ を y 軸方向へ平行移動する考え方を理解し、$y=ax^2+q$ のグラフをかく。 x 軸方向へ平行移動するグラフの関数を類推し、$y=a(x-p)^2$ のグラフをかく。	A2、B2	観察、ワークシート、自己評価
第６時間	$y=a(x-p)^2+q$ のグラフを平行移動の考え方を用いてかく。	C2、D2	観察、小テスト、自己評価
第７時間 第８時間	２次関数の式を一般形から標準形に変形する。 $y=ax^2+bx+c$ のグラフをかく。	C3、D2	観察、ワークシート、小テスト、自己評価

２　本時の計画

(1) 本時の目標（評価規準）

・２次関数とそのグラフについて関心をもち、調べようとする。 ($\boxed{\text{A2}}$)

・２次関数 $y = ax^2$ を x 軸方向へ p だけ平行移動したグラフから２次関数の式を考察できる。($\boxed{\text{B2}}$)

(2) 本時の「数学的な見方や考え方」とポイント

・片桐氏による「類推的な考え方」とは、『ある事柄Ａの性質、法則または解法が分からないときその事柄Ａに似ている既知の事柄Ａ’の性質、法則または解法を活用して解決しようとする』考え方である。

・数学的に思考したことや操作的活動等を自分自身に問いかけたり他と議論したりして振り返り、考察することを大切にしたい。このような振り返りにより、自分の数学的な考えの正しかったことが分かり、それらが自らの知識として構成されるとともに、次なる段階での創造的な思考に有意に働く。

(3) 本時の「数学的な見方や考え方」の評価と「努力を要する」生徒への手立て

「十分満足できる」状況（Ａ）

１次関数の式から２次関数の式を類推できる。さらに、関数 $y = f(x)$ を x 軸方向へ p 、y 軸方向へ q だけ平行移動した式が $y - q = f(x - p)$ と類推できる。

「おおむね満足できる」状況（Ｂ）

１次関数の式から２次関数の式を類推できる。

「努力を要する」状況と評価した生徒への手立て（回復指導）

練習問題のときに机間指導を行うとともに、次時の導入で指導する。

(4) 本時の展開

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
前時の学習の確認	ワークシート① $\boxed{\text{復習}}$　$y = 2x^2 - 3$ のグラフをかき、頂点の座標と軸の方程式を求めよ。	・前時の評価を基に不十分な生徒に机間指導の際に個別に指導する。 ・前時の学習内容を確認しながら、答え合わせをする。
$y = 2(x - p)^2$ のグラフから関数の式を推測する。	ワークシート① $\boxed{\text{課題１}}$　２次関数 $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に１だけ平行移動したグラフは、どのような関数の式になるか。 ＜予想される生徒の解答＞ $y = 2x^2 + 1$、$y = 2(x - 1)^2$、$y = 2(x + 1)^2$	$\boxed{\text{評価}}$【関心・意欲・態度】$\boxed{\text{A2}}$ ・グラフをかきながら、x 軸方向に1だけ平行移動するとはどういうことかを考えさせる。 ・点 $(0,\ 0)$、$(1,\ 2)$、$(2,\ 8)$ がどの点に平行移動するか確認する。 ・頂点、軸などグラフの特徴から、関数の式を推測させる。 ・推測した関数を発表させる。

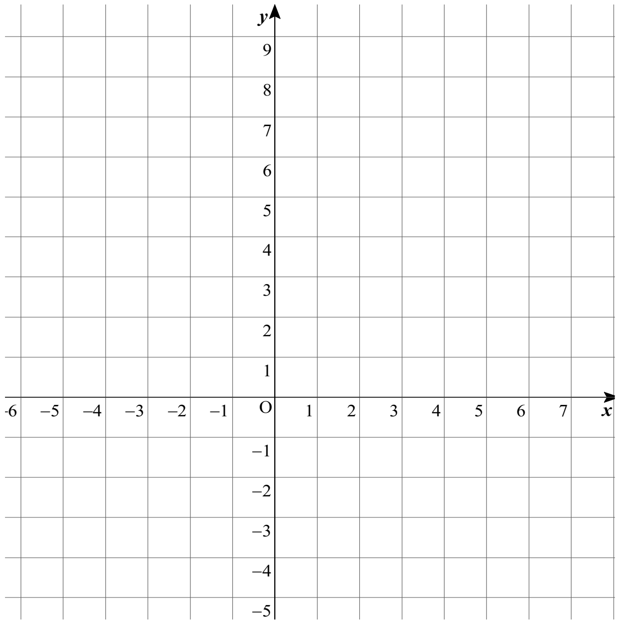
	【発問】これまでに学習したことを用いて、平行移動した関数の式を調べられないだろうか。 ＜予想される生徒の解答＞ １次関数	
１次関数の式を x 軸方向に 1 だけ平行移動した式に表す。	ワークシート② 課題２　１次関数 $y=2x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフをかき、１次関数の式を求める。 【発問】$y=2x-2$ となった。x 軸方向に 1 だけ平行移動する“1”は式の中に表現することはできないだろうか。 ＜予想される生徒の解答＞ $y=2x+1-3$、$y=2(x-1)$	・グラフを書きながら、x 軸方向に 1 だけ平行移動するとはどういうことかを隣の生徒と一緒に考える。 ・点 $(-1,\ -2)$、$(0,\ 0)$、$(1,\ 2)$ がどの点に平行移動するか考察し、x 軸方向への平行移動を再確認する。
推測を考察する。	課題３　課題１に戻り、課題２から分かったことを生かしてもう一度考える。 【発問】課題２で表現した考え方を活用できないだろうか	・$y=2x$ から $y=2(x-1)$ を導かせ、$y=2x^2$ から $y=2(x-1)^2$ を類推させる。 評価【類推的な考え方】B2 １次関数の式から２次関数の式を類推できる。
x 軸方向へ p だけ平行移動した関数の式を理解する。	練習問題　２次関数 $y=2x^2$ のグラフを次のように平行移動したグラフの式を求めよ。 (1)　x 軸方向へ 2 だけ平行移動したグラフ (2)　x 軸方向へ 3 だけ平行移動したグラフ (3)　x 軸方向へ -1 だけ平行移動したグラフ	・練習問題を解くことで、x 軸方向へ p だけ平行移動したグラフと、関数の式の p の値との関連性を認識させる。
自己評価を行う。	自己評価表を記入する	・自己評価の活用を指導する。

(5) ワークシート、練習問題プリント、自己評価表

ワークシート①　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　平成　　年　　月　　日

1年　　組　　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

復習　問：$y=2x^2-3$ のグラフをかけ。また、次の空欄をうめてグラフの特徴を答えよ。



グラフの通る点から対応表を作ってみよう

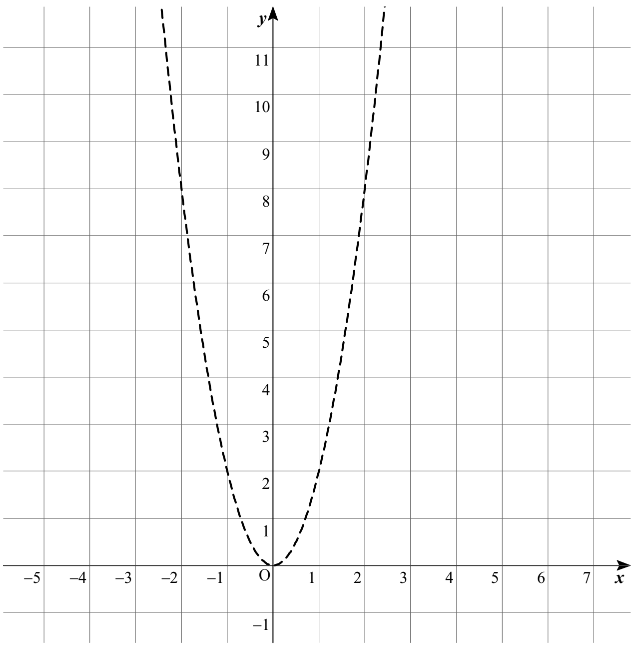
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

頂点（　　　，　　　）

軸の方程式　$x=$＿＿＿＿＿＿

グラフは＿＿＿＿に凸の放物線

課題１　$y=2x^2$ のグラフを x 軸方向へ１だけ平行移動したグラフになる関数の式はどのようになるだろうか。



点（0，0）、（1，2）、（2，8）を

↓ x 軸方向へ１だけ平行移動すると

（　　，　　）、（　　，　　）、（　　，　　）

グラフの特徴は？

頂点（　　　，　　　）

軸の方程式　$x=$＿＿＿＿＿＿

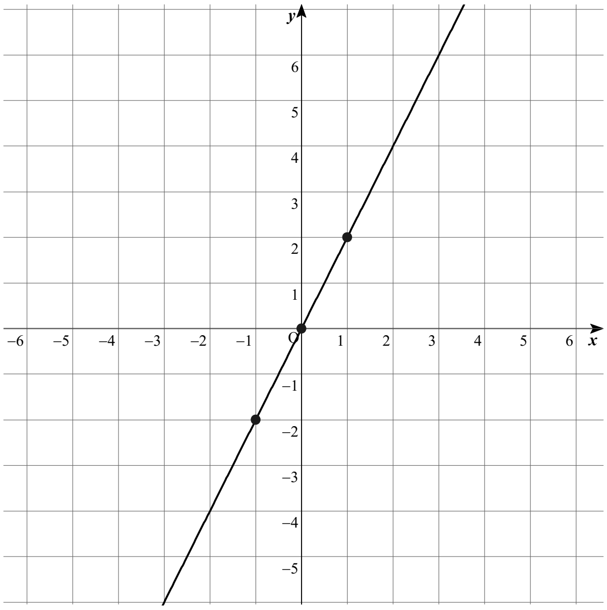
グラフは＿＿＿＿に凸の放物線

○関数の式は、$y=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（推測）

ワークシート②　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　平成　　年　　月　　日

1年　　組　　　番　氏名

$\boxed{課題2}$ 1 次関数 $y=2x$ のグラフを x 軸方向に1だけ平行移動したグラフをかき、関数の式を推測しよう。



点（–1，–2)、(0，0)、(1，2）を x 軸方向に1だけ移動すると

点（　　，　　　)、(　　，　　　)、(　　，　　　）となる。

他の点も同様に移動して、グラフをかいてみると左のようになる。

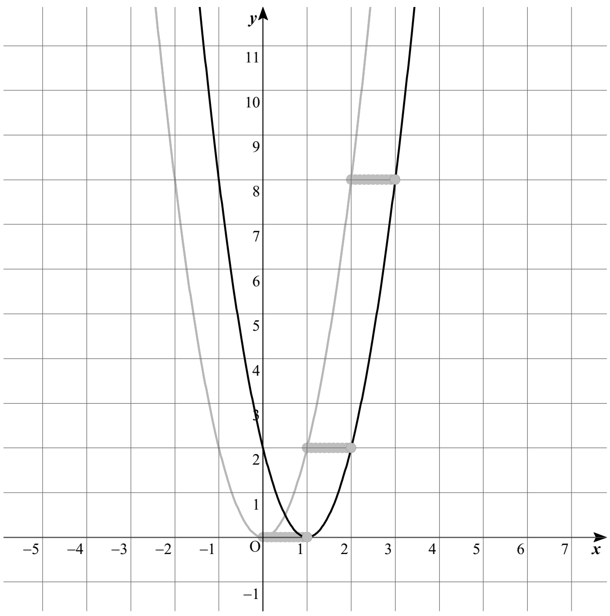
よって平行移動した式は、

$y=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

↓　（変形すると･･･)

$y=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{課題3}$ 課題1に戻りもう一度考えてみよう。



$y=2x^2$ のグラフを x 軸方向へ 1 だけ平行移動したグラフになる関数の式は、

$y=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

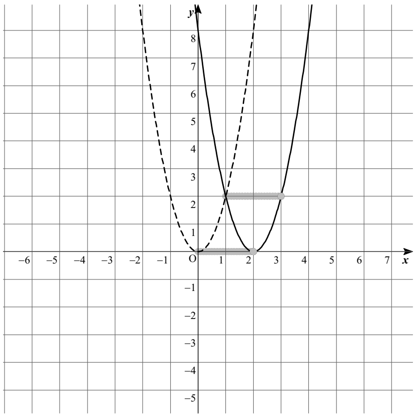
対応表をつくって確かめてみると

x	–1	0	1	2	t	$t+1$
$2x^2$						
y						

間違いなさそうだ。

練習問題　次のようなグラフをもつ２次関数の式を求めよ。

(1) $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向へ 2 だけ平行移動したグラフになる関数の式



$y =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

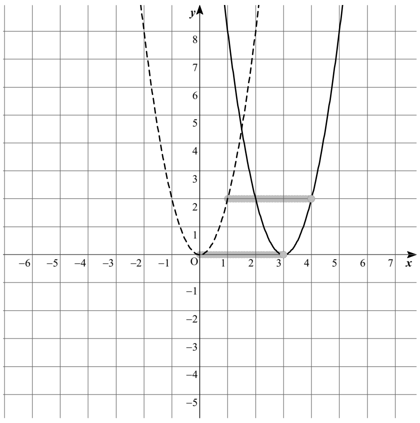
この関数のグラフの特徴

頂点の座標（　　　,　　　）

軸の方程式　$x =$

グラフは　　　に凸の放物線

(2) $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向へ 3 だけ平行移動したグラフになる関数の式



$y =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

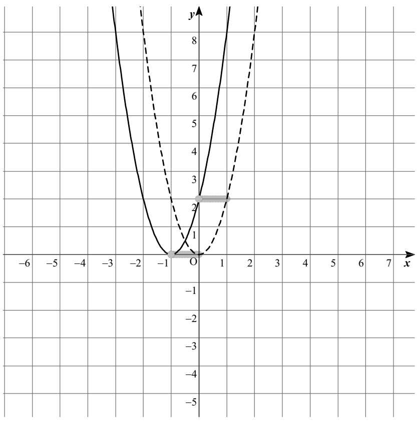
この関数のグラフの特徴

頂点の座標（　　　,　　　）

軸の方程式　$x =$

グラフは　　　に凸の放物線

(3) $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向へ -1 だけ平行移動したグラフになる関数の式



$y =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

この関数のグラフの特徴

頂点の座標（　　　,　　　）

軸の方程式　$x =$

グラフは　　　に凸の放物線

$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向へ p だけ平行移動したグラフになる関数の式は

$y =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　である。

自己評価表　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　平成　　年　　月　　日

1年　　組　　　番　氏名

学習課題	自己評価
復習 $y = 2x^2 - 3$ のグラフをかく	□対応表をつくることができた。 □点をプロットしてグラフをかくことができた。 □グラフの頂点の座標、軸の方程式を求めることができた。
課題１ $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向へ 1 だけ平行移動したグラフの関数の式を推測する	□ x 軸方向へ 1 だけ平行移動したグラフをかくことができた。 □関数の式を推測することができた。
課題２ $y = 2x$ のグラフを x 軸方向へ 1 だけ平行移動したグラフの関数の式を求める	□ x 軸方向へ 1 だけ平行移動するの“1”を式の中に表すことができた。
課題３ 課題１にもどりもう一度考える	□関数の式を推測することができた。 自分が推測した式は (　　　　　　) □ x に様々な値を代入したりすることで、式を確かめることができた。
練習問題	□ x 軸方向への平行移動と関数の式の p の値との関連性に気付くことができた。 □グラフの特徴（頂点の座標、軸の方程式、凹凸）を答えることができた。

今日の授業で分かったこと、気付いたことを書いてください。

３　授業の記録

(1) 授業中の生徒の様子

課題１では、x 軸方向への平行移動したグラフをかくことやグラフの特徴を捉えることもできていたので、生徒は平行移動の意味は理解できていた。一方、関数の式を推測することはあまりできておらず記入があった者は 10 人程度であった。この段階では前時に行った y 軸への平行移動する式と同じように、「＋」を用いた式 $y = 2x^2 + x$ や $y = 2(x^2 + 1)$ が見られた。中には推測した関数が正しいかどうか通る点の座標を代入して検証しようとする生徒もいた。また、隣の生徒同士の話合いからヒントをもらい考えようとする姿が見られた。

課題２の前に「これまでに学習したことを用いて、平行移動した関数の式を調べられないだろうか」と質問したところ、「１次関数で調べる」という答えがすぐに出てきた。

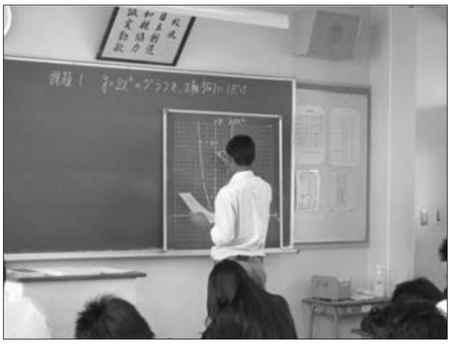
課題２では、平行移動した１次関数のグラフをほとんどの生徒がかくことができたが、できた生徒の中にその１次関数の式を求められない生徒が数名いた。それらの生徒は、発表した生徒の答えや説明を聞いて、関数の式の求め方を理解できたようであった。

式 $y = 2x - 2$ を変形する発問に対しては多くの生徒が $y = 2(x-1)$ とすることができた。１次関数の平行移動では、その他に $y = 2(x-2)$ 、$y = 2(x-3)$ となることを補充説明することによって、生徒は $y = 2(x-p)$ の形を自然と意識することができた。符号が「－」になることに不思議さを感じて、そのことを声に出す生徒もいた。

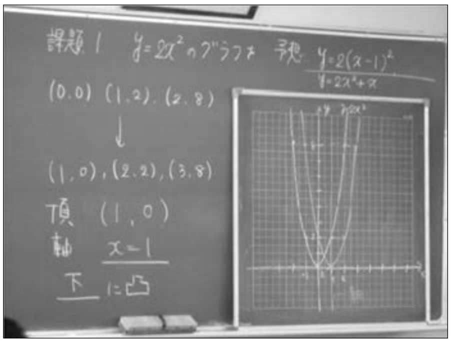
課題３では、グラフの条件から関数の式を類推することがある程度の人数の生徒ができていた。残り時間が少なくなり、成績が中位くらいの生徒を指名すると $y = 2(x-1)^2$ と正解を答えたので、すぐに検証に入った。

練習問題では、(1)～(3)の複数の問題を解くことにより、グラフと関数の p の値との関連を意識することができ、理解を深めることができた。比較的間違えやすいと思われた x 軸方向へ -1 だけ平行移動する関数もほとんどの生徒ができていた。$y = a(x-p)^2$ の形になることが自然と理解できたようであった。式を類推することができなかった生徒も練習問題を通して納得できたようだった。

［課題１の様子］

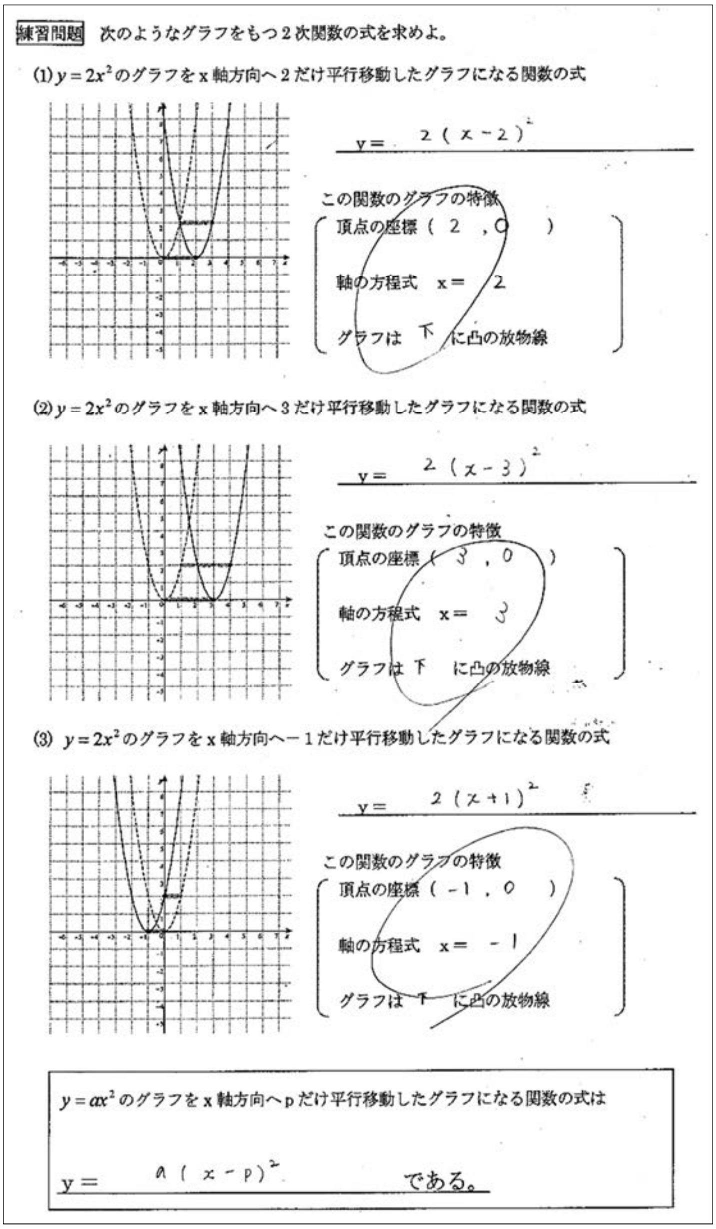


［課題１の様子］



［課題２の様子］

［練習問題の答案例］



練習問題　次のようなグラフをもつ２次関数の式を求めよ。

(1) $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向へ２だけ平行移動したグラフになる関数の式

y＝ 2 (x − 2)²

この関数のグラフの特徴

頂点の座標（ 2 ， 0 ）

軸の方程式　x＝ 2

グラフは 下 に凸の放物線

(2) $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向へ３だけ平行移動したグラフになる関数の式

y＝ 2 (x − 3)²

この関数のグラフの特徴

頂点の座標（ 3 ， 0 ）

軸の方程式　x＝ 3

グラフは 下 に凸の放物線

(3) $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向へ－１だけ平行移動したグラフになる関数の式

y＝ 2 (x + 1)²

この関数のグラフの特徴

頂点の座標（ −1 ， 0 ）

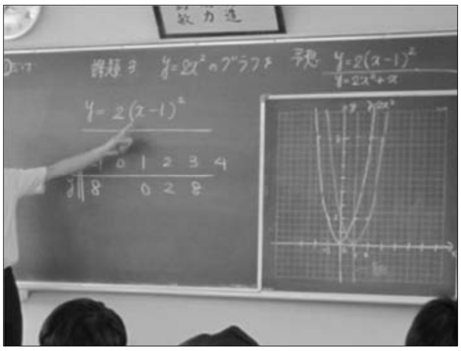
軸の方程式　x＝ −1

グラフは 下 に凸の放物線

$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向へ p だけ平行移動したグラフになる関数の式は

y＝ a (x − p)² である。

［課題３の様子］



［練習問題の様子］

(2) ワークシート、自己評価表

数学的な見方や考え方に関する自己評価の結果は次のようになった。

学習課題	自己評価
課題１ $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向へ 1 だけ平行移動したグラフの関数の式を推測する	□前時の内容をふまえて、関数の式を推測することができた。 →16 人（40.0%）
課題２ $y=2x$ のグラフを x 軸方向へ 1 だけ平行移動したグラフの関数の式を求める	□グラフから関数の式を求めることができた。→29 人（72.5%）
課題３ 課題１にもどりもう一度考える	□関数の式を推測することができた。→22 人（55.0%） □ x に様々な値を代入したりすることで式を確かめることができた。→20 人（50.0%）
練習問題	□課題３で見つけた関連性を再認識できた。→31 人（77.5%） □ x 軸方向への平行移動と式との関連性に気付くことができた。 →28 人（70.0%）

課題１において、関数 $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向へ１だけ平行移動したグラフをかくことができた生徒は 37 人(92.5%）であり、x 軸方向への平行移動の意味を理解できていた。しかし、その式を類推できた生徒は 16 人(40.0%）であった。

課題２において、$y=2x$ のグラフを x 軸方向へ１だけ平行移動したグラフをかくことができた生徒は 37 人であり、その直線を表す１次関数の式を表すことができた生徒は 29 人(72.5%)いた。さらにその式を x 軸方向へ１だけ平行移動したことを表す因数分解ができた生徒は 26 人(65.0%)になった。そのことにより課題３において､課題１の２次関数の式を推測することができた生徒は 22 人(55.0%）と課題１のときよりも人数が増えた。その中で正解者は 18 人(45.0%）であった。

自己評価において、x 軸方向への平行移動と関数の式の p の値との関連性に気付くことができた生徒は 28 人(70.0%）という結果であった。

x 軸方向へ p だけ平行移動した関数もほとんどの生徒が $y=a(x-p)^2$ と答え､一般化することができていた。

課題３において、グラフの条件から関数の式を推測することができた生徒について、授業中の見取りではある程度できていたと思っていたが、実際は 50%程度であった。

⑶ 指導と評価（数学的な見方や考え方）の一体化

ア　授業中の評価

課題１において関数を正しく推測できた生徒が１人いたが、答え合わせをせずに課題２に進んだ。課題２を踏まえて、課題３において関数を正しく推測して確かめられた多くの生徒を「おおむね満足できる」状況（Ｂ）と評価した。

練習問題のときの机間指導において、前時の「努力を要する」状況の生徒を優先的に個別指導しながら、式を類推することができなかった生徒数名を「努力を要する」状況と評価した。

イ　自己評価表からの評価

主な今日の授業で分かったこと、気付いたこと

今日の授業で分かったこと，気づいたことを書いてください。

はじめは，自分が推測した式で本当にあっているか，不安でしたが，この式で間違いなさそうなことを確かめることができた。よかったです。
よく理解できた。
関連性に気づけた。

今日の授業で分かったこと，気づいたことを書いてください。

2次関数で式を考えるのは難しかったけど，1次関数で考えると式ができた。

今日の授業で分かったこと，気づいたことを書いてください。

関数のグラフをxの方向に平行移動する式は，プラスに移動するのが $y=a(x-p)^2$ で，マイナスに移動するのが $y=a(x+p)^2$ の式で出せることができることが分かった。

今日の授業で分かったこと，気づいたことを書いてください。

自分で関数の式の予想をたてるのは難しかったけれど，そのあと練習問題で関連性を見つけることができました。

ウ　指導の改善の工夫

⑺ 本時

「今日の授業で分かったこと、気付いたこと」には、推測の難しさについて記入している生徒は多かった。さらに、生徒が考える時間を確保するには、課題１の提示を改善すると数学的活動がより一層活発になるとともに数学的な見方や考え方を身に付ける授業ができると考えた。

課題１を次のような予想問題にする。どれが正しいのか、どう検証したらいいのかなど言語活動をさせることで思考力を広げる機会を与えることができる。その後にグループで発表させたり、検証からどの式が正しいと判断できるようになったかを説明させたりすることで数学的な見方や考え方を育成できる。

２次関数 $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に１だけ平行移動したグラフの式は、次の①～③のどれになると予想できるか。
①　$y=2x^2+1$　　②　$y=2(x+1)^2$　　③　$y=2(x-1)^2$

⑷ 次時

自己評価表の課題３にチェックした生徒が 50%程度であったため、回復指導を兼ねてはじめに次の小テストを解かせる全体指導を行うこととした。

【確認問題】３次関数 $y=2x^3$ を x 軸方向に１だけ平行移動した式を求めよ。

その後、次の課題に取り組ませることで平行移動の考え方を用いてグラフの指導を行うこととした。

２次関数 $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に 1、y 軸方向に 3 だけ平行移動した２次関数の式を求めよ。また、移動後の放物線のグラフをかけ。

⑷ 「努力を要する」状況と評価した生徒

練習問題の机間指導のときに個別指導するとともに、次時に確認問題を行った。正答率はクラス全体で 37 名（92.5%）であった。不正解の３名のうちの１名の生徒が「努力を要する」状況と評価していたので、確認問題の答えの解説において、その生徒とやりとりをしながら解答を導いた。

今回は全体指導での回復指導を行なったが、「努力を要する」状況の生徒が少ない場合、課題プリントを課したり、放課後等に個別指導を行ったりするなど別の方法も考えられる。

⑸ 定期試験問題

定期試験において、次の問題を出題した。

２次関数 $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に-4、y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線をグラフとする２次関数を求めよ。

正答率は 33 名（82.5%）であり、定着率が高かった。誤答例として、$y=(x+4)^2+3$、$y=2(x+4)+3$ など、もう少しで正答になる解答ばかりであった。

授業が進んでいく過程において、はじめは「数学的な見方や考え方」の観点であるものが、試験においては「知識・理解」や「数学的な技能」の観点に変わることがある。この問題も平行移動の条件から式を求めるものであり、観点別評価からすると知識・理解になるだろう。しかし、数学的な見方や考え方（類推の考え方）を意識した授業を実践したことで、生徒に２次関数のグラフの特徴についての理解を深めさせたのは間違いない。一方、「類推の考え方」に関する出題ができなかったことを反省している。

４　授業を振り返って

単元を通して育てる力を意識することができたので、各時間の目標が明確になった。

評価規準を設定することで、評価場面を意識して授業を行うことができたので、ワークシートを課題ごとに分けてその都度配布することになり、ポイントを絞り込んで考えさせることができた。

従来の授業では、$y=2(x-1)^2$ の式からグラフをかかせて x 軸方向への平行移動を考察させることが多かった。しかし、今回は逆に平行移動の考えから式を類推させる場面を設定し、数学的な見方や考え方を育てる場面を意識して授業をすることができた。２次関数の平行移動の考察のために１次関数を類推し、１次関数での平行移動を考察することで、類推した式を検証することができた。さらに $y=a(x-p)^2$、$y=a(x-p)^2+q$ の式を類推させることができた。生徒の実態から本時では触れなかったが、関数 $y=f(x)$ を x 軸方向へ p、y 軸方向へ q だけ平行移動した式が $y-q=f(x-p)$ となることまで

発展して指導することができると考えられる。

　生徒たちは、以前よりも授業や練習問題に意欲的に取り組む姿が多くあった。

　教師側は、ワークシートや自己評価表を回収し評価することで、授業の生徒の実態がつかめるようになり、次時の指導に生かすことができた。特に生徒の学力差が大きいクラスにおいて、「努力を要する」状況と評価した生徒への手立ての基準が明確になり授業を行いやすくなった上に、「努力を要する」状況と評価した生徒が納得して、回復指導に取り組むことができた。

事例２　指数関数・対数関数「対数」の指導の工夫
～記号化の考え方～

１　単元の指導計画・評価計画

(1) 単元の目標

対数の意味を理解するとともに、その有用性を認識することができるようにする。また、対数の基本的な性質を理解し、対数の計算をできるようにする。

(2) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
A1 対数やその性質に関心をもつとともに、それらを活用しようとしている。	B1 対数という概念を導入する過程を考察することができる。 B2 指数法則と対数の定義から、対数の性質を考察することができる。	C1 対数の記号や対数の性質を用いて、表現し処理することができる。 C2 底の変換公式を用いて、表現し処理することができる。	D1 対数の意味や対数の性質を理解し、基礎的な知識を身に付けている。

(3) 単元の指導計画並びに評価計画（４時間）

時間	学習活動	評価規準とのかかわり	評価方法
第１時間（本時）	指数の近似値を求め、対数を導入する。	B1、D1	観察、ワークシート、小テスト、自己評価
第２時間	指数法則と対数の定義から対数の性質を導く。	B2、D1	観察、小テスト、自己評価
第３時間	対数の性質を用いて、対数の計算をする。	A1、C1	観察、小テスト、自己評価
第４時間	底の変換公式を導き、等式の変形をする。	C2	観察、小テスト、自己評価

２　本時の計画

(1) 本時の目標

・指数方程式を満たす指数の近似値を求め、その値を記号 log で表す考え方ができる。(B1)
・対数の記号を用いて、指数や値を表現できる。(C1)

(2) 本時の「数学的な見方や考え方」とポイント

・片桐氏による「記号化の考え方」とは、『記号に表していこうとする考え方と記号化されたものをよんでいこうとする考え方とがある。そして、さらに数学的用語を用いて簡潔、明確に表したり、これをよんでいこうとする考え方も含めていくものとする』考え方である。
・数学の世界では、定義として割り切って指導した方が効率的であることが多いが、効率を追うあまり、学ぶ必要性や意義が生徒にとって明らかとならず、学習の意欲を削ぐことがある。可能な限り、定義が生まれるまでの過程を大切にした指導をしたい。また、考えることとは、決

して問題を解くときのことだけを指しているのではなく、数学的知識の意味等を自分で深く考えることも含まれる。

(3) 本時の「数学的な見方や考え方」の評価（評価規準）と「努力を要する」生徒への手立て

「十分満足できる」状況（A）

指数方程式を満たすxの値を記号に表していこうとする考え方ができる。さらに、２つの数字を用いて、自ら記号にすることができる。

「おおむね満足できる」状況（B）

指数方程式を満たすxの値を記号に表していこうとする考え方ができる。

「努力を要する」状況と評価した生徒への手立て（回復指導）

放課後、数学の記号化された例を挙げて指導する。

(4) 本時の展開

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
指数の確認をする。	ワークシート① 復習　ある細菌は 1 時間で 10 倍に数が増える。最初は細菌が 100 個であったとすると、3 時間後には細菌は何個になるか？	・指数法則を確認する。 ・課題１につなげるために 10 の累乗で表す。
指数方程式を立てる。 対数の意味を考える。	課題１　1 時間で 10 倍に数が増える 1 個の細菌がある。 （1）1 億倍になるのは何時間後か？ （2）2 倍になるのは何分後か？ （3）30 分後や 10 分後は何個の細菌があるか。 <予想される生徒の反応> （1）1 億＝10^8 なので 8 時間 （2）2 倍は 10 倍の 5 分の 1 なので 60÷5＝12 分 （3）30 分後は$10^{\frac{1}{2}}$個、10 分後は$10^{\frac{1}{6}}$個 ワークシート② 課題２　$10^x=2$ を満たす x の値を求めよう。 ①$10^0=1$、$10^1=10$ であるから x の整数部分は 0 ②$10^{0.3}=1.995\cdots$、$10^{0.4}=2.511\cdots$ であるから、 x の小数第 1 位の値は 3 となる ③$10^{0.30}=1.995\cdots$、$10^{0.31}=2.041\cdots$ であるから、 x の小数第 2 位の値は 0 となる この計算を繰り返すと、$10^{0.3010299\cdots}=2$　であるから、 １時間で 10 倍に増える細菌が 2 倍になるのは、0.3010299･･･時間後と分かる。 すなわち、約 0.3 時間＝18 分となる。	・隣の生徒と相談させ、積極的に意見が出るよう机間指導をしながら促す。 ・$10^x=2$ を満たす x を求めればよいことに気付かせる。 ・２人１組になり、１人が関数電卓で計算し、もう１人は記録する役割にする。 ・STEP１、STEP２は説明しながら進め、STEP３は各ペアのペースで進めさせる。

新しい記号を考える。	ワークシート③ 【発問】このxの値を表すよい方法はないだろうか？ 無理数を記号で表した考え方を思い出し、無限小数を記号にすることを考える。	・記号 log を導入する前に生徒に新しい記号を考えさせる。 評価【記号化の考え方】 指数方程式を満たすxの値を記号に表していこうとする考え方ができる。B1
	問題１　1時間で3倍の数になる細菌がある。 この細菌が5倍の数になるまでにかかる時間を求めよ。	・上の質問で生徒から新しい記号の案が出ていれば、その記号を使って表す。
対数の定義を理解する。	$10^x=2$を満たすxのことを、10を底とする2の対数といい、$x=\log_{10}2$と表す。 すなわち、$10^{\log_{10}2}=2$　であり、 $\log_{10}2=0.3010299\cdots$　である。	
	例題３　(1)　$2^3=8$　から　$3=\log_2 8$ (2)　$\frac{1}{2}=2^{-1}$　から　$-1=\log_2\frac{1}{2}$	・今まで扱ってきた数値（指数が整数の場合）について log を用いて表す。
	《指数と対数》 $a>0, a\neq 1, M>0$とするとき、 $a^p=M \Leftrightarrow p=\log_a M$	・指数と対数の関係を一般的にまとめる。 ・「底」「真数」という用語をここで指導する。
	問題２　次の□に適する数を求めよ。 (1)　$3^2=9$　から　$2=$ □ (2)　$\frac{1}{25}=5^{-2}$から　$-2=$ □	評価【数学的な技能】C1
振り返る。	自己評価表を記入する。	・自己評価表の活用を指導する。

(5) ワークシート、自己評価表

対数ワークシート①

２年　　組　　　　番　氏名

$\boxed{\text{復習}}$　ある細菌は 1 時間で 10 倍に数が増えるという。最初は細菌が 100 個であったとすると、3 時間後には細菌は何個になるだろうか。

$\boxed{\text{課題１}}$　1 時間で 10 倍に数が増える 1 個の細菌がある。

(1)　細菌の数が 1 億倍になるのは何時間後か。

(2)　細菌の数が 2 倍になるのは何分後か。

(3)　30 分後や 10 分後は何個の細菌があるか。

対数ワークシート②

２年　　組　　　　番　氏名

$\boxed{\text{課題２}}$　$10^x = 2$ を満たす x の値を求めよ。

STEP１：x の整数部分を求めよう！

$10^0 = \boxed{}$　　$10^1 = \boxed{}$ より、$\boxed{} < x < \boxed{}$

すなわち、x の整数部分は $\boxed{}$ であることが分かる。

STEP２：x の小数第１位を求めよう！

・$10^{0.1} =$

・$10^{0.2} =$

・$10^{0.3} =$

・$10^{0.4} =$　　　すなわち、x の小数第１位は $\boxed{}$ であることが分かる。

STEP３：x の小数第２位、小数第３位、小数第４位・・・とできるところまで調べてみよう！

STEP４：ワークシート①$\boxed{\text{課題１}}$に戻りましょう。

1 時間で 10 倍に数が増える細菌が、2 倍の数になるまでにかかる時間を x とすると、

x は方程式 $\boxed{}$ を満たす。

このとき $x =$ $\boxed{}$ 時間。すなわち 約 $\boxed{}$ 分であることが分かった！

対数ワークシート③

２年　　組　　　番　氏名

ところで・・・xの値を表すよい方法はないだろうか？

問題１

1時間で3倍の数になる細菌がある。この細菌が5倍の数になるまでにかかる時間を求めよ。

例題

(1) $2^3=8$を変形すると　$3=\boxed{\quad}$　　(2) $\frac{1}{2}=2^{-1}$を変形すると$\boxed{\quad}$

問題２　次の□に適する数を求めよ。

(1)　$3^2=9$　から　$2=\boxed{\quad}$　　(2)　$\frac{1}{25}=5^{-2}$　から　$-2=\boxed{\quad}$

自己評価表

２年　　　組　　　番　氏名

学習課題	自己評価
課題１ 指数方程式を立てる。	□細菌の数が2倍になるまでの時間を考えることができた。 □自分の考えた答えについて考察することができた。 □指数方程式を立てることができた。
課題２ 新しい記号を考える。	□xの値を記号にするよさに気付いた。 □指数の無限小数を表すよい方法を考えることができた。 □関数電卓を用いて、10の累乗の値を求めることができた。 □記号logの意味が理解できた。
問題１ 記号を用いて表す。	□記号を用いて表すことができた。
問題２ 対数の記号を用いて変形する。	□対数の記号を用いて、式を変形することができた。

授業アンケート

1　今日の授業について

よく分かった　　分かった　　あまり分からなかった　　全く分からなかった

（理由

）

2　今日の授業の感想を書いてください。

３　授業の記録

(1) 授業中の生徒の様子

復習の問題において 100,000 個という正答を全員が難なく求めることができたが、はじめから 100,000 を指数で表していた生徒はほとんどいなかった。そこで、教師から指数を用いて表現するように指示を出すと、簡単に10^5と変形できた。

課題１(1)では復習の解答において値を指数で表したことから、1 億を10^8として表した生徒が増加した。ほぼ全員の生徒が 8 時間後という答えを求めることができた。その求め方は時間をxとして指数方程式を立てた生徒は半数程度であり、その他の生徒は 1 を 10 倍ずつしながら、10 を何回掛けるのか数えながら求めていた。(2)では生徒の多くが 12 分後と答えたが、6 分後と答えた生徒は３名であった。周囲の生徒同士で相談させた結果、数人に発表してもらったときには全員の生徒が 12 分後という意見になってしまった。少数意見であった 6 分後を例に挙げて教師が説明して間違いであること確認してから、12 分後の場合について生徒に各自で計算させた。12 分後、24 分後、36 分後…と 2 倍ずつしながら考えていくことで、1 時間後には 10 倍を大幅に超えてしまうことを生徒は実感していた。答えが違っていることは分かった。(3)では 30 分後は$10^{\frac{1}{2}}$個、10 分後は$10^{\frac{1}{6}}$個、15 分後は$10^{\frac{1}{4}}$という答えが出てくるようになった。そこで教師が「どうやって考えたのか。どのような式が作れるか」とヒントを出したところ、ほとんどの生徒が(2)の答えを導くための$10^x=2$という指数方程式を立てることができた。同時に、その方程式を満たす実数xが、これまで学習してきた知識では求められないことを察知した様子であった。$10^{\frac{1}{2}}$の値を質問しても分からなかったので、関数電卓を使わせた。

課題２では、教師が小数第１位を求めるところまでを全体で説明し、小数第２位以降は２人１組のペアになり、各ペアのペースで求めさせた。初めて関数電卓を扱うこともあり、電卓に興味を示しながら意欲的に互いに協力して活動に取り組んでいるペアが多かった。ペアの中には$10^{0.31}$, $10^{0.32}$, $10^{0.33}$…と値だけ求めていて目的がずれてしまったり、計算から記録まで全て１人で行ってしまったりしているペアがあったので、机間指導を行いながら活動を進めさせた。

活動の進度はペアによって様々であったが、一番早く小数第６位まで求められていたペアの生徒にその結果を発表してもらい STEP 4 以降に進んだ。

ワークシート③の「ところで・・・xの値を表すよりよい方法はないだろうか？」の質問欄に記入した生徒は誰もいなかった。そこで、次のように、生徒の受け答えで記号化の必要性について説明をしてから対数の記号化へと話を進めた。

Ｔ：「小数第６位以下も循環しない数字が続くが、このような数を何というか？」
Ｓ：「無理数」
Ｔ：「無理数にはどのような数があるか？」
Ｓ：「π、$\sqrt{2}$など」
Ｔ：「πとはいくつのこと？」
Ｓ：「3.14････」
Ｔ：「$\sqrt{2}$とはいくつのこと？」
Ｓ：「1.4142･･･」
Ｔ：「これらは無理数だけど、どう表現しているの？」
Ｓ：「記号で表現している」
Ｔ：「最後まできちんと表すことができない無限小数は、今まで記号化して表現していた」

先の説明により記号化の必要性は納得していた。$10^x=2$を満たすxの値について自分で新しい記号をつくろうというのは初めての試みであったため、生徒は戸惑っている様子でなかなか意見は出てこなかった。そこで、普段から活発な生徒を指名したところ、自分の名前の頭文字を使い「Ｆ

２」という記号を発表してくれた。その記号を用いて「$10^x=3$を満たすx」を表現させせると、迷わず「Ｆ３」という答えが返ってきた。敢えてこのまま問題１に進み、そこでこの記号の不具合に気付かせるという授業展開とした。

問題１では、時間をxとした指数方程式$3^x=5$を立てられたが、xをＦの記号では表現できないという困惑の表情を浮かべていた。生徒にとってかなり難しい問題となってしまったようであるが、生徒はそんな表情の中に何とかしようと考えている雰囲気があった。「なぜＦの記号ではうまく表現できないのか」という質問に対し、「3と5の２つの数が表せない」と答える生徒がいたため、「Ｆ２」だけでなくもう１つの数字をつける必要があることに気付かせることができた。

「記号『Ｆ２』をつくったように考えてみてはどうか」と促したところ、「Ｆ５$_3$」「Ｆ５^3」の２種類の答えを多くの生徒がかくことができた。どちらの答えも間違いではないことを伝えた上で答えを１つにするために、記号の中から最も多い「Ｆ５$_3$」を答えとして全員で選んだ。数学の世界では、これを表す記号が対数$\log_3 5$であることを定義し、指数と対数の関係を一般化として黒板にまとめた。記号で用いる２つの数字が小さい数字3と大きな数字5で表すところが一致していたので、生徒は満足感があったようだ。

(2) 自己評価表

数学的な見方や考え方に関する自己評価の結果は次のようになった。

学習課題	自己評価
課題１ 指数方程式を立てる。	□細菌の数が2倍になるまでの時間を考えることができた。→19名（67.9%） □自分の考えた答えについて考察することができた。→10名（35.7%）
課題２ 新しい記号を考える。	□xの値を記号にするよさに気付いた。→16名（57.1%） □指数の無限小数を表すよい方法を考えることができた。→８名（28.6%）
問題１ 記号を用いて表す。	□記号を用いて表すことができた。→17名（60.7%）

課題１(1)や課題２STEP３については記入されていたが、それ以外の部分は未記入であるものが多かった。課題１(1)では復習の解答において値を指数で表したことから、100億を10^{10}として表した生徒が増加した。時間をxとして指数方程式を立てた生徒は12名（42.9%）であった。ワークシート①の記述から(2)において12分後と答えた生徒が約９割、6分後と答えた生徒が約１割であった。

課題２では、xの値を記号にするよさに気付いた生徒が16名（57.1%）、指数の無限小数を表すよい方法を考えることができた生徒は８名（28.6%）と半数になっている。

(3) アンケート結果

ア　今日の授業について

よく分かった	分かった	あまり分からなかった	全く分からなかった
５名（17.8%）	１８名（64.4%）	５名（17.8%）	０名(0.0%)

「よく分かった」「分かった」主な理由

理由
logでの表し方がしっかりと理解できたから。

〔理由
自分で考え方を引き出せるようになったから。〕

〔理由
logを使うことになるまでの過程の説明があったから。〕

イ　今日の授業の主な感想

小数が長々と出てきていたときは、分からないと
思ったけど、「log」になって理解できた。
分かりやすかったです。

⑷　指導と評価（数学的な見方や考え方）の一体化

ア　授業中の評価

課題２のときに、観察によって生徒を評価することは難しい状況であった。そこで、問題１において「記号『Ｆ２』をつくったように考えてみてはどうか」とヒントを与えたときに、「Ｆ５$_{3}$」「Ｆ５^{3}」のような２つの数字を使って答えをかくことができた生徒を「おおむね満足できる」状況（Ｂ）と評価した。

イ　自己評価表とアンケートからの評価

課題２において、xの値を記号にすることのよさに気付いた生徒16名（57.1%）を「おおむね満足できる」状況（Ｂ）と評価できる。アンケート結果から８割以上の生徒が授業を分かったが、評価規準に達していない生徒が多かったと判断できたので、次時に確認問題を実施した。

ウ　指導の改善の工夫

$10^x=3$を満たすxの表現を「Ｆ３」であると生徒が答えたときに、そのまま問題１に進んで記号の不具合に気付かせるという授業展開としたが、記号「Ｆ２」、「Ｆ３」と出てきた次の段階で、教師が10以外の底を提示し、本当にこの記号で十分かどうかを生徒に考えさせて意見交換させる場面をつくる授業ができる。また、授業の最後に、振り返りとして生徒同士で対数を記号でかく問題を出し合う場面、例えば「5を底とする2の対数を記号でかけ」をつくることもできる。

次時は、本時の生徒の様子から、次のような課題の提示から対数の性質の授業を行う。

例　$\log_{10}2+\log_{10}3=\log_{10}5$　と計算してよいだろうか。

新しいことを考えようといわれても自分で創造することのできない生徒が多かった本時を踏まえて、三角関数の加法定理と同様に、対数の性質で生徒が躓きやすい例を提示し、考察してから対数の性質を導く授業展開である。無意識に計算すると例のようになってしまうところを、関数電卓を利用して確かめる。計算の誤りに気付いたら次はどうすべきかを考える。指数法則などを利用して証明する。

(5) 確認問題と「努力を要する」状況と評価した生徒

ア　確認問題

確認問題
２年　　　組　　　番　氏名
$\log_2 16$は何を表しているか説明しなさい。

対数の値が整数になる確認問題を出題した。答案をみると、説明しながら４という値になるなど対数の意味を深く理解している生徒が４名（14.3%）いた。授業の印象が強く残っていたために無理数や無限小数のような答えをかいた生徒もいた。これらの生徒については、$\sqrt{4}$ のように、必ずしも記号 log で表された数が無理数とは限らないことを理解したようだった。

＜解答例＞

2 を底とする 16 の対数の記号、$2^x = 16$ から $x = 4$、$2^x = 16$ となる数 x を表す記号、$2^{\log_2 16} = 16$ など（15 名）、底が 2、真数が 16 など（10 名）、無理数、循環しない無限小数など（３名）

イ　「努力を要する」状況と評価した生徒

「努力を要する」状況と評価した生徒は、自己評価表で「問題１　記号を用いて表すことができた」にチェックの入っていなかった生徒のうち、確認問題で $\log_2 16$ が何を表しているか説明できなかった生徒とした。その生徒にこれまでに学んだ数学の記号化された例を挙げながら、対数の記号について指導を実施した。そして後日改めて確認問題を行い、「$\log_{10} 2$ は何を表しているか説明しなさい」と出題したところ、「10 を底とする 2 の対数の記号」や「$10^x = 2$ となる数 x を表す記号」と答えることができたため、対数についての記号化の考え方が理解できたと判断した。

４　授業を振り返って

授業アンケートにおいて、23 名（82.2%）の生徒が、今日の授業は「よく分かった」、「分かった」と答えている。本時の目標は、指数方程式を満たす指数の近似値を求め、その値を記号 log で表すことの有用性に気付くことであった。そのために、関数電卓を利用して近似値を探し出す経験をさせることで、対数の意味とその必要性を実感させたり、対数を記号 log で表すことにより簡潔、明瞭に表現できるなど記号化のよさを実感させたりすることをねらいとした授業を行ったのである。対数を正しい記号でかくことが目標ではなかったわけで、生徒が対数の記号で表すことができなかったことを評価してしまわないように気を付けた。数学的な見方や考え方という観点はそのあたりを評価するところが難しいのだと思う。誤答の原因を考えると、正しい記号は次時から指導していけばすぐに正しく表すことができそうである。教師が焦らずじっくりと取り組む姿勢が大切であると感じた。

新しいことを考えようといわれても自分で創造することのできない生徒が多い実態が明らかになった。日頃「教えたことを覚えさせる」というこれまでの指導を行ってきていたことを反省させられた。このように知識の詰め込みでなく自ら考える力を身に付けさせるために、授業を改善していかなければならないことを感じた。また、例えば、前節の指数関数の単元において方程式を解くことは行ったが、方程式をつくることは行わなかった。方程式がつくれない生徒が多いことが授業の中で分かったので、補足しながら授業を進める状況になった。このように指導計画の後にも、これまでの指導の改善をしていかなければならない。

事例３　微分・積分の考え「導関数の応用」の指導の工夫

～　発展的な考え方　～

１　単元の指導計画・評価計画

(1) 単元の目標

導関数を用いて関数の値の増減や極大・極小を調べ、グラフの概形をかくことができるようにする。また、微分の考えを事象の考察に活用することができるようにする。

(2) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
A1　導関数を用いて関数の値の増減や極大・極小を調べようとしている。 A2　微分の考えを事象の考察に活用しようとしている。	B1　関数の値の増減や極大・極小を微分の考えを用いて考察できる。 B2　いろいろな事象を微分の考えを考察し表現したり、その過程を振り返ったりすることなどを通して、数学的な見方や考え方を身に付けている	C1　導関数を応用して接線の方程式を求めることができる。 C2　関数の増減及び極値を調べ、グラフの概形をかくことができる。	D1　微分係数と接線の傾きについて理解し、知識を身に付けている。 D2　導関数を用いて関数の値の変化を調べることを理解している。

(3) 単元の指導計画並びに評価計画（７時間）

時間	学習活動	評価規準とのかかわり	評価方法
第１時間	曲線上の点における接線の方程式を導く。	C1、D1	観察、ワークシート、自己評価、小テスト
第２時間 第３時間	関数の値の変化の様子を、導関数を用いて調べる。 関数の増減や極大・極小を調べて、グラフの概形をかく。	A1、B1、C2	観察、自己評価、小テスト
第４時間	導関数を用いて、関数の最大値・最小値を求める。	D2	観察、自己評価、小テスト
第５時間 第６時間 第７時間 （本時）	関数の増減を調べて、３次方程式の実数解の個数を求めたり、不等式を証明したりする。 グラフを表す３次関数の式を複数の解法で求める。	A2、B2	観察、ワークシート、自己評価、小テスト

２　本時の計画

(1) 本時の目標

・グラフを表す３次関数の式を求めようとしている。(A2)

・いろいろな角度から問題を考察することができる。(B2)

(2) 本時の「数学的な見方や考え方」とポイント

・片桐氏による「発展的な考え方」とは、『１つのことが得られても、さらによりよい方法を求めたり、これを基にして、より一般的な、より新しいものを発見していこうとする考え方』である。

・問題解決後に、数学的に思考したことを自分自身に問いかけたり、他と議論したりして振り返り、考察することを大切にしたい。このような振り返りにより、自分の数学的な考えの正しかったことが分かり、それらが自らの知識として構成されるとともに、次なる段階での創造的な思考に有意に働くと考える。アンケートを用いて、本時の学習で分かったことはどういうことか、本時の学習でどのように考えてきたのかなどについて、自らの学習過程を振り返らせたい。

(3) 本時の「数学的な見方や考え方」の評価（評価規準）と「努力を要する」生徒への手立て

「十分満足できる」状況（Ａ）

１つの解法だけでなく、別解を考えることができる。さらに、より新しい解法や条件が変われればどうなるのか、一般化できないかなどを考えることができる。

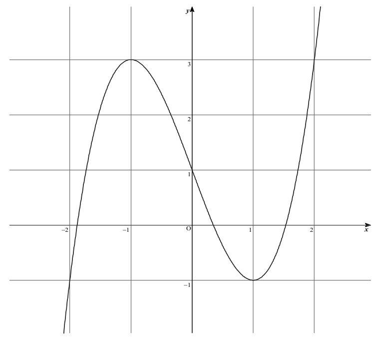
「おおむね満足できる」状況（Ｂ）

１つの解法だけでなく、別解を考えることができる。

「努力を要する」状況と評価した生徒への手立て（回復指導）

役に立った重要なアイデアをノートに記録させ、そのよさを考えるきっかけを与える。

(4) 本時の展開

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
３次関数のグラフの性質を言葉や式に表す。	$\boxed{\text{課題}}$　３次関数のグラフがある。 （１）グラフから読み取れることを言葉や式で表せ。また、増減表をかけ。 （２）３次関数をいろいろな解法で求めよ。 <予想される生徒の解答例> （１）３次の係数が正、y 切片が１、 $x=-1$ で極大値 3、$x=1$ で極小値 -1、 $x \leqq -1$、$1 \leqq x$ で増加、$-1 \leqq x \leqq 1$ で減少、 $(-2,\ -1)$、$(2,\ 3)$ を通る	
３次関数を決定する。	（２）（解法１）３次関数を一般形におく。 ①　通る点の条件から、４元１次連立方程式を解き、係数を決定する。 ②　導関数が満たす条件から、導関数の係数を決定する。 （解法２）グラフを平行移動すると３次関数を因数分解形における。 y 軸方向に１だけ平行移動して得られる３次関数と x 軸の共有点の x 座標から３次関数を因数分解形 $y=a(x+2)(x-1)^2$ とおく。	$\boxed{\text{評価}}$【関心・意欲・態度】$\boxed{\text{A2}}$ $\boxed{\text{評価}}$【発展的な考え方】$\boxed{\text{B2}}$ １つの解法だけでなく、別解を考えることができる。 ・２人１組で考えさせ、多様な考え方や新しい考え方を見つけることに重点を置く。

微分の逆の操作を考える必然性を理解する。	（解法３）導関数から３次関数を導く。 　関数の増加・減少の様子から、導関数を $y'=a(x-1)(x+1)$ とおき、微分の逆操作を考える。 ※生徒から解法３が出ない場合の発問 ・「微分して、３次関数のグラフがかけた。では、グラフから３次関数のどんな式が分かるか。」 ・「増減表から、導関数の式が分かるか。」 ＜予想される生徒の解答例＞ $y'=(x-1)(x+1)$、$y'=a(x-1)(x+1)$ 【発問】y' から y を求めるには、どうしたらいいか。 ＜予想される生徒の反応＞ ・微分を逆に行う ・微分して $y'=ax^2-a$ になる関数を考える ・$3x^2$ を x^3、$2x$ を x^2 に置き換える ＜予想される生徒の誤答＞ $y=\frac{a}{3}x^2-ax$、$y=\frac{a}{3}x^2-ax+1$	・「微分する」と「積分する」（「導関数」と「不定積分」）を対比する。記号の導入や積分定数は次時にする。 ・積分定数については、本時はふれず、グラフの y 切片から、３次関数の定数項が１であることのみ確認する。
周囲の生徒と解法を振り返る。	それぞれの解法のよさや積分の必然性などを振り返る。	・まず、自分自身で振り返った後、周囲の生徒と振り返らせる。
自己評価で振り返る。	自己評価シートを記入する。	・自己評価表の活用を指導する。

(5) ワークシート、自己評価表

ワークシート

２年（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　）

課題１　＜グラフから読み取れたこと＞

言葉で表してみよう	それを式で表してみよう
・ ・	

課題２　＜３次関数をいろいろな解法で求める＞

（　　　　）さんの方法	（　　　　）さんの方法
（　　　　）さんの方法	（　　　　）さんの方法

自己評価表

２年（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　）

学習課題	自己評価
課題 （１）グラフを読み取り、言葉や式で表す	□言葉や式で表すことができた。 □増加・減少に着目できた。 □増減表にまとめることができた。 □導関数を求めることができた。
課題 （２）もとの３次関数をいくつかの解法で求める。特に、新しい解法を見つける	□少なくとも１つの方法で、３次関数を求めることができた。 □複数の解法で考えた。 □平行移動を考えようとした。 □導関数からもとの関数を求める方法があることがわかった。 □導関数からもとの関数を求める逆演算を考えられた。

アンケート

１　今日の授業の理解度について

よく理解できた　　理解できた　　理解できなかった　　全く理解できなかった

理由「

」

２　今日の授業で分かったことや特に大切だと思ったことは何ですか？

３　今日の授業の感想を自由に書いてください。

３　授業の記録

(1) 授業中の生徒の様子

課題（1）のグラフを読み取ることについては、極値やその極値を与える x の値、通る点などはすぐに出てきたが、増加・減少についての答えはなかなか出てこなかった。それらから増減表をつくることはできたが、関数の増加・減少を不等式で表すことはできなかった。

課題（2）では、３次関数を一般形において解く生徒が多かった。極値を与える x の値が２次方程式の解であることを利用して解と係数の関係から３次関数を決定した生徒もいた。生徒は課題を解くことに一生懸命になっていた。解けた生徒に別解を考えさせてみたが、グラフを平行移動させる解法２の考え方をする生徒はいなかった。増減表から y' の式を考えさせてみると、生徒はすぐに $y'=a(x-1)(x+1)$ を導いた。 $y'=ax^2-a$ と変形した後、 y' から y を求めるにはどうしたらいいかと発問すると、微分して y' になる式を考えると答えたので、各自でその式を求めさせた。ここで余裕が出てきたのか、答えに興味をもち始めたのか周囲の生徒と相談しはじめる生徒がでてきた。教師が y 切片について特に触れなくても答えを導きだしていた。他の生徒の意見が自分のより深い理解へとつながっていることを実感している生徒が多数みられた。

答え合わせの際、 y 切片の確認をして、他の解法との比較を行った。少ない文字定数で関数をおけることや計算の簡潔さなどから解法３が最もよい解法として選ばれた。

(2) ワークシート、自己評価表

ア　ワークシート

生徒全員のワークシートに複数の解答がかかれていた。

主な記入例

課題１　＜グラフから読み取れたこと＞

言葉で表してみよう	それを式で表してみよう
・$x=-1$ で極大値3 ・$x=1$ で極小値 -1 ・$(2,3)$ を通る ・$(-2,-1)$ を通る ・$x\leqq-1$, $1\leqq x$ のとき増加 ・$-1\leqq x\leqq1$ のとき減少 ・x^3 の係数が正 ・y 切片が1	・$f(-1)=3$ かつ $f'(-1)=0$ ・$f(1)=-1$ かつ $f'(1)=0$ ・$f(2)=3$ ・$f(-2)=-1$ ・（3次の係数）>0 ・$y=1$

x	…	-1	…	1	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	3	↘	-1	↗

課題２　＜３次関数を求めるいろいろな方法・新しい方法＞　$y=x^3-3x+1$

（　　　　）さんの方法

3次関数であるから

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(1)=-1$, $f(-1)=3$, $f(2)=3$, $f(-2)=-1$ を代入

連立方程式を解く

一般形において4元1次方程式を解く

（　　　　）さんの方法

$y'=3ax^2+2bx+c$

$\left.\begin{array}{l} f'(-1)=0 \\ f'(1)=1 \\ f(2)=3 \\ d=1 \end{array}\right\}$ 4元1次

（　　　　）さんの方法

$y'=3ax^2+2bx+c$

和：$(-1)+1=-\dfrac{2b}{3a}$　　$b=0$

積：$-1=\dfrac{c}{3a}$　　$c=-3a$

$f(-1)=3$

$d=1$

解と係数の関係

（　　　　）さんの方法

微分する　$y'=ax^2-a$

$y=\frac{1}{3}ax^3-ax+1$　積分する

$f(1)=-1$

$\frac{1}{3}a-a+1=-1$

$-\frac{2}{3}a=-2$

$a=-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$

$a=3$

イ　自己評価表

数学的な見方や考え方に関する自己評価の結果は次のようになった。

学習課題	自己評価
課題 （２）もとの３次関数をいくつかの解法で求める。特に、新しい解法を見つける。	□複数の解法で考えた。→36 名（92.3%） □平行移動を考えようとした。→２名（5.1%） □導関数からもとの関数を求める逆演算を考えられた。 →35 名（89.7%）

(3) アンケート結果

授業の理解度についての結果は次のようになった。

よく理解できた	理解できた	理解できなかった	全く理解できなかった
13 人(33.3%)	26 人(66.7%)	0 名(0.0%)	0 名(0.0%)

主な「理由」、「授業でわかったことや特に大切だと思ったこと」、「感想」は以下のとおりである。

1　今日の授業の理解度ついて

よく理解できた　　理解できた　　理解できなかった　　全く理解できなかった

理由「友達と意見を出し合うことで、自分が気づけなかった点を知ることが出来たから。

1　今日の授業の理解度ついて

よく理解できた　　理解できた　　理解できなかった　　全く理解できなかった

理由「自分でも何個か解法を見つけられたし、他の人の解法も理解できたから。

1　今日の授業の理解度ついて

よく理解できた　　理解できた　　理解できなかった　　全く理解できなかった

理由「自分ではあまり思い浮かばなかったけれど、いろいろな考え方があって
すごいなーって思ったから。
」

2　今日の授業で分かったことや特に大切だと思ったことは何ですか？

公式を覚えるのも大切だが、どうしてこうなるのかと疑問を持つことや、
様々な方法を探したり、既習範囲の内容を使って３次関数を求めるなど、色々な見方ができる

2　今日の授業で分かったことや特に大切だと思ったことは何ですか？

数学って考え方がいろいろあっておもしろいと思った。
そのいろいろなやり方を見つけ試していくことって大切だし、理解につながる。

2　今日の授業で分かったことや特に大切だと思ったことは何ですか？

いろいろな解法を考えてみることで新しい発想が生まれる！

3　今日の授業の感想を自由に書いてください。
3次関数の求め方を考えたり、他の人と考えを共有したりできてよかったです。

3　今日の授業の感想を自由に書いてください。
受け身の授業でなく自分たちで積極的に考えることが出来て、理解度が深まり、楽しかったです。

(4) 指導と評価（数学的な見方や考え方）の一体化

ア　授業中の評価

問題を解く時間が生徒によって差があったものの、その後は全ての生徒が別解を一人で考えたり、周囲の生徒と相談して考えたりできていたので、「おおむね満足できる」状況（B）と評価した。

イ　ワークシートと自己評価表からの評価

ワークシートの記述の中に、自分一人でグラフから $y'=a(x-1)(x+1)$ を求めている生徒が４名いた。そのうち１名は、積分することで３次関数を決定していた。残りの３名は、３次関数の一般形の導関数と恒等式となることから３次関数を決定していた。この生徒３名は、「十分満足できる」状況（A）と評価できる。

自己評価で平行移動を考えた２名の生徒のうち１名はワークシートに記述はなかった。もう一人の生徒はワークシートに記述があるが３次関数の決定まではいかなかった。記述のあった生徒は「十分満足できる」状況（A）と評価できる。

ウ　授業の改善の工夫

授業中の生徒観察と、自己評価表の「導関数からもとの関数を求める逆演算を考えられた」生徒が 35 名（89.7%）いたので、次時は生徒に不定積分の積分定数の意味や積分の公式・性質を導かせる授業計画を考えた。また、グラフから導関数 y' を求めることに時間がかかるので、数学が得意でない他のクラスにおいて積分の導入の授業を行う場合は、はじめの課題は導関数 y' の提示から行い、積分操作の考察に時間をかけようと考えた。

本時のグラフの読み取りにおいて、増加・減少に着目できていないことが分かった。数学Ⅱにおいて導関数を使って関数の増減を調べる目標はあるが、数学Ⅱの範囲では導関数の符号と関数の増減との関係を証明することはできない。数学Ⅲの指導のときには平均値の定理を用いて、そのことを直感的に確認するとともに、グラフの凹凸、変曲点も含めて導関数の符号との関係をつかめるような指導の工夫を考えたい。

(5) 「努力を要する」状況と評価した生徒

授業中に「努力を要する」状況と評価した生徒はいなかったが、問題解決に役に立った重要な考え方をノートに記録するよう全体に指示をした。自己評価で複数の解法を考えられなかったと回答していた生徒３名に対して、放課後、ノートの記録確認やそれぞれの解法のよさなどを質問するなど５分程度の指導を行った。ノートに記録があり、解法のよさにも納得していた。

４　授業を振り返って

これまで、講義形式の授業ばかりで、自ら解法を見つけ出すような授業ができていなかった。生徒が解法を他者に説明したり、他者から聞いたりする様子は、真剣かつ楽しそうであった。そのことはアンケートにも記入されていたことから分かるし、数学的な見方や考え方をより一層実感できたようである。

昔から丁寧に教えることはよいと思われているが、どの部分について丁寧なのか問われなければならないのだろう。丁寧な指導とは、生徒が考えなければならないところまで立ち入って教えることではなく、一人一人の数学的な見方や考え方に目を向け、問題解決の過程をじっくり見守り、必要なときに適切な助言をものことであることを痛感させられた。

日頃から基本的な知識・技能は身についていると思うのだが、それが活用できないと感じていた。その原因は、生徒が自分でその知識や技能を学び取っていない授業を教師が行っていたことだと考えられる。数学科の目標の文頭に「数学的活動」を出して強調されたのはそのような理由からであり、そのために指導の工夫をしていきたい。

Ⅳ　まとめ

１　成果と課題

各事例では、数学的活動の充実と評価を生かすことによって、指導と評価の一体化を図ることができた。これまでの授業において、教科書にあることを丁寧に、あるいは繰り返し教えたり、確認のためのドリルの時間を十分に取ったりすることで、「数学的な技能」や「知識・理解」の観点の目標を達成することはできていたので、今回は特に「数学的な見方や考え方」の観点を育成する授業を実践した。授業では、教師は説明を最小限にし、生徒が主体的に取り組むような学習活動を取り入れ、生徒が考える時間を大切にした。教師は生徒の考えることを支援するような姿勢で臨んだ。その結果、「数学的な見方や考え方」の観点における評価はおおむね満足できる状況であった。

指導目標に準拠した評価（いわゆる絶対評価）や観点別学習状況の評価について、今回の研究協力員である３名の先生方が授業実践を踏まえての感想を聞いてまとめてみると、いずれの先生も「生徒一人一人の状況に目を向けるようになる」が最も実感されている。また、「授業の目標が明確になり、学力などを多角的に育成することができる」、「生徒の学力などの伸びがよく分かる」ということも実感している。一方、課題として「学習状況の評価の資料の収集・分析に負担を感じる」と絶対評価や観点別学習状況の評価の効率化に課題があることが分かった。また、観点別学習状況の評価ができるように定期試験を改善することが課題として残っているが、さらに研究・検討を重ねていく必要がある。

２　授業力の向上を目指して

学習成績の評定方法が、中学校において「集団に準拠した評価」（相対評価）から「目標に準拠した評価」（いわゆる絶対評価）へと変更されたことを契機として、高等学校においても、「観点別評価」や「指導と評価の一体化」が重要な課題となっている。

また、高等学校数学科の学習指導要領では、従来のような、「数学的な技能」「知識・理解」が中心的位置を占めていた指導方法から、「数学的な見方や考え方」を指導の中心に据えたり、数学に対する「関心・意欲・態度」を重視したりする指導方法へと転換を迫るものとなっている。すなわち、多面的な観点を取り入れることにより、数学教育上のバランスが保たれた授業展開や評価を行い、認知面とともに情意面を育てることを求めているといえる。しかし、観点別評価に対する認識は必ずしも十分とは言えない現状があり、各学校においてその趣旨を生かしきることができるかという懸念がある。

社会の変容とともに生徒たちの気質や生活が変わり、従来の予習・授業・復習をサイクルとする学習の在り方が崩れ、心が学習に向いていない現状がある。生徒の学習活動は「授業だけが半ば孤立する」形で行われているのであり、教師はその現実に対峙して、「授業が、学びの場であり得ているか」を真摯に問わなければならない。生徒たちの学ぶ意欲を回復させるために「授業において何をすべきか」を真剣に考え、できるだけ速やかに具体的な授業改善の試みを実行する必要がある。観点別評価をそのような文脈でとらえ、授業改善の突破口として前向きな対応をするべきである。

指導と評価の一体化を図る視点から授業を構成するとき、まず第１に、指導目標を評価の４観点から分析することが重要である。これまで、「数学的な技能」や「知識・理解」に比べて、「関心・意欲・態度」と「数学的な見方や考え方」の観点からの目標設定が不十分であるケースが多く見られてきた。この２つの観点については、日頃から、数学科としてどのような評価をしようとしているのかについて、明確な考えをもっておくことが必要である。そして第２に、指導目標を達成するための学習手段を適切に設定するとともに、学習過程において、「関心・意欲・態度」や「数学的な見方や考え方」を育むために生徒が自主的・主体的に取り組める学習の場面を設定し、その評価が適切に行えるような場面がな

ければならない。
　目標に準拠した評価で大切なことは、教師は評価を指導の改善に生かすことであり、生徒は評価を総括した結果を基に自分の学習を振り返って適切に自己評価し、それをその後の学習に生かすことである。つまり、評定をして終わるのではなく、教師はそれを指導の改善に生かし、生徒はより意欲的に学習するようになることが大切である。
　目標に準拠した評価の理解と実践をぜひ、お願いしたい。

参考・引用文献
「高等学校学習指導要領解説　数学編」（文部科学省　平成 21 年 12 月）
「評価規準の作成，評価方法等の工夫改善のための参考資料」
（国立教育政策研究所　教育課程研究センター　平成 24 年７月）
「指導計画の作成と学習指導の工夫」（文部省　平成４年５月）
「中等教育資料」（学事出版）
「数学的な考え方の具体化」（片桐重男　明治図書出版）
「中学校新数学科　数学的活動の実践プラン集」（明治図書出版）

◇平成25年度高等学校における教科指導の充実　研究協力委員・研究委員（数学科）

研究協力委員

栃木県立宇都宮清陵高等学校	教諭	涌井　紀子
栃木県立鹿沼商工高等学校	教諭	佐藤　　誠
栃木県立矢板東高等学校	教諭	湯澤　有孝

研究委員

栃木県総合教育センター　研修部	副主幹	山口　信一
栃木県総合教育センター　研究調査部	指導主事	寺崎　義人

高等学校における教科指導の充実
数学科における指導と評価の一体化
～数学的な見方や考え方の育成を目指して～

発　行　　平成26年3月
栃木県総合教育センター　研究調査部
〒320-0002　栃木県宇都宮市瓦谷町 1070
TEL 028-665-7204　　FAX 028-665-7303
URL http://www.tochigi-edu.ed.jp/center/