

数 学 科

- 事例 1** 思考力の育成を目指したデータの分析の学習
 ～ 関係付けに焦点を当てて ～
 p. 10
- 事例 2** 思考力・判断力・表現力を高める授業の実践
 ～ 自らの思考を客観視、再構築するために ～
 p. 20
- 事例 3** 数学的な思考力を育む指導
 ～ 既習事項との関連性をとらえ、
 問題解決力の育成を目指した授業実践 ～
 p. 30

研究協力委員

栃木県立宇都宮東高等学校	教諭	折 原 布三枝
栃木県立真岡高等学校	教諭	小 林 浩 二
栃木県立那須拓陽高等学校	教諭	関 根 智 子

研究委員

栃木県総合教育センター

研修部	副主幹	小 川 賢 一
研究調査部	指導主事	中 條 康 雄

○ 調査研究に当たり

次期学習指導要領に向けた「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について」（答申）が平成 28 年 12 月 21 日、中央教育審議会から出された。

高等学校においては、社会で生きていくために必要となる力を共通して身に付ける「共通性の確保」と、一人一人の生徒の進路に応じた多様な可能性を伸ばす「多様性への対応」の観点を軸にしながら、高大接続改革の動きを踏まえつつ、教科・科目の構成を見直すことが示されている。

算数・数学においては、「社会生活などの様々な場面において、必要なデータを収集して分析し、その傾向を踏まえて課題を解決したり意思決定をしたりすることが求められていることから、小・中・高等学校教育を通じて統計的な内容等の改善について検討していくことが必要である」と、統計に関する学習の充実や数学を積極的に活用する態度を育成する観点から、新たに「数学C」を設けて高等学校数学科を「数学Ⅰ」、「数学Ⅱ」、「数学Ⅲ」、「数学A」、「数学B」、「数学C」に再編することとなった。現行の学習指導要領において、主として専門学科に開設される教科「理数」が、次期学習指導要領では各学科に共通する教科として設置された上で、「理数探究基礎」及び「理数探究」を新設することなどを踏まえ、「数学活用」を発展的に廃止するが、その内容を「数学A」、「数学B」、「数学C」に移行するとしている。

現行の学習指導要領において重視されている学力の三要素のバランスのとれた育成や、言語活動や体験活動の充実等については、次期学習指導要領においても引き続き重要としている。また、次期学習指導要領においては、学習の内容と方法の両方を重視し、子供の学びの過程を質的に高めることを目指しており、単元や題材のまとまりの中で、子供たちが「何ができるようになるか」を明確にしながら、「何を学ぶか」という学習内容と、「どのように学ぶか」という学びの過程を組み立てて行くことが重要とされている。

そこで、本研究においては、現行の学習指導要領を踏まえるとともに、次期学習指導要領において重視されるであろう内容を視野に入れ、数学的な思考力の育成に焦点をあてることとした。平成 26 年度及び平成 27 年度に栃木県総合教育センターが行った思考力・判断力・表現力の育成に関する調査研究（小・中・高）において提案した、「考える技法」である「四つの思考のすべ」【比較】、【分類】、【関係付け】、【理由付け】を参考にしながら行った研究協力員の所属校における 3 つの実践事例を紹介する。

事例 1 思考力の育成を目指したデータの分析の学習 ～ 関係付けに焦点を当てて ～

1 ねらい

生徒の思考力・判断力・表現力等の育成が重視される中で、数学科の目標の1つとして、事象を数学的に考察し表現する能力を高めることが掲げられている。

本事例では、数学Ⅰの「データの分析」の単元において、基本的な考え方を理解するとともに、それらを用いてデータを整理・分析し、データの傾向を把握しながら比較する実践を行った。数学を苦手としている生徒が多いため、「データの分析」の単元では、身近な事象から数学への興味・関心をもって学習へ取り組むことができるのではないかと考えた。思考力を育むための「思考のすべ」、特に【関係付け】に着目し、3つの場面を設定しながら数学的活動が実現される指導を行った。なお、生徒の変容を見るためにコンセプトマップを用いた。

また、今回の調査研究の対象生徒は、1年次から継続して数学Ⅰを学習している食物文化科の2年生である。

2 授業実践

(1) 単元名

データの分析（データの散らばり）

(2) 単元の目標

統計の基本的な考えを理解するとともに、それらを用いてデータを整理・分析し傾向を把握できるようにする。

(3) 単元観

中学校においては、ヒストグラムや代表値などにより資料の傾向を捉えることや、資料を整理して活用すること及び標本調査などを学習している。

ここでは、中学校の復習を含め、目的に応じてデータを整理し、四分位数、四分位範囲、四分位偏差、分散及び標準偏差などに着目させ、データの傾向を的確に把握することができるようにする。

(4) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
A1 度数分布表、ヒストグラム、代表値、四分位数、四分位偏差、分散及び標準偏差などを用いてデータの傾向を把握し、それらを事象の考察に活用しようとしている。	B1 度数分布表、ヒストグラム、代表値、四分位数、四分位偏差、分散及び標準偏差などを用いてデータの傾向を捉え、それらを的確に表現することができる。	C1 度数分布表、ヒストグラム、箱ひげ図を作ることができる。 C2 代表値、四分位数、四分位偏差、分散及び標準偏差などを求めることができる。	D1 度数分布表やヒストグラムの意味を理解している。 D2 代表値、四分位数、四分位偏差、分散及び標準偏差などの意味を理解している。

(5) 単元の指導計画と評価計画

時間	学習活動	評価規準とのかかわり	評価方法
第 1 時間	調査① コンセプトマップ① 度数分布表・ヒストグラムを作成し、データを整理する。	C1 D1	ワークシート、コンセプトマップ
第 2 時間	データの特徴代表値（平均値・中央値・最頻値）を用いて 1 つの数値に表す。	C2 D2	ワークシート
第 3 時間	データの散らばり具合を数値で表し、箱ひげ図を作る。	C1	ワークシート
第 4 時間	データの各値を求める。 調査② コンセプトマップ②	A1 B1	ワークシート、コンセプトマップ
第 5 時間 (本時)	ハンバーガー 3 店舗について比較をする。 調査③ コンセプトマップ③	A1 B1	ワークシート、発表、コンセプトマップ
第 6 時間	データの分布の特徴を分散・標準偏差を用いて数値で表す。	C2	ワークシート、机間指導
第 7 時間	2 つの変量について、相互の関係を調べる。	B1	ワークシート
第 8 時間	正負の相関を数値で表す。 コンセプトマップ④	B1	ワークシート、コンセプトマップ

※ 調査について

ハンバーガー A 店、B 店、C 店のどの店で購入したいか、同じ質問の調査を 3 回行った。行った順番に調査①、調査②、調査③とした。

A 店、B 店、C 店における、ハンバーガーの値段

A 店

(単位 円)

320	390	270	440	360	310	300	250	370	430	490	300	380	440	350
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

B 店

(単位 円)

510	230	300	400	500	210	250	460	520	260	330	450	500	360	220	200	530	250
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

C 店

(単位 円)

290	260	310	280	240	330	260	210	280	340
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

質問

どの店で購入したいですか？ また、その理由も記入してください。

図 1 生徒配付資料（イメージ）

※コンセプトマップについて

コンセプトマップとは、概念（コンセプト）と概念を線で結び、概念間の関係を示した図である。

各調査①～③を行ったすぐ後に、それぞれコンセプトマップ①～③を作成した。

(6) 本時の展開（第5時間）

本時の目標

- ・統計の基本的な考え方を理解し、活用しようとしている。（A1）
- ・データを、度数分布表、ヒストグラム、代表値、四分位数、箱ひげ図などを用いて分析し傾向を把握して的確に表現できる。（B1）

指導内容	学習内容・活動	指導上の留意点
今までに学習した内容の復習と問題の把握をさせる。	・相対度数、ヒストグラム、代表値、四分位数、四分位偏差を確認し、またA店、B店、C店のハンバーガーの値段について確認する。 ・前時に行ったワークシート（調査2）をもとに、A店、B店、C店のどの店でハンバーガーを購入したいか、またなぜそのように考えたのかを確認する。	・前時までのワークシートを用いて確認させる。 評価【関心・意欲・態度】A1 既習内容を踏まえてデータを活用しようとしている。
データを比較し、店のよさとなる根拠を示させる。	・3、4名の班となり、班ごとにA店、B店、C店の中から1つの店を決定する。他の人にその店で購入してもらえよう説得するための根拠を考え、ワークシートに記入する。 ・班ごとに意見を出し合いながらカラーボードにまとめる。	・店の決定はこちらから指示する。自分が購入したい店とは異なる場合もある。 ・別々の用紙になっている相対度数、ヒストグラム、箱ひげ図を班ごとに配布。 ・できるだけ多くの根拠を考えさせる。 評価【数学的な考え方や見方】B1 データを分析し、的確に表現することができる。
まとめた根拠を発表させる。 他の意見を踏まえ、データについて分析させる。	・班ごとに発表をする。その店で購入してもらうための根拠を具体的に述べる。 ・各班の発表をもとに、気付いた点、わかったことをまとめ、意見を述べる。	・各班の意見の共通点、相違点について意識させる。 ・データの様々な概念についてその関連を意識させる。 ・各班の発表を聞いて、再度データについての考えをまとめさせる。
どの店で購入したいか考えさせる。また、その根拠を記入させる。	・各班の発表をもとにもう一度、A店、B店、C店のどの店でハンバーガーを購入したいか、考える。またなぜそのように考えたのかをワークシートに記入する（調査3）。 ・コンセプトマップを作成する。	・他の人の意見をもとに、自分の考えを深める。

3 授業の様子

(1) 授業における思考の流れ

ア **思考1** 明確化

3、4名の班となり、各班で担当の店（A店、B店、C店）を決定する。その店でハンバーガーを購入してもらえるような根拠をまとめ、発表する。今までに習った知識やそれ以外のことも想像し、自分の考えを記入する。

- ・まず、自分の考えをワークシートに表現し、明確化する。
- ・班ごとに話し合って意見をまとめ、カラーボード（カラーボードの色はA店が黄色、B店が水色、C店が白色）に記入する。
- ・カラーボードを黒板に貼り、各班1名が発表する。

イ **思考2** 共有

各班の発表を聞いて他者の考えを理解し、気付いた点やわかったことをまとめる。

- ・各班の発表をもとに多様な考えを共有し、新たに気付いた点をまとめる。
- ・まとめたものについて、数名が意見を述べ、他者の意見を聞く。

ウ **思考3** 深化

授業の最後に前時までの調査①及び調査②の結果も踏まえながら、調査（調査③）を行い、自分の考えを深める。

- ・調査③を行う。ハンバーガーA店、B店、C店のどの店で購入したいか、また、その根拠は何かを再び考察することによって、考えを深化させる。

エ **思考4** 再構築

コンセプトマップ③を作成する。

- ・今までの学習をもとに、コンセプトマップ③を作成する。知識の再構築となる。



図2 コンセプトマップ③の作成及び発表の様子

(2) 生徒の思考

ア 思考1について

A店で購入してもらうための根拠

- ・ B店のヒストグラムは安いか高いかに偏りが見られたが、A店は平均値と近い値段のハンバーガーが多い。
- ・ C店は平均の値段はどの店よりも安い、品数が少ないので魅力的ではない。
- ・ 度数の合計が多すぎず少なすぎず、種類が絞やすい。
- ・ 平均値と中央値が同じで、高い商品も安い商品もまんべんなく売っている。
- ・ ある程度種類はあり、全てワンコイン（500円）で買うことができる。
- ・ 安すぎず、高すぎない。

B店で購入してもらうための根拠

- ・ 最大値を見てみるとどの店よりも高い値段だが、B店は品数が多い。
- ・ ヒストグラムの幅が広い→値段の種類が多い→自分の好きなものを買うことができる。
- ・ 最小値を比較すると1番低く、どの店よりも値段が安い商品がある。
- ・ 箱ひげ図から値段の範囲が広いことがわかり、また個数も多いのでそのときの気分や状況によって買いたいものを選ぶことができる。
- ・ ヒストグラムを見るとB店は値段の高いものが多いので、おいしく食べることができる。
- ・ 度数の合計が多いのでハンバーガーの種類がたくさんある。
- ・ 最頻値が高いので、品質にこだわって、量も多いに違いない。家族連れにおすすめである。

C店で購入してもらうための根拠

- ・ 全ての商品が350円以下で安い。1番高い商品でも他の店より安い。値段の3つの代表値が他の店より低い。
- ・ 商品が少ないので迷わない。
- ・ 種類が少ないから選びやすい。
- ・ 3つの店の中で、平均値・最頻値・中央値が全て最も低い。
- ・ ヒストグラムや箱ひげ図を見ると、値段の範囲が狭いことがわかる。つまり値段の差が小さいということなので、比較的買い物がしやすい。
- ・ 3店の味についての明記がないため、味が同じなら安い方がよい。
- ・ 1番安い値段の商品があるのはB店だが、1番高い商品があるのもB店である。しかし平均値を見てみるとC店が安いということになるのでC店がよい。
- ・ 2つ購入しても、500円以内で買うことができる。
- ・ B店は種類が多すぎて選ぶのに時間がかかりそう。
- ・ 他の店のハンバーガー1個500円は、学生にとっては高い。

イ 思考2について

各班の発表を聞いて多様な考えを共有し、自分の考えをまとめた結果、A店B店C店のよさ以外にも次のような意見が述べられた。

- ・ A店もB店もC店もよいところがたくさんあることがわかった。買い物をするとき、自分がどんなことに着目して買い物をするかにより、どの店でも買い物をすることができる。
- ・ ヒストグラムや度数分布表を見て3店の違いが見やすくなり、ただ数字が並んでいるだけのときよりも比較しやすくなった。
- ・ 自分以外の2つの店の考えを聞き、それぞれの店に魅力的なことがあることがわかった。そのことから自分の目的とするものに当てはまる店を選ぶことがよいと思う。良い点も悪い点も3つの店で違うが、だからこそ自分の好みに合う店を見つけることができるのだと思う。普段なら気にせずまたわかりづらい値段のデータをグラフや表に表して、こんなにもわかりやすく理解することができたのでよかった。

ウ **思考3**について

どの店でハンバーガーを購入したいか考える。調査①、調査②、調査③による結果は以下のとおりである。なお調査①は中学校までに学習した知識をもとに判断した結果であり、調査②が高校で学習した内容に基づく個人的な分析の結果である。調査③は他の人の発表を聞き多様な考えを理解したうえでの結果である。

	A店	B店	C店	その他
調査①	4	20	11	0
調査②	8	15	11	(欠席者1)
調査③	6	16	12	全部の店1

図3 調査①、調査②、調査③の結果

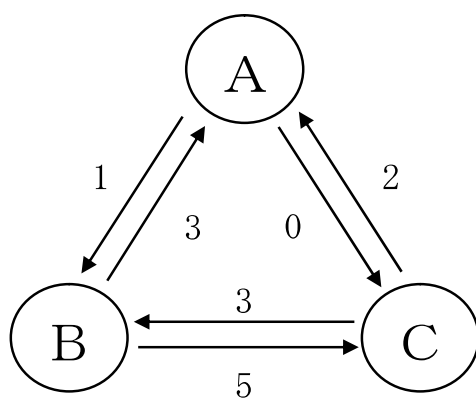
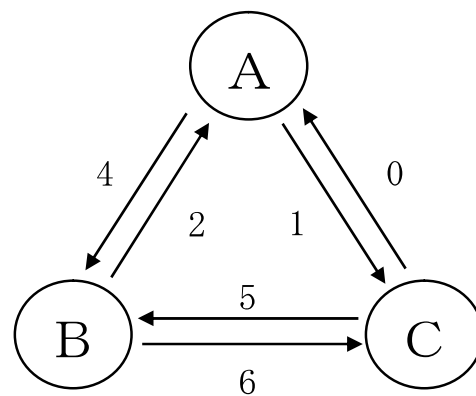


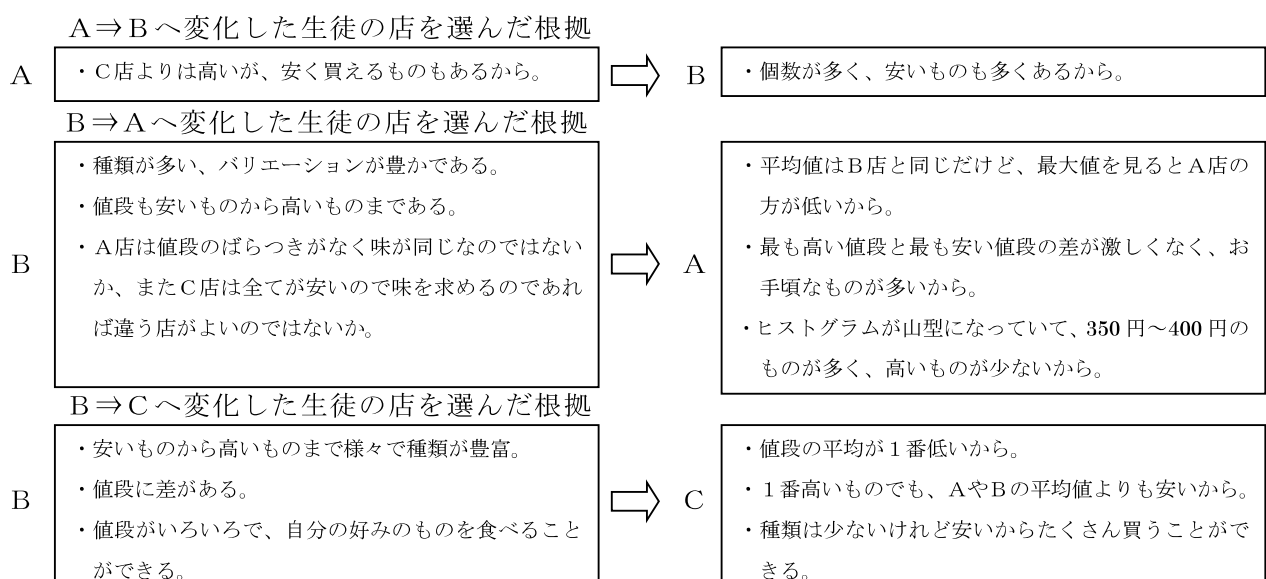
図4 調査①から調査②にかけての変化数



※Cから全部（ABC）へと変化・・・1

図5 調査②から調査③にかけての変化数

調査①から②にかけての変化



C ⇒ A へ変化した生徒の店を選んだ根拠

C	・値段が安い。 ・A、Bよりも品数は少ないけれど安いから。	⇒	A	・安すぎなく、高すぎない。 ・品数も多すぎなく、少なすぎない。
---	--	---	---	--

C ⇒ B へ変化した生徒の店を選んだ根拠

C	・商品の数が1番少なく、すぐ選べるから。 ・値段が安い。 ・1番高い値段の商品を比べると、C店が1番安いから。 ・種類より値段を優先したいから。	⇒	B	・種類がたくさんある。 ・品数が多いので、選択肢がたくさんある。 ・値段が高そうに見えるけれども、平均を見るとそれほど高くないから。 ・安い値段から高い値段まで幅広い。
---	---	---	---	---

調査②から③にかけての変化

A ⇒ B へ変化した生徒の店を選んだ根拠

A	・安いものと高いものとの差が小さく手頃である。 ・種類もある程度あり、値段もとても高いわけではないから。 ・ヒストグラムを見て、Bは安いか高いかに偏っているが、Aは山型で平均値付近の値段が多くちょうどよく、Cは品数が少ないから。 ・350～400円のものが多く、手に入りやすいから。	⇒	B	・値段の範囲が広いから、自分の好きなものを買うことができる。 ・箱ひげ図を見ると値段の幅が広く、安いものから高いものまで選ぶことができる。 ・値段が中央に集まっているAと、安いが品数が少なく質が低そうなCよりはBがよい。
---	--	---	---	--

A ⇒ C へ変化した生徒の店を選んだ根拠

A	・値段が安すぎなく、高すぎない。 ・品数も多すぎなく、少なすぎない。	⇒	C	・全てが350円以下で安い。 ・ヒストグラムや箱ひげ図により、値段の範囲が狭く、商品の数は1番少ないから迷わず選びやすい。
---	---	---	---	--

B ⇒ A へ変化した生徒の店を選んだ根拠

B	・種類が豊富で値段もさまざまである。 ・品数も多く、値段の範囲が広い。	⇒	A	・ほどよく種類の数があつて、箱ひげ図を見ると500円以内で全ての商品を買うことができるから。 ・平均値や最頻値などをBやCと比較すると、Aが高校生にはちょうどよい。 ・箱ひげ図を見ると、手頃である。
---	--	---	---	---

B ⇒ C へ変化した生徒の店を選んだ根拠

B	・たくさんの種類があり、バリエーションも豊富。 ・安いものから高いものまでである。 ・品数が多い。 ・値段の範囲が最も広く、お財布と相談して買うことができる。 ・最小値がどの店よりも低いので安い。 ・選択肢がたくさんあり、気分によって決めることができる。	⇒	C	・値段が安いから。 ・どれもリーズナブルで選びやすいから。 ・ワンコイン(500円)で2個買うことができる。 ・平均値、中央値、最頻値はどの店よりも低い。 ・「商品が少ないということは、買いたい商品をすぐ決めることができる。」という意見に納得したから。 ・安いのでたくさん購入することができ、いっぱい食べることができる点が、自分には合っているから。 ・高校生にとってはやさしい。数は少ないけれども悩まずに決めることができる。 ・味がわからないので安いのが1番よい。
---	--	---	---	---

- ・安いから。
- ・平均値が1番低くて、1番高いものでも340円と値段が安いから。
- ・種類は少ないけれど、値段が安く買いやすい。
- ・範囲が狭く、平均値も低いから。

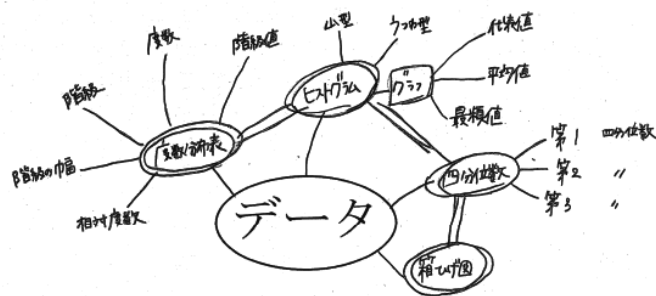
$\Rightarrow$ B

- ・ 値段の最小値と最大値に差があり、持っている金額に応じて選ぶことができる。
- ・ 高値＝高品質であると思われ、満足のいく商品がある。
- ・ 「ヒストグラムが谷型なので、高いものを買ったり安いものを買ったりとバリエーションが豊富」という意見を聞いて、この店がよいと思った。
- ・ 種類がたくさんあったほうが、何回もその店に行きたくなるし、安いものから高いものまであるので、

生徒2名のコンセプトマップの変容である。

コンセプトマップ①

コンセプトマップ②



コンセプトマップ③

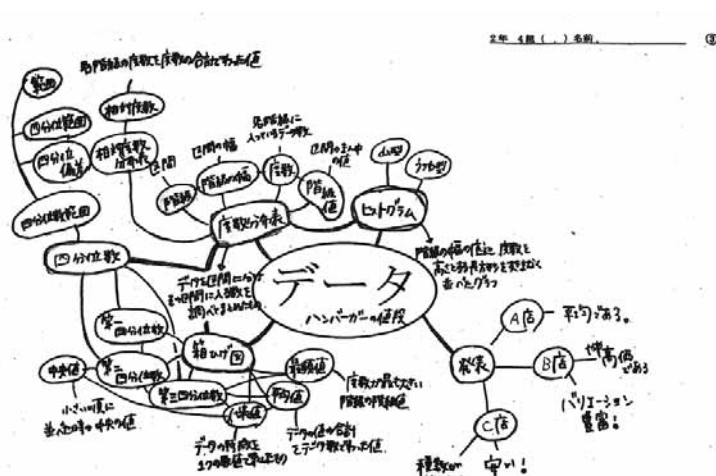
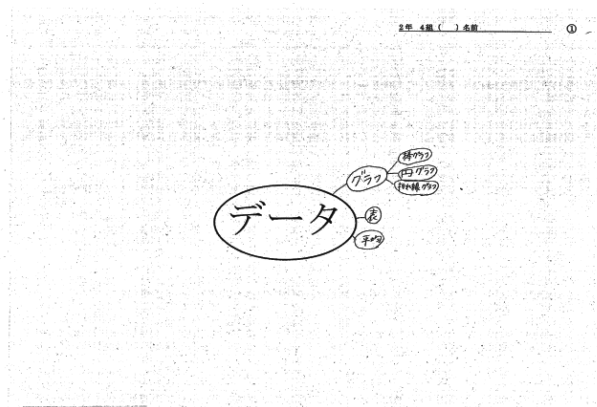


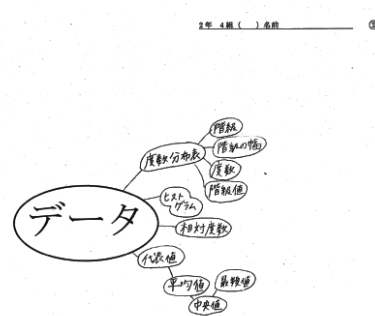
図6 生徒Aのコンセプトマップの変容

生徒 B

コンセプトマップ①



コンセプトマップ②



コンセプトマップ③

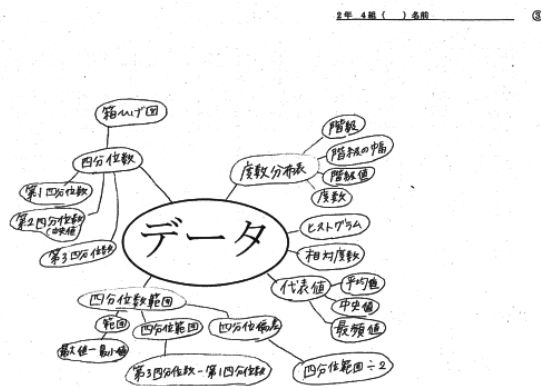


図 7 生徒 B のコンセプトマップの変容

4 成果と課題

各班の発表では、各店で購入してもらえるよう説得するための根拠を、今までの知識や、それ以外の多くの考えを駆使して示すことができた。発表では図を用いて説明する生徒もいた。

また発表を聞いた後には、各店の値段のデータから求めることができる様々な事柄を比較して各店の傾向を把握しただけではなく、それら以外にもデータを分析する利点にも気付くことができた。データを分析することの意義を実感した生徒も多いのではないと思われる。

調査の結果については、各店を選んだ生徒の数の割合には各調査とも大きな差は見られなかった。各調査におけるコンセプトマップの変容から分かるように、学習が進むにつれて、新たな知識を記入することで視覚化され、さらにそれらの新たな知識の関係付けがなされていった。自身の思考の広がりが明確化され、その広がりから、思考の深まりへとつながったものと考えられる。また、調査①から調査②にかけて店を変更した生徒は14名、調査②から調査③にかけて店を変更した生徒は19名であった。調査①では、並んでいる数字だけを見て店を決めている生徒が多く、調査②にかけて変化のあった生徒は、その並んだ数字からは見えなかったこと、すなわちデータを分析・比較することにより見えてきた根拠をもとに変化したのではないかと

考えられる。また、調査②から調査③にかけての変化については、他の人の意見を聞いてその店がよいとした生徒も多かった。自分の考えを表現し明確化することも大切であるが、多くの意見を聞き、多様な考えを共有することによって、さらにもう一度自分自身で考えることによって、自分の考えが洗練され、深化していくのである。このことは、コンセプトマップ①から③の生徒の変容から読み取ることができる。また、2名以外の生徒のコンセプトマップにも同様な変化があった。

なお、2学期中間テストは、データの比較までが範囲であり、次の問題を出題した。

中間テスト

次の表は、ある生徒の数学と英語の10点満点の小テスト、10回分の結果をまとめたものである。データを分析し、数学と英語の小テストを比較してわかることを述べよ。

数学	5	9	7	6	3	4	8	7	2	9
英語	6	7	5	7	7	8	4	7	3	6

図8 中間テスト（抜粋）

生徒の答案を分析すると、データが与えられた時に今までの知識を用いてデータの傾向を捉えるために、度数分布を確認した後、ヒストグラムや箱ひげ図などを作ることににより、データの特徴を視覚化していた。今回の授業を通して、より深い分析力を身に付けられたと考える。

授業での様子や調査、コンセプトマップ、中間テストの結果から生徒の思考の深まりを見取ることができた。今後は、データの分析の分野に限らず、生徒の思考が育成される授業を進め、事象を数学的に考察し表現する能力を高めていきたい。

〔引用・参考文献〕

- ・文部科学省『高等学校学習指導要領解説 数学編』（平成21年）
- ・国立教育政策研究所教育課程研究センター『評価規準の作成、評価方法等の工夫改善のための参考資料【高等学校 数学】』（平成24年）
- ・栃木県総合教育センター『思考力・判断力・表現力を育む授業づくり【理論編】－「思考のすべ」と発問の工夫－』（平成27年）
- ・栃木県総合教育センター『思考力・判断力・表現力を育む授業づくり【実践編】－「比較」「分類」「関係付け」「理由付け」のすべを用いて－』（平成28年）
- ・栃木県総合教育センター『高等学校における教科指導の充実 数学科 数学Ⅰ「データの分析」の指導の工夫』（平成25年）
- ・厚美香織「高等学校における数学的な思考力や表現力を育む授業づくり－教師の役割に着目した授業改善－」（『神奈川県立総合教育センター長期研究員研究報告』平成25年）
- ・藤井斉亮「日本の授業における『集団思考』の様相－集団は個人の総和を超えるか－」（清水美憲編著『授業を科学する－数学の授業への新しいアプローチ』平成22年）

事例 2 思考力・判断力・表現力を高める授業の実践

～ 自らの思考を客観視、再構築するために ～

1 ねらい

教師が授業を行うとき、意識的に既習事項との比較や分類、いくつかの実験的な試行による関係付けから理由付けを行い解説している。また問題演習の場面でも同様に、解答の手掛かりとなる発想の起点や、その後の論理の展開を様々な理由付けによって解説している。生徒は無意識にそれらの手法を身に付け、授業や問題演習の中で活用し問題解決を行ってきた。しかしそれらの手法を習慣化するに至らない生徒や、経験的に不足していると感じられる生徒も少なくない。これは解法の暗記のみでは処理しきれない大学入試問題はもちろん、日常の授業における論理的な理解においても重要な課題になっている。そこで「思考のすべ」を用いて、自らの思考を客観視し（メタ認知）、再構築、再言語化することで深く考えることができる力をつけたいと考えた。同時に、この学習を通して自らの考えを的確な根拠をもって表現する力も育成したいと考えこの実践を試みた。

ベクトル方程式はどのような存在範囲になるかは理解できても、適切に解答を表現することが難しい。なぜそう表現するのか、表現の必要性を生徒の思考の過程から引き出し、単なる暗記にたよった解答から、必然性のある解答に導かせたいと考え単元を計画した。この目標を達成するために「思考のすべ」による思考の客観視、再構築が有効と考え取り入れることとした。

2 授業実践

(1) 単元名

平面上のベクトル

(2) 単元の目標

ベクトルについて理解させ、基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し表現する能力を伸ばすとともに、それらを活用できるようにする。

(3) 単元観

ベクトルを苦手とする生徒は多く、特にベクトルの有用性を認識する内容での理解が難しい。具体的には平面図形や空間図形の内容と複合的に考える問題において、ベクトルによる図形表現に苦勞する場面がある。これを踏まえて、ベクトルによる様々な図形の表現を的確に行えるようにしたい。

(4) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
A1 ベクトルに関心をもつとともに、それらを事象の考察に活用して数学的論拠に基づいて判断しようとする。	B1 ベクトルの性質を利用し図形を判断することができる。 B2 ベクトル方程式を用いて図形を表現することができる。	C1 ベクトルの表示に座標を利用できる。 C2 内分点、外分点、重心の位置ベクトルの表し方を身に付けている。	D1 ベクトルの表記方法や定義を理解している。 D2 ベクトルの演算について理解している。

(5) 単元の指導計画と評価計画

時 間	学習活動とねらい	評価規準との かかわり	評価方法
第 1 時間	ベクトルの表記法を理解し活用しようとする。	A1 D1	ノート
第 2 時間	ベクトルの演算について理解する。	D2	ノート
第 3 時間			小テスト
第 4 時間			
第 5 時間	座標平面上のベクトルを成分で表す。	C1 D1	ノート
第 6 時間			小テスト
第 7 時間	ベクトルの内積や内積の性質を理解する。	D2	ノート
第 8 時間			小テスト
第 9 時間			
第 10 時間	内分点、外分点、重心の位置ベクトルを表す。	C2	ノート
第 11 時間			小テスト
第 12 時間	直線上の点をベクトルで表現できるようにする。	B2	ノート
第 13 時間			小テスト
第 14 時間	ベクトル方程式を用いて図形を表現する。	A1 B1 B2	ノート
第 15 時間			小テスト
第 16 時間			
(本時)			
第 17 時間			

(6) 本時の展開 (第 16 時間)

本時の目標

- ・既習事項との比較、分類、関係付けにより、存在範囲を考えようとする。(A1)
- ・ベクトル方程式を数学的に表現し処理することができる。(B2)

指導内容	学習内容・活動	指導上の留意点
前時の復習と本時の問題の把握をさせる。	△OABにおいて、次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。 $\overrightarrow{OP} = s \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB}$ $0 \leq s + t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$ 関係付け ・「条件を満たす $s+t$ の値を 1 つ定め図示しよう」、「$s+t$ の値を変えたとき、点 P の存在範囲はどのようになるか考えよう」具体的な線分を書くことで問題を把握する。	・関係付け（類推）を促す発問を行う。 評価【関心・意欲・態度】A1 既習事項を利用し、本時の問題を把握できているか。
前時と本時のベクトル方程式を比較させ、類似点、相違点に気付かせる。	比較 ・「既習事項との条件の違いは何か」相違点は $0 \leq s+t \leq 1$ で $s+t$ に範囲があることを理解する。	・比較を促す発問を行う。

$s+t=1$ 、 $s\geq 0$ 、 $t\geq 0$ との関係性に気付かせる。 $s+t$ を動かすことで線分が動くことを理解させる。 $s+t$ を k と固定することで理由付けを行うことができるようにする。	関係付け ・「既習事項を用いて△OAB 内の線分になることを 正確に説明しよう 」 $s+t$ を固定すると線分になることから、周および内部を表現できることに気付く。 理由付け ・「固定した $s+t$ が変化したらどのような存在範囲を示すか 正確に説明しよう 」、「 $k=0$ のときはどんな図を表すか 説明しよう 」 $s+t$ の値の変化による線分の動きを考える。 理由付け ・「 $0<k\leq 1$ で $s+t=k$ と固定し、ベクトル方程式を 表現し直そう 」 $s+t=k$ において固定することで既習事項の線分を表現する。	・関係付けを促す発問を行う。 ・理由付けを促す発問を行う。 ・理由付けを促す発問を行う。 評価【数学的な見方や考え方】 B2 $s+t=k$ と固定したときの線分を表現できているか。
解答をまとめる際の、考えたことを「思考のすべ」を利用し再構築するよう促す。	・「ここまで考えたことを「思考のすべ」の表を参考に整理し説明していこう」	・考えたことを整理、再構築する発問を行う。

3 授業の様子

(1) 前時（第 15 時間）の問題

△OABにおいて、次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

$$\overrightarrow{OP} = s \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB} \quad s+t=1, \quad s\geq 0, t\geq 0$$

(2) 本時の問題

△OABにおいて、次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

$$\overrightarrow{OP} = s \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB} \quad 0\leq s+t\leq 1, \quad s\geq 0, t\geq 0$$

(3) 解答

$s+t=k$ とおく。

[1] $k=0$ のとき, $s=0, t=0$ であるから, 点 P は点 O に一致する。

[2] $0 < k \leq 1$ のとき, $s+t=k$ から $\frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1$

$$\text{また } \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA}) + \frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$$

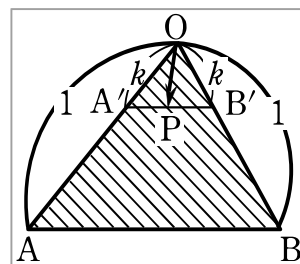
ここで, $\frac{s}{k} = s', \frac{t}{k} = t'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} = s'(k\overrightarrow{OA}) + t'(k\overrightarrow{OB}), \quad s' + t' = 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

よって, $k\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}, k\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ となる点 A', B' をとると, 定数 k に対して, 点 P の存在範囲は辺 AB に平行な線分 $A'B'$ である。

$0 < k \leq 1$ の範囲で k が変わるとき, 線分 $A'B'$ 上の点は, 点 O を除く $\triangle OAB$ の周および内部を動く。

したがって, 点 P の存在範囲は, $\triangle OAB$ の周および内部である。



(4) 授業における思考の流れ

目標の設定

既習事項の確認と本時の問題の把握

情報の収集

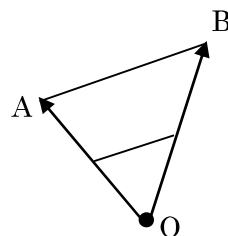
思考 1. 各設問をそれぞれに考え発表する。

①条件を満たす $s+t$ の値を 1 つ定め図示しよう。また, $s+t$ の値を変えたとき, 点 P の値はどのようにになるか考えよう。

(生徒の答え)

$$s+t=1, s+t=0, s+t=\frac{1}{2}, s+t=\frac{1}{3}$$

$\triangle OAB$ になりそう



比較・分類・関係付け

②既習事項との違いは何か。

(生徒の答え)

$s+t$ の範囲が広い。 $s+t$ に範囲がある。

③既習事項を用いて△OAB内の線分になることを正確に説明しよう。

(生徒の答え)

$s+t=1$ のようにするために、 $s+t$ の値を何か1つ決める。その後、両辺を決めたもので割り $s+t=1$ と同じように和を1する。

④ $s+t$ の値を変化させたら、どのような存在範囲を示すか正確に説明しよう。

(生徒の答え)

③でできた線分が平行移動して△OABになる。

⑤係数の和を $s+t=k$ ($0 < k \leq 1$) と固定し、ベクトル方程式を表現し直そう。

(生徒の答え)

$$\overrightarrow{OP} = \frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA}) + \frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB}), \text{条件: } \frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1, \frac{s}{k} \geq 0, \frac{t}{k} \geq 0$$

新しい「意味の体系」
の構築

思考2. 思考1で自らが考えたことを客観視し、思考を再構築する。具体的には各場面においてどんな思考を行ったのかを「思考のすべ」の比較、分類、関係付け、理由付けにより【 】を埋め、【 】の言葉を使った解説を考える。

思考3. 思考2で再構築した思考を【 】の言葉を使って発表する。

(生徒の発表1)

①【関係付け】

既習事項と応用例題を関係付け $s+t$ の値を決めて、最終的に△OABになりそうだと見当をつけた。

②【比較】

既習事項と比較し、 $s+t$ は範囲があることに気付いた。

③【関係付け】

$s+t$ の値が1つに決まっていれば線分になることはわかっているの、何かに固定すれば線分といえる。

④【理由付け】【分類】

①から③を踏まえて△OABになることを説明した。また、 $k=0$ で点になるときと $0 < k \leq 1$ で線分になるときに分類した。

⑤【理由付け】

①から④で考えたことをまとめて△OABであることを説明した。

(生徒の発表 2)

①【関係付け】

既習事項で習ったことを用いて色々なパターンを図示して
 $\triangle OAB$ になりそうだとわかった。

②【比較】

既習事項では $s+t$ が 1 つの値に決まっているのに対し、応
用例題では $s+t$ に範囲があることに気付いた。

③【関係付け】

①との関係付けをした。 $s+t$ を固定し 1 つの線分になるこ
とを考えた。

④【分類】

$s+t$ の値によって線分や点になることを分類した。

⑤【理由付け】

①から④で考えたことをもとに理由付けを行った。

(生徒の発表 3)

①【分類】

$s+t$ を色々並べてどういう風に図示されるかを分類した。

②【比較】

既習事項は $s+t=1$ 。この問題は $s+t$ に範囲があることに気
づいた。

③【関係付け】

線分にするためには、既習事項から $s+t=1$ のようにすれば
よいことがわかっているので、 $s+t$ を何か定めれば和を 1
にできると考えた。

④【分類】

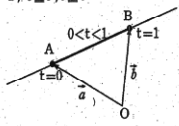
和を k にして k が動けば線分が上下に移動して、 $k=0$ なら
点 O になる。

⑤【理由付け】

これまでにやったことをまとめて説明した。

既習事項

$A(\vec{a}), B(\vec{b}), P(\vec{p})$ とするとき, $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ 条件: $s+t=1, s \geq 0, t \geq 0$
を満たす点 $P(\vec{p})$ の存在範囲は線分 AB である

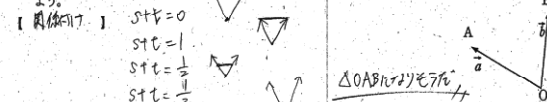


応用例題7

$\triangle OAB$ において、次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}, 0 \leq s+t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$$

- ① 条件を満たす $s+t$ の値を1つ定め図示しよう。また $s+t$ の値を変えたとき、点 P の存在範囲はどのようになるか考えよう。



- ② 既習事項と条件の違いは何か。

【比較】 既習事項 $s+t=1$ 個々の条件あり。
 応用例題 $0 \leq s+t \leq 1$ 個々の条件なし。範囲あり。

- ③ 既習事項を用いて $\triangle OAB$ 内の線分になることを正確に説明しよう。

【理由付け】 $s+t=1$ と $s+t=0$ のとき、
 $s+t=1$ のとき、 P は線分 AB 上。
 $s+t=0$ のとき、 P は O 点。
 $s+t=1$ に沿って変化する。

- ④ $s+t$ の値を変化させたら、どのような存在範囲を示すか正確に説明しよう。

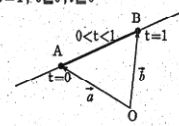
【理由付け】 $s+t=0$ のとき、 P は O 点。
 $0 < s+t \leq 1$ のとき、 P は線分 AB 上。

- ⑤ 係数の和を $s+t=k$ ($0 < s+t \leq 1$) と固定し、ベクトル方程式を表現し直そう。

【理由付け】 $s+t=k$ と $\frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1$ のとき、
 $\vec{OP} = \frac{s}{k}(k\vec{OA}) + \frac{t}{k}(k\vec{OB})$

既習事項

$A(\vec{a}), B(\vec{b}), P(\vec{p})$ とするとき, $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ 条件: $s+t=1, s \geq 0, t \geq 0$
を満たす点 $P(\vec{p})$ の存在範囲は線分 AB である



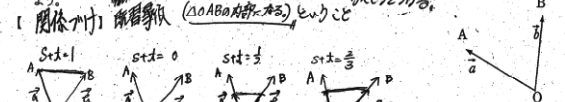
① 1. ベクトル方程式の解法 2. 存在範囲の求め方

応用例題7

$\triangle OAB$ において、次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}, 0 \leq s+t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$$

- ① 条件を満たす $s+t$ の値を1つ定め図示しよう。また $s+t$ の値を変えたとき、点 P の存在範囲はどのようになるか考えよう。



- ② 既習事項と条件の違いは何か。

【比較】 既習事項 $s+t=1$ 個々の条件あり。
 応用例題 $0 \leq s+t \leq 1$ 個々の条件なし。範囲あり。
 既習事項に於いては $s+t$ の和が1と固定されているが、
 本問、応用例題に於いては $s+t$ の和が1以上1以下である。
 ($s+t$ に範囲がある)

- ③ 既習事項を用いて $\triangle OAB$ 内の線分になることを正確に説明しよう。

【理由付け】 $s+t=1$ と $s+t=0$ のとき、
 $s+t=1$ のとき、 P は線分 AB 上。
 $s+t=0$ のとき、 P は O 点。
 $s+t=1$ に沿って変化する。

- ④ $s+t$ の値を変化させたら、どのような存在範囲を示すか正確に説明しよう。

【理由付け】 $s+t=0$ のとき、 P は O 点。
 $0 < s+t \leq 1$ のとき、 P は線分 AB 上。
 $k=s+t$ のとき、 P は線分 AB 上。
 $k=0$ のとき、 P は O 点。
 $k=1$ のとき、 P は線分 AB 上。
 $k=0$ から $k=1$ まで変化する。

- ⑤ 係数の和を $s+t=k$ ($0 < s+t \leq 1$) と固定し、ベクトル方程式を表現し直そう。

【理由付け】 $s+t=k$ と $\frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1$ のとき、
 $\vec{OP} = \frac{s}{k}(k\vec{OA}) + \frac{t}{k}(k\vec{OB})$

図1 生徒の解答例

4 成果と課題

(1) 「思考のすべ」を用いた授業展開についての感想

- ・ 普段自分がどのように考えて、どのような手順で数学、もしくは他の物事に取り組んでいるかが感じられるいい機会だった。
- ・ 自分で表現することは難しかったが、他の人の発表は理解しやすかった。
- ・ 思考全般で「思考のすべ」を無意識に行っているが、意識的に表現することは難しい。
- ・ なんとなく解いていることから脱却し、答えへの道のりをクリアにするものだと思う。
- ・ 「思考のすべ」を用いることで、根拠の部分を実験で発見することができた。
- ・ 難しそうに思えたが、実はいつも問題を解いているときと同じ方法だと思った。
- ・ 解法を覚えるのではなく、論理的に説明することができた。
- ・ 自分が今何をしているのかよくわかった。

(2) 「思考のすべ」によって考えたことをまとめ表現することについて

- ・ 表現しやすかった、およびまあまあ表現しやすかった・・・88.9% (27人中24人)
- ・ 表現することが難しかった・・・11.1% (27人中3人)

(3) 「思考のすべ」によって解説された他の生徒の表現を聞き理解することについて

- ・ 理解しやすかった、およびまあまあ理解しやすかった・・・96.3% (27人中26人)
- ・ 理解することが難しかった・・・3.7% (27人中1人)

1. 「思考のすべ」による授業展開について感想を書いてください

「思考のすべ」の物は自分の考えたことと全く意味付けを行わない
作業は「なんとも問題と解いてあることからの服部をあたすものなり」と思ふ。
今何を自分が目指しているか、何をしたいのか、どこに向かっているのかを意識
することは、答えの道のりをクリアにするものと思う。

2. 「思考のすべ」によって考えたことをまとめて表現することについて、次の選択肢から当てはまるものに丸をつけてください。

- ☐ ①表現しやすかった
☐ ②まあまあ表現しやすかった
☐ ③表現することが難しかった

3. 他の生徒が「思考のすべ」によって考えたことをまとめて表現したことについて、次の選択肢から当てはまるものに丸をつけてください。

- ☐ ①理解しやすかった
☒ ②まあまあ理解しやすかった
☐ ③理解することが難しかった

1. 「思考のすべ」による授業展開について感想を書いてください

普段よりも自分で深く考えたことにより、理解が深まり、気づきも。
どのように考えたかを表現することは難しいが、ほかの生徒の
発表を聞くと、みんなしっかり手順を踏んで考えたことを発表していて、
他の生徒の考えを聞けたのは、貴重な経験だと思ふ。自分の力に
つながると思うので、よい経験ができたと思う。

2. 「思考のすべ」によって考えたことをまとめて表現することについて、次の選択肢から当てはまるものに丸をつけてください。

- ☐ ①表現しやすかった
☒ ②まあまあ表現しやすかった
☐ ③表現することが難しかった

3. 他の生徒が「思考のすべ」によって考えたことをまとめて表現したことについて、次の選択肢から当てはまるものに丸をつけてください。

- ☒ ①理解しやすかった
☐ ②まあまあ理解しやすかった
☐ ③理解することが難しかった

図2 事後アンケート

事後アンケートの結果から、多くの生徒が考える行為そのものを学ぶことに、数学を理解していくうえでの優位性を感じていることがわかった。何人かの生徒は自らの思考を表現することは難しいと回答していたが、その一方で「思考のすべ」を用いて発表された他者の思考は理解しやすいと回答している。このことから、主体的に考え表現することができる授業のために、また問題の正しい理解や解法への道筋を得るために、思考の客観視・再構築を行うことが重要であると感じた。

4つの「思考のすべ」は全てが独立して行われるものではなく、同時並行的に行われる場合が多い。授業においては生徒の様々な発想を重んじ、思考を限定することなく表現させることが重要であると感じた。

今回の実践後、日常の授業においても変化があった。この実践を通して生徒と共有できた言語「比較・分類・関係付け・理由付け」を、授業で活用しスムーズな理解に導く指導が行えるようになった。教師と生徒の間に考え方を共有するための共通言語が増えることは、数学を理解する上で重要な要素であると考えられる。

〔引用・参考文献〕

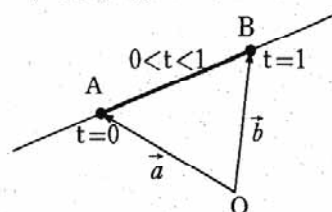
- ・ 栃木県総合教育センター『思考力・判断力・表現力を育む授業づくり【理論編】－「思考のすべ」と発問の工夫－』（平成27年）
- ・ 栃木県総合教育センター『思考力・判断力・表現力を育む授業づくり【実践編】－「比較」「分類」「関係付け」「理由付け」のすべを用いて－』（平成28年）

ベクトル方程式 No.2 2年 組 番 氏名

既習事項

$A(\vec{a}), B(\vec{b}), P(\vec{p})$ とするとき, $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ 条件: $s+t=1, s \geq 0, t \geq 0$

を満たす点 $P(\vec{p})$ の存在範囲は線分 AB である



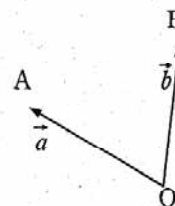
応用例題 7

$\triangle OAB$ において, 次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}, 0 \leq s+t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$$

- ① 条件を満たす $s+t$ の値を 1 つ定め図示しよう。また $s+t$ の値を変えたとき, 点 P の存在範囲はどのようになるか考えよう。

【 】



- ② 既習事項との条件の違いは何か。

【 】

- ③ 既習事項を用いて $\triangle OAB$ 内の線分になることを正確に説明しよう。

【 】

- ④ $s+t$ の値を変化させたら, どのような存在範囲を示すか正確に説明しよう。

【 】

- ⑤ 係数の和を $s+t=k (0 < s+t \leq 1)$ と固定し, ベクトル方程式を表現し直そう。

【 】

思考のすべ

理由付け

比較,分類,関係付けによって分かったことを理由に含めること

比 較

ある視点に従って,複数の事象の共通点や相違点を明らかにすること

例

- ・～に着目したとき,AとBの共通点や相違点は何か
- ・AとBの共通点や相違点はどういったところに
あるか
- ・AとBの共通点や相違点から,～について
どのように考えるか

分 類

ある視点に従って,複数の事象を
グループ分けすること

例

- ・～に注目して分けてみる
- ・分けた理由は,何に注目したのか
- ・分類してわかったことは何か

関 係 付 け

既習事項や経験と事象,または2つの事象
どうしを結び付け,意味付けること

例

- ・今までに学んだことと問題とを比べることで,
課題を発見すること
- ・似たようなことから推測すると,どのような
ことがいえるか
- ・どんなことを想像したか
- ・AとBはどんな関係があるか
- ・AとBとCとDの共通点から気がついた
ことは何か
- ・～は～であるということを使って,
～を説明すること

事例3 数学的な思考力を育む指導

～ 既習事項との関連性をとらえ、問題解決力の育成を目指した授業実践 ～

1 ねらい

いくつかの内容（特に単元を越えた内容）を組み合わせで作られた融合問題を解かせるためには、生徒にどのような思考が求められるかについて、教員がきちんと把握しておくことが必要である。生徒にとっては、既習事項の個々の内容を完全に理解することと、問題を解くときに複数の項目から必要な知識を選び出し、組み合わせることが重要となる。このことから、問題を解く過程で、教師も生徒も「思考のすべ」を意識することで、より思考が深まっていくものと考えられる。

今回の実践では、融合問題において、どの知識をどのように利用するのか判断する力を身に付けさせることをねらいとした。問題を解く過程で、生徒が自発的に思考できるようになるための技法に着目し、「思考のすべ」を用いて、断片化されがちな既習事項の知識を構造的な知識としてまとめられるような授業を実践した。

2 授業実践

(1) 授業内容

数学Ⅰ（2次関数）及び数学Ⅱ（高次方程式、2次方程式）の融合問題の演習

(2) 本時の展開

ア 本時のねらい

- (ア) 実数解をもつ条件を式で示すことができる。
- (イ) 解と係数の関係から、対称式を基本対称式で表して、式の値を求めることができる。
- (ウ) 2次関数の定義域に制限がある場合に最大値・最小値が求められる。

イ 本時のポイント

生徒間での協議を通して、学習内容・解法を理解し、問題解決に向けて取り組む。

展開	学習活動	指導上の留意点
導入	授業の流れを説明	
展開1	既習事項の確認 活動① グループに分かれ、課題を解決するための基本的な問題（問題A・問題B・問題C）に取り組む。	各グループ内で相談しながら考えさせる。 終わりの時間を区切り行動を促す。
	活動② 次に問題A・問題B・問題Cに取り組んだ人がそれぞれ1人以上いる新しいグループに組み換え、活動①で解いていない問題に取り組む。 それぞれが学んだ内容を共有し合う。	お互いの学習内容を教え合うようにする。

展開 2	活動②のグループのままで、活動①の内容をふまえて、本時のメイン課題に取り組む。	
	＜課題＞ 2 次方程式 $x^2 - kx + 9 = 0$ の 2 つの解 α, β が実数であるとき、 $(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2$ の最小値を求めよ。	
	活動③ 本日の課題では、活動①②の内容がどのように生かされたかを協議し、代表生徒が発表する。	
まとめ	本時の振り返り	

3 授業の様子

(1) 授業における思考の流れ

- ア 思考 1 活動①を通して、メイン課題の解決に向けて既習事項を確認する。
- イ 思考 2 活動②を通して、メイン課題と既習事項の関係付けを行い、課題解決に取り組む。
- ウ 思考 3 活動③を通して、思考 2 で行った内容を再構築し、表現する。

(2) 生徒の様子

ア 活動①について

目標達成に向けて、問題 A、B、C を与え、それぞれグループで取り組ませる。全員が理解できるようにするため、学習を進める時には互いに教え合う。解き終わったら問題を分析し、理解したことについて記入する。問題 B・問題 C を担当したグループは短時間で解き終わっていたが、問題 A を担当したグループは対称式の計算にやや時間がかかっていた。

問題 A 2 次方程式 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^3 + \beta^3$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

問題 B 2 次方程式 $4x^2 - 2(k+3)x + 2k+3 = 0$ が実数解をもつように、定数 k の値の範囲を求めよ。

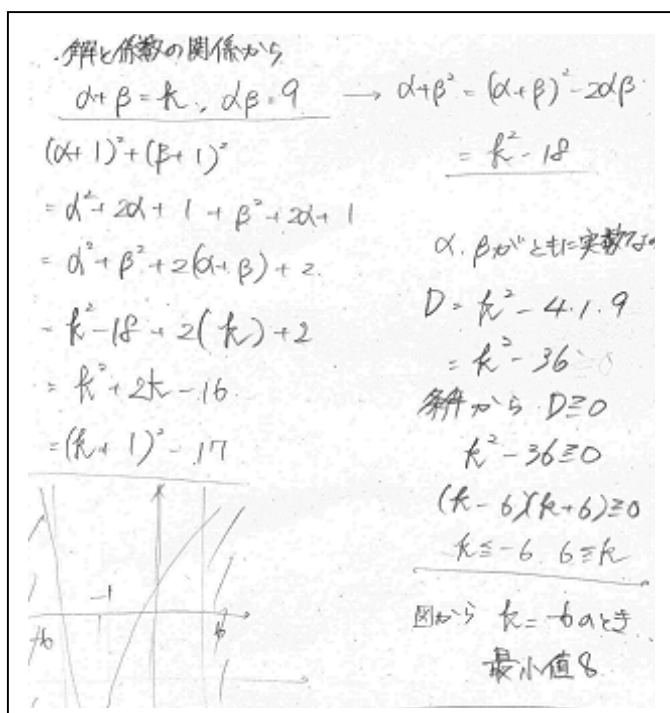
問題 C 関数 $y = 2x^2 - 4x + a$ の $-1 \leq x \leq 3$ における最小値が -6 のとき、 a の値を求めよ。

イ 活動②について

問題A、問題B、問題Cに取り組んだ人がそれぞれ1人以上いる新しいグループに組み換え、活動①で解いていない問題に取り組ませた。それぞれが学んだ内容を共有し合い、そのあと、本時のメイン課題に取り組んだ。問題解決は3人（または4人）で話し合って行った。

本時のメイン課題

2次方程式 $x^2 - kx + 9 = 0$ の2つの解 α, β がともに実数のとき、 $(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2$ の最小値を求めよ。



この部分が抜けており、振り返りによって、後から補った。

活動①を通して、この問題では解と係数の関係や対称式の利用から2次関数の最小値に帰着できるところまで、割とスムーズにできていた。しかし、問題Bが抜けており、最小値が-17となる誤答があった。判別式からkの取り得る値の範囲が実数全体にならないことに気付けずにいたグループが複数あった。

これは抜けが出やすい思考である。問題Bを振り返らせることで、実数条件の抜けを認識させることができた。

図1 生徒の解答例

ウ 活動③について

(ア) 問題を解くときに工夫した点、苦労した点があればそれを説明する。

(イ) 活動①での問題をどこで使ったか説明する。

(3) 問題の分析

本時の展開【展開2】における生徒の問題解法への思考の流れ

ア グループ1

(ア) 問題の種類：解と係数の関係、判別式、2次関数の最大最小

(イ) 解くための方法：解と係数の関係を用いて $\alpha + \beta, \alpha\beta$ を求める

(ウ) ABCをどこで使ったか：解と係数の関係…A、解の範囲…B、最大値・最小値…C

イ グループ 2

(ア) 問題の種類：2次方程式

(イ) 解くための方法：判別式、展開、代入、平方完成、グラフ、解と係数の関係

(ウ) A B Cをどこで使ったか：判別式を用いて範囲を求める…B、解と係数の関係の利用…A、
2次関数の最大値・最小値…C

(4) 生徒の感想

生徒A：定義域を考えることをいつも忘れてしまうが、今回も忘れてしまった。

生徒B：判別式は $D > 0$ なのか $D \geq 0$ なのか 迷ってしまった。

生徒C：問題A、B、Cを解いたのに、Bを使うことを忘れてしまった。

4 いくつかの内容を組み合わせた問題例

(1) 関係する単元

数学A（整数の性質）、数学B（数列）

n を4以上の自然数とする。数2, 12, 1331がすべて n 進法で表記されているとして、
 $2^{12} = 1331$ が成り立っている。このとき n はいくつか。十進法で答えよ。 （16 京都大）

問題A （1） $120210_{(3)}$ を十進法で表せ。

（2） n は3以上の整数である。十進法で $(n+1)^2$ と表される数を n 進法で表せ。

問題B 不等式 $2^n > 3n+1$ を満たす自然数 n をすべて求めよ。

問題C n を4以上の自然数とする。数2, 12, 1331がすべて n 進法で表記されているとして、
 $2^{12} = 1331$ が成り立っている。このとき n はいくつか。十進法で答えよ。

※メイン課題に対して、問題A及び問題Bと、メイン課題そのものである問題Cを設定した例。

(2) 関係する単元

数学Ⅱ 図形と方程式

座標平面上で不等式 $x^2 + y^2 \leq 2$, $x + y \geq 0$ で表される領域をAとする。点 (x, y) がAを動くとき、1次式 $4x + 3y$ の最大値と最小値を求めよ。

問題A x, y が4つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x - y \geq -2, 3x + y \geq 6$ とする。
 $-x + 2y$ の最大値および最小値を求めよ。

問題B 円 $x^2 + y^2 = 4$ …①と直線 $y = 2x + m$ …②が異なる2点で交わるような定数 m の値の範囲を求めよ。

問題C 円 $x^2 + y^2 = 10$ と直線 $y = -2x$ に共有点はあるか。あるときは、その点の座標を求めよ。

(3) 関係する単元

数学A (平面図形), 数学III (積分法)

xyz 空間において、点 $(0, 0, 0)$ をA, 点 $(8, 0, 0)$ をB, 点 $(6, 2\sqrt{3}, 0)$ をCとする。点Pが△ABCの辺上を一周するとき、点Pを中心とした半径1の球が通過する点全体のつくる立体を K とする。 K の体積を求めよ。

問題A xyz 空間において、点 $(0, 0, 0)$ をA, 点 $(8, 0, 0)$ をB, 点 $(6, 2\sqrt{3}, 0)$ をCとする。

平面 $z = 0$ に含まれる△ABCの辺上を点Pが動く。点Pを中心とし、半径1の球の平面 $z = t$ で切られた円の半径 r を t を用いて表せ。

問題B xy 平面において、点 $(0, 0)$ をA, 点 $(8, 0)$ をB, 点 $(6, 2\sqrt{3})$ をCとする。

半径 r の円の中心が△ABCに沿って動く。△ABCの外側にある部分の面積を求めよ。

問題C xy 平面において、点 $(0, 0)$ をA, 点 $(8, 0)$ をB, 点 $(6, 2\sqrt{3})$ をCとする。

半径 r の円の中心が△ABCに沿って動く。△ABCの内側にある部分の面積を求めよ。

5 成果と課題

事後アンケートによる分析

Q1 数学の問題を解くとき、前に解いた問題と似ているところや違っているところがどこかなど考えるようにしていますか。

1 考えようとしている…79% 2 考えようとしていない…21%

Q2 問題が解けなかったとき、自分がなぜ解けなかったかを振り返って考えようとしていますか。

1 考えようとしている…86% 2 考えようとしていない…14%

Q3 数学の解き方がわからないとき、あきらめずにいろいろと考えようとしていますか。

1 考えようとしている…79% 2 考えようとしていない…14%

Q 4 数学で1つ1つの問題は理解していても別の問題を解くときに何をどう使ったらよいか分からなくなることはありますか。

1 よくある…66% 2 ときどきある…34% 3 あまりない…0%

Q 1～Q 3では問題を解けるようにするために、粘り強く取り組むという前向きな解答が得られた。

しかし、Q 4においては、予想どおりほとんどの生徒が既習事項からどの知識をどのように利用するのか判断することが難しいと感じている。

今回の実践事例は、問題解決の過程において自分の分かっていることを意識化させることで解法への道筋を得るために有効であると考えます。また、問題を分析することが問題への理解につながり、融合問題の解決につながっていくと思う。これらの問題演習を通して、入試問題に取り組めるようになってほしい。

〔参考文献等〕

- ・ 栃木県総合教育センター 『思考力・判断力・表現力を育む授業づくり【理論編】－「思考のすべ」と発問の工夫－』（平成 27 年）

[資料 生徒配布用プリント・ワークシート]

本時の授業の流れ

活動①

グループをつくる（座席表 1）

プリントの問題（問題 A・問題 B・問題 C）にグループごとに取り組む。解き終わったら理解したことについて記入。学習を進める時には互いに教えあう。

活動②

席替え（座席表 2 参照）

問題 A・問題 B・問題 C に取り組んだ人がそれぞれ 1 人以上いる新しいグループに組み換え、活動①で解いていない問題に取り組む。それぞれが学んだ内容を共有し合う。

3 人（または 4 人）うち、発表者 1 名と記録者 2 人（または 3 人）を決める。

本時のメイン課題に取り組む。問題解決は 3 人（または 4 人）で話し合っていく。

班毎に発表

- （1） 問題を解くときに工夫した点、苦労した点があればそれを説明する。
- （2） 活動①での問題をどこで使ったか説明する。

座席表 1

A1	A6	B1	B7	C1	C6		A1	C1	B1	A2	A6	C6
A2	A7	B2	B8	C2	C7		B7	C2	B2	C4	B11	B10
A3	A8	B3	B9	C3	C8		A3	B8	B3	A7	C3	A9
A4	A9	B4	B10	C4	C9		A4	B9	B4	C9	B5	A10
A5	A10	B5	B11	C5	C10		A5	C8	A8	C7	C5	C10
		B6							B6			

座席表 2

問題A 2次方程式 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ の2つの解を α , β とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^3 + \beta^3$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

(3) $(\alpha - 2\beta)(\beta - 2\alpha)$

[この問題を分析しよう]

問題の種類

問題を解くための方法（解法プラン・方針）

問題B 2次方程式 $4x^2 - 2(k+3)x + 2k+3 = 0$ が実数解をもつように、定数 k の値の範囲を求めよ。

[この問題を分析しよう]

問題の種類

問題を解くための方法（解法プラン・方針）

問題C 関数 $y = 2x^2 - 4x + a$ の $-1 \leq x \leq 3$ における最小値が -6 のとき、 a の値を求めよ。
また、そのときの最大値を求めよ。

[この問題を分析しよう]

問題の種類

問題を解くための方法（解法プラン・方針）

本時のメイン課題（※記録用）

氏名 1 氏名 2 氏名 3 氏名 4

2 次方程式 $x^2 - kx + 9 = 0$ の解 α , β がともに実数のとき, $(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2$ の最小値を求めよ。

問題を解く過程を記述しよう

【この問題は？】

- 問題の種類
- 解くための方法
- ABCの問題をどこで使ったか

感想 1	感想 2	感想 3	感想 4