事例１　数学的コミュニケーションを生かした「２次関数」の指導の工夫

１　事例の概要

生徒のペーパーテストの解答に、表現力の未熟さを感じることがある。「式の羅列に終始し、読み手を意識した解答になっていない」、「数値や式を求めることに夢中になり、解法の方針や考え方の道筋を表現することが苦手である」というようなことがそれに相当する。

これらの課題を改善する１つの方法として、報告書では「教師による説明中心の授業にとどまるのではなく、生徒が自分の解決過程や推論過程を筋道立てて発表する場や、他者の考えを解釈する場、さらに、多様な考えの比較検討を通じて数学的な見方や考え方のよさを実感させる場を設けるなど、数学的コミュニケーションに基づく学習指導を工夫する」ことが挙げられている。

しかし、数学科の授業におけるコミュニケーションの現状は必ずしも良好であるとは言えない。教育課程実施状況調査の生徒（28,999 名）、教師（867 名）への質問紙調査では、次のような結果が挙げられている。

対象	質問事項	回答状況	
生徒	数学の時間に、いろいろな考え方を発表し合うのは楽しいですか。	楽しい	7.8%
		どちらかといえば楽しい	26.6%
		どちらかといえば楽しくない	25.5%
		楽しくない	39.3%
教師	生徒同士または生徒と教師との対話等、コミュニケーションを重視した授業を行っていますか。	行っている方だ	26.9%
		どちらかといえば行っている方だ	44.9%
		どちらかといえば行っていない方だ	21.3%
		行っていない方だ	6.6%

＊生徒、教師とも「その他」、「無答」があるため 100%にならない。

この結果を見ると、70%を超える教師はコミュニケーションを重視した授業を実施していると回答している。その一方で、生徒は、いろいろな考え方を発表し合うことについて約 65%が楽しいことではないと回答している。教師は、コミュニケーションを生かした授業を実施しているが、生徒はそれを楽しいと感じていないということになる。

そこで、本事例においては、生徒が楽しいと感じながら、数学に対する関心や意欲を高め、数学的な表現力の向上をめざした「数学的コミュニケーションを生かした授業」にするために、授業の中で友達と話し合ったり、議論したりする場面の工夫改善に取り組むことにした。

(1)　「数学的コミュニケーションを生かした授業」について

そもそも「コミュニケーション」とは、広辞苑によると「社会生活を営む人間の間に行われる知覚・感情・思考の伝達。言語・文字その他視覚・聴覚に訴える各種のものを媒介とする。」とされている。本事例では、「数学的コミュニケーションを生かした授業」とは、学習内容の理解を深めるとともに、数学への関心や意欲を高め、数学的な表現力を向上させていくために、「話し合い・議論の場面」、すなわち、「考えを伝達する場面」、「考えを聞く場面」、「考えを比較検討する場面」を随所に設定した授業であると考えた。

そして、話し合い・議論を有効に展開させるために、単に「話し合い・議論の場面」を設定するだけではなく、その前後に、「考える場面」、「ノートに考えや感じたこと等を表現する場面」を適切に設けることにした。話し合い・議論の前に、自分自身の考えをノートに表現することで、学習内容を整理できることはもちろん、自らの考えを分かりやすく伝える準備ができる。また、話し合い・議論の後に、振り返って感じたことをノートに表現することで、自らの考えを客観的に捉え直し、数学的

な表現力の高まりや学習内容の深い理解につながる。さらに、自分の考えや友達の異なる考えの存在を再認識することができ、それは、生徒自身の情意的な変容につながることになる。

「話し合い・議論の場面」は、数学的活動の外的活動である。それに対して、「考える場面」、「ノートに考えや感じたこと等を表現する場面」は、内的活動になる。今回の取組では、内的活動と外的活動がそれぞれの質を高めるという、相乗効果が期待できる。

(2) 生徒の実態

教育課程実施状況調査によると、数学の時間にいろいろな考え方を発表し合うことを楽しいと感じていない生徒が多い。そこで、研究協力委員の学校の第１学年の生徒を対象に、自分で考えること、友達の考えを聞くこと、話し合いや議論をすることへの意識について、「数学の授業に関するアンケート」と題してアンケート調査を実施し、生徒の意識を詳しく確認することにした。

①対象および実施時期

対　　象　研究協力委員の学校の第１学年の生徒　合計 231 名

実施時期　平成 19 年 10 月～11 月

②質問項目とその結果

質問事項(1)～(18)に対して、同意の程度を

「とてもよくあてはまる」　・・・・・・・４

「どちらかといえばあてはまる」　・・・・３

「どちらかといえばあてはまらない」　・・２

「まったくあてはまらない」　・・・・・・１

とし、回答させた。１から４を点数化し、項目ごとに全体の平均値を算出した。その結果をまとめたものが次の**表１**である。

表１「数学の授業に関するアンケート」の結果

質　問　事　項	平均値
(1)　数学の授業のとき、友達の考えを聞いてみたいと思います。	2.9
(2)　数学の授業のとき、友達がなぜそのように考えたのか、そのわけを聞きたいと思います。	2.7
(3)　数学の授業のとき、自分でじっくり考えてみたいと思います。	3.2
(4)　数学の授業のとき、友達の発表に対して、問い返したいと思います。	1.8
(5)　数学の授業のとき、友達の考えに、付け加えたいと思います。	1.8
(6)　数学の授業のとき、友達の考えを聞くことは大切です。	3.3
(7)　数学の授業のとき、いろいろな考え方のわけを聞くことは大切です。	3.4
(8)　数学の授業のとき、自分でじっくりと考えることは大切です。	3.6
(9)　数学の授業のとき、問い返すことは大切です。	2.7
(10) 数学の授業のとき、付け加えることは大切です。	2.5
(11) 数学の授業のとき、友達の考えが同じか、違うかを知ることは大切です。	2.9
(12) 数学の授業のとき、よりよい考えに高めていくことは大切です。	3.3
(13) 数学の授業のとき、友達と話し合うことは大切です。	3.2
(14) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすることは、数学の勉強によいことです。	3.1
(15) 数学の授業のとき、自分でじっくり考えていくと、分からないことや疑問に思っていることが分かるようになります。	2.9

質　問　事　項	平均値
(16) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、考えをはっきりとしたものにすることができます。	3.0
(17) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、考えを深めることができます。	3.1
(18) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、新しい考えをつくりだすことができます。	3.0

③結果の考察

○自分で考えることと友達の考えを聞くことについて

「自分でじっくり考えていく」ことのよさを捉えているかどうかについて

(3)　数学の授業のとき、自分でじっくり考えてみたいと思います。	3.2
(8)　数学の授業のとき、自分でじっくりと考えることは大切です。	3.6
(15) 数学の授業のとき、自分でじっくり考えていくと、分からないことや疑問に思っていることが分かるようになります。	2.9

「友達の考えを聞く」ことについて

(1)　数学の授業のとき、友達の考えを聞いてみたいと思います。	2.9
(6)　数学の授業のとき、友達の考えを聞くことは大切です。	3.3

数学の授業では、「友達の考えを聞く」こと、「自分でじっくり考える」ことの重要性はそれぞれ認識しているものの、「友達の考えを聞く」姿勢よりも、むしろ「自分でじっくり考える」姿勢がやや強い。しかし、項目(15)で見られるように、「自分でじっくりと考える」ことで、分からないことや疑問に思っていることが分かるようになると感じている生徒数は減少する。実際の場面では、「何を考えればいいのか、どう考えればいいのかが分からない」、「自分だけでは解決できないことが多い」と思っている生徒がいるのではないかと考えられる。

数学の学習を進めるにあたっては、自分でじっくり考えることと友達の考えを聞くこととは、決して対立するものではない。むしろ、友達との話し合いや議論という外的活動によって、自分でじっくりと考えるという内的活動の高まりが期待できる。そのためにも、「友達の考えを聞いてみたい」という思いを高め、それが自らの考えを深める上で有効であることを認識させることが大切となる。

○友達の考えを聞くことについての意識と重要性の意識

友達の考えを聞くことの意識

(1)　数学の授業のとき、友達の考えを聞いてみたいと思います。	2.9
(2)　数学の授業のとき、友達がなぜそのように考えたのか、そのわけを聞きたいと思います。	2.7
(4)　数学の授業のとき、友達の発表に対して、問い返したいと思います。	1.8
(5)　数学の授業のとき、友達の考えに、付け加えたいと思います。	1.8

友達の考えを聞くことの重要性の意識

(6)　数学の授業のとき、友達の考えを聞くことは大切です。	3.3
(7)　数学の授業のとき、いろいろな考え方のわけを聞くことは大切です。	3.4
(9)　数学の授業のとき、問い返すことは大切です。	2.7
(10) 数学の授業のとき、付け加えることは大切です。	2.5

友達の考えを聞くことの目的の意識

(11) 数学の授業のとき、友達の考えが同じか、違うかを知ることは大切です。	2.9
(12) 数学の授業のとき、よりよい考えに高めていくことは大切です。	3.3

「大切だ」という意識（項目(6)(7)(9)(10)）の方が、「してみたい」という意識（項目(1)(2)(4)(5)）よりも高い。このことは、友達の考えを聞くことは大切であるが、実際にそうしてみたいという気持ちは、気恥ずかしいこともあり、それほど強くもてないと考えられる。授業の中で教師が問いかけたときに、生徒は分かっていても、何か言いたくても、それに応えないことがある。高校生という発達段階を考えると、いたしかたがない面もあるが、その場で生徒の考えをいかに引き出すかが大切となる。実際に友達の考えを聞くことができるようになるためには、自分の考え方と友達の考え方との違いを明確に認識できるようになるとともに、相手に理解されるように問うたり、考えの違いを明確にしながら話したりする技能を身に付けていくことが必要となる。そして、それらの技能を身に付けさせるためには、生徒の発言の取り上げ方がコミュニケーション活動を成立させる上で重要となる。

○話し合いや議論の大切さについての意識とその価値の捉え方

話し合いや議論の大切さの意識

(13) 数学の授業のとき、友達と話し合うことは大切です。	3.2
(14) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすることは、数学の勉強によいことです。	3.1

話し合いや議論をすることの価値の捉え方

(16) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、考えをはっきりとしたものにすることができます。	3.0
(17) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、考えを深めることができます。	3.1
(18) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、新しい考えをつくりだすことができます。	3.0

数学の授業のおいては、友達と話し合ったり議論したりすることよりも、自分でじっくり考えることの方が大切である（項目(8)）という意識がやや高い。これは、従来の授業が、内的活動が中心で、問題に一人で取り組むことが多かったからではないかと考える。そこで、授業の中で、友達と話し合ったり議論したりする場面では、何を話し合うのか、何のために話し合うのか、どのように話し合うのかを明確にして、話し合ったり、議論したりすることのよさを生徒に十分味わわせることが大切であると考える。

アンケートの結果から、今回の取組を通して、「友達と話し合ったり議論したりする」という外的活動が、「自分でじっくり考える」という内的活動の質を高めることに有効であり、それが、数学的な表現力の向上にもつながることを確認していきたい。

2　指導の展開

生徒の実態を踏まえ、数学Ⅰ「２次関数とそのグラフ」の単元を通して数学的コミュニケーションを生かした授業に取り組んだ。実践例は、「２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフのかき方」である。

(1) 単元「２次関数とそのグラフ」の目標・評価規準、学習計画・評価計画

①単元「２次関数とそのグラフ」の目標・評価規準

単元の目標

具体的な事象と関連付けて、関数概念の理解を深め、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できるようにする。また、２次関数について、表、式、グラフなどを用いてその関係を考察させ、２次関数について理解を深めるとともに、２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフをかくことができるようにする。

単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
㋐1具体的な事象の中にある２つの数量関係に関心を持ち、関係を調べようとする。 ㋐2２次関数の表、式、グラフの相違点に関心を持ち、その違いを調べようとする。	㋑1２つの数量関係を表、式、グラフを用いて考察することができる。 ㋑2２次関数のグラフの特徴を考察することができる。	㋒1２つの数量関係を表、式、グラフを用いて表現することができる。 ㋒2２次関数のグラフの位置関係、グラフと式の関係を把握し、グラフをかくことができる。 ㋒3２次関数の式を一般形から標準形に変形することができる。	㋓1関数の定義や関数のグラフの意味を理解している。 ㋓2グラフの平行移動について理解している。

②学習計画・評価計画

時　間	学　習　活　動	評価規準とのかかわり	評　価　方　法
第１時間	○時間と距離の関係を表、式、グラフを用いて表現し、「関数」とは何かを考察する。 ○関数の値を求めるとともに、定義域、値域について理解し、さらに、１次関数における定義域、値域について考察する。	㋐1、㋑1、㋓1	関数関係にあるものについて、課題レポート(関数関係とはどのような関係か)を提出させ、取組の状況を確認する。
第２時間	○２次関数 $y=ax^2$ について、対応表を作成し、そのグラフを点をプロットすることによってかく。 ○グラフを観察し、２次関数のグラフの特徴を考察する（グループによる話し合い)。	㋑2、㋒1	グラフの特徴についてグループで話し合った内容（自らの考え、友達の考え、その違い）を、レポートで確認する。
第３時間 第４時間 第５時間	○$y=2x^2$、$y=2x^2+3$、$y=2(x-2)^2$、$y=2(x-2)^2+3$ について、対応表を作成し、グラフをかく。 ○４つの２次関数の表、式、グラフの共通点、相違点について考察する（グループによる話し合い)。	㋐2、㋑2、㋒2	グラフの共通点、相違点についてグループで話し合った内容をレポートにまとめさせ、確認する。
第６時間 第７時間	○ $y=ax^2$、 $y=ax^2+q$、 $y=a(x-p)^2$、$y=a(x-p)^2+q$ のグラフの特徴から、グラフのかき方を考察し、グラフをかく。	㋑2、㋒2	小テストにより定着の状況を把握する。
第８時間 **（実践例の授業）** 第９時間 第10時間	○２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフのかき方を考察する（グループによる話し合い)。 ○２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフをかく。	㋐2、㋑2、㋒2、㋒3	グラフのかき方をグループで話し合い、自らの考え、友達の考え、その違いについて、レポートで確認する。 小テストにより定着の状況を把握する。

③単元「２次関数のそのグラフ」の中での数学的コミュニケーションを生かした授業の工夫

本単元では、３度の話し合いを取り入れるとともに、それをレポートにまとめさせた。話し合いの前には、生徒各自が考えたこと、気がついたことをそれぞれノートにまとめさせた。また、話し合いの活動の際には、友達の意見もそこに付け加えさせ、考え方の違い、気付きの視点の違い、表現の違いについてノートにまとめさせた。

第２時間では、２次関数 $y=ax^2$ のグラフの特徴について、話し合わせた。２次関数のグラフの特徴について、グラフの概形、グラフの対称性、グラフの凸を含めた a の値によるグラフの違いなどについて、次のような意見が出された。

グラフの概形について
- 「全てのグラフが原点を通り、そこでは、一番丸みを帯びている」
- 「必ず上半分か、下半分にしかグラフはない」

グラフの対称性について
- 「y 軸で折ると重なる」
- 「x 座標の絶対値が等しい点では、y 座標が等しい」

a の値によるグラフの違いについて
- 「a の値が大きくなるほど開き方が狭くなる」
- 「a の値が“＋”の時は上半分にグラフが現れ、a の値が“－”の時は下半分にグラフが現れる」

それぞれについて、質問や意見が出されたが、まだまだ活発に話し合われたとは言い難い。しかし、それぞれの特徴を分類し、言葉を定義し、まとめたときには、教師から与えられたのではなく自分たちが見出した特徴であるとの実感がもてたようである。

第５時間は、４つの２次関数 $y=2x^2$、$y=2x^2+3$、$y=2(x-2)^2$、$y=2(x-2)^2+3$ のグラフの特徴について話し合った。それぞれのグラフの共通点、相違点について次のような意見が出された。

共通点について
- 「全てのグラフに頂点がある」
- 「グラフの形が同じ」
- 「頂点から横に１、２…と離れたときの、y は２、８…と増えていく」

相違点について
- 「同じグラフであるが、かかれている場所が違う」
- 「式に＋3 がついているときは、グラフは上にある」
- 「式に $(x-2)^2$ があるときは、グラフは右に２だけいったところにある」
- 「式に $(x-2)^2$ があるときは、グラフの軸が変わる」

それぞれ生徒自身の言葉であり、表現としては十分でないところがあるが、第２時間と比べると、表現に数量的なものが含まれるようになった。友達との話し合いを通して、他の人を説得するためには、数量的なものを含めて説明することが有効であることを実感できた生徒が現れてきた。また、第２時間のときは、既習事項（中学校で学んだこと）を生かすことができなかったが、ここでは、第２時間に学んだ語句や性質を用いて表現することができていた。話し合いの場面では、質問がいくつか出るようになった。「どのくらい変わるの？」、「どのくらい上にあるの？」といった質問がいくつかのグループから出ていた。また、意見を比較したり、分類したりすることができるように

なった。「それは、さっきの意見と同じことだよね」、「さっきの意見とはここが違うね」という言葉が、会話の中で交わされるようになった。

(2) 実践例

①授業の概観（授業のねらい、数学的コミュニケーションの視点）

授業のねらい（評価規準）

・２次関数の標準形、一般形の違いに関心を持ち、その違いを自らの言葉で表現する。
（Ⓐ② ２次関数の表、式、グラフの相違点に関心を持ち、その違いを調べようとする。）
・２次関数のグラフの特徴から、一般形で表現された２次関数のグラフのかき方を考察する。
（Ⓑ② ２次関数のグラフの特徴を考察することができる。）

数学的コミュニケーションの視点

数学的コミュニケーション能力の育成を図りながら、授業のねらいを達成するために、授業を進める上で留意しなければならないことがある。それは、他者の視点を得る（外的活動）ことによって、自らの視点が高まっていく（内的活動）ことが実感できる授業となることである。さらに、考え方のよりどころとなる既習事項を効果的に活用しながら考える場面を設定することである。本授業では、１次関数のグラフと２次関数のグラフの特徴、２次方程式の解の公式で学んだ平方完成を活用して考える場面を設定した。これらをもとに、生徒同士の話し合いを進めるとともに、筋道を立てて考えることができるようにさせたい。ときには、できるかできないかだけではなく、どこが難しいのか、なぜ難しいのかを考えさえることによって、課題の解決への糸口を探らせることも必要となる。

②授業展開

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・２次関数の一般形について	○２次関数の一般形について $(x-1)(x-2)=0$ や $x^2-3x+2=0$　は、なんと呼ばれるものでしょうか。そうですね、２次方程式です。２次方程式もいろいろな形がありました。では、$y=ax^2+bx+c$ は何でしょうか？今まで学習したものの中に相当するものがあるでしょうか？ ・２次関数を表す式には、標準形（$y=a(x-p)^2+q$）と一般形（$y=ax^2+bx+c$）があることを知る。 ○２次関数の一般形のグラフの確認 ・コンピュータを用いて、一般形でかかれた２次関数のグラフも、放物線になることを確認する。	・コンピュータを用いて、$a(\neq 0)$、b、c の値に関わらず、放物線になることを確認する。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・２次関数の一般形のグラフのかき方の手立ての考察 **（場面１）**	○２次関数のグラフのかき方の考察 （課題１） ２次関数 $y=x^2-4x+3$ のグラフをかこう。 $y=x^2-4x+3$ のグラフをかくためには、どうしたらいいだろう？ （予想される生徒の反応） ・一般形で表現された式を標準形に変形して、グラフをかく。 ・２次関数のグラフの頂点をグラフの対称性から求め、グラフをかく。 自分の考えをノートに記述 ノートに記述する際には、式の羅列ではなく、言葉、式、図を用いて表現する。 グラフのかき方の発表 考え方が分かるように発表する。 発表者への質問、意見を述べる。	・既習事項を思い出させながら確認する。 ・点をプロットすることについては、認めるが、ここでは取り扱わないこととする。 ・出された意見を適宜まとめさせる。
・２次関数の一般形のグラフのかき方の考察 **（場面２）**	○グループでかき方を決め、具体的にどうすればかけるのかを話し合う。 ・１つのかき方について、具体策を模索し、$y=x^2-4x+3$ のグラフをかく。 ・発表 かき方が分かるように発表する。 発表者への質問、意見を述べる。	・前出の意見の中からグループで１つに決め、具体的なかき方を考察させる。 ・同じかき方でも表現が異なる場合は、どこが違うのか、どう違うのかを考えさせる。
・グラフのかき方のまとめ	○グラフのかき方のまとめ ・グラフの特徴をもとにしたグラフのかき方 ・式の特徴をもとにしたグラフのかき方 ○グラフのかき方について、感じたこと、考えたことをノートにまとめる。	

③授業の具体的場面の考察

場面１（２次関数の一般形のグラフのかき方の手立ての考察・一斉指導）

実際の授業展開の様子を教師（T）と生徒（S）の会話で示す。TとSの後ろの数字は、順序を表すもので、教師は１人である。また、生徒については、何名かの生徒が数回発言をしている。

T１：今まで、$y=(x-1)^2+2$ のような２次関数のグラフをかいてきました。
では、$y=x^2-4x+3$ のグラフをかきたいのですが、どうしたらいいでしょうか？考えたことを発表してください。

S１：今まで２次関数のグラフの書くときは、$y=ax^2$ のグラフをどのように平行移動したかを考えてグラフをかいてきたんですよね。だから、どう平行移動したか分かればグラフがかけるんじゃないかな。

Ｓ２：平行移動によって、結局、グラフの頂点や軸がわかりました。そして、実際にグラフをかくときは頂点と軸と y 軸との交点の座標を考えてグラフをかいていたので、この場合もそれが分かるとグラフがかけるはずですよね。

Ｔ２：そうですね。さきほど、コンピュータで見てもらったように、$y=ax^2+bx+c$ のグラフは、今までかいてきた放物線ですね。だとすると、$y=x^2-4x+3$ のグラフの頂点や y 軸との交点の座標が分かればグラフがかけそうだね。今まで学習したことを考えて、グラフの特徴や式の特徴から頂点や y 軸との交点の座標が分からないかな。

Ｓ３：y 軸との交点は、$x=0$ を代入すればいいから、今までより簡単に求められそうだけど、頂点はどうすれば分かるんだろう。

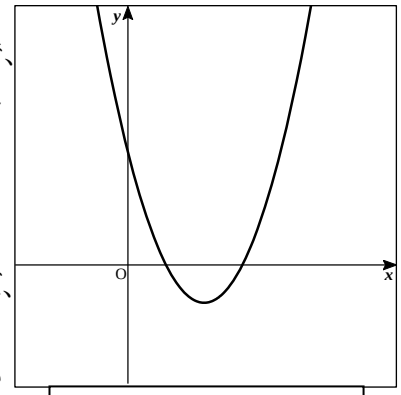
Ｓ４：それが、先生の言ったグラフの特徴や式の特徴から考えるということかな。

Ｓ５：グラフの特徴って、軸に関して対称だったり、上に凸か下に凸かということだったよね。

Ｓ６：今までグラフをかいたとき、x 軸と交わったときに、その交わった点の x 座標の真ん中が頂点だったから、x 軸と交わっているところの点が分かれば、頂点が分かるんじゃないかな。

Ｓ７：・・・・

Ｔ３：よく分からない人がいるようなので、だれか他の人で、説明できる人いないかな、前に出てきて黒板で説明してくれないかな。



Ｓ８が板書したグラフ

Ｓ８：（適当な放物線を黒板にかき、説明を始める）
さっき、Ｓ６君が言ったのは、このグラフのここととここが（放物線と x 軸との交点を指しながら）分かれば、それのちょうど真ん中が頂点になっているから、ここととここが（放物線と x 軸との交点を指しながら）分かれば、頂点が分かるということだと思います。

Ｓ９：えっ、本当にいつも真ん中なの？

Ｓ10：だって、２次関数のグラフは対称なんだから、真ん中になるんじゃないかな。

Ｔ４：確かに２次関数のグラフは軸に関して対称だから、うまく２点が分かれば頂点が分かりそうだね。問題は、「どうしたらこの２点が分かるか」だよね。これは、このあとグループになったら考えてみてください。
他の考え方はないかな。

Ｓ11：よく分からないんだけど…、

Ｔ５：いいよ、自分の言葉で説明してみて。

Ｓ12：さっきのは「グラフの特徴」だけど、「式の特徴」ってさっき言ってたから、$y=x^2-4x+3$ が、うまく今までやっていたような形に変えられれば、グラフがかけるんじゃないかな。

Ｔ６：今までやっていたような形って言うのは？

Ｓ13：$y=(x-1)^2+2$ みたいな形。

Ｓ14：どうやって、変えればいいんだ？

S15：そういえば、今までグラフをかいていたものは、だいたいカッコの２乗があったから、カッコの２乗になればいいんじゃないかな。
S16：カッコの２乗って前にも出てきたような気がするけど…。
Ｔ７：誰か覚えている人はいますか？
S17：２次方程式のところでやったんじゃなかったけ。解の公式のところで…。
Ｔ８：なかなかおもしろくなってきたね。式の特徴を考えてもグラフがかけそうだね。では、このあとは、グラフの特徴か、式の特徴か、どちらの方法でグラフをかくかを決め、そのかき方をグループで考えてグラフをかいてみてください。

場面１では、発表する生徒に、自分自身の言葉で表現するよう留意した。分かりにくければ、黒板に図を書かせたり、具体的なものを使って説明させたりすることが考えられる。その際、聞いている生徒のつぶやきを聞き逃さないことが大切である。つぶやいただけでは、その生徒の内的活動で終わってしまうので、それを話し合いの場に引き出すことによって外的活動である話し合いが活発化する。その結果、内的活動がさらに高められ、生徒自身が数学を創っていっていることを認識させることになる。

また、ここでは、Ｔ３の発言にポイントがあった。発表者以外の生徒に、発表された意見を考えた理由や具体的な例を発表させる。また、発表を中断させ他の生徒にその続きを説明させる。これらのことは、話し合いや議論を活発化させるには有効な手段である。また、多くの生徒が参加することで、内容の理解や表現力の向上にもつながる。ここでは、分かりにくかった発言（Ｓ６）を、黒板を使って分かりやく説明することを他の生徒に求めた。

さらに、Ｔ６、Ｔ７の指導は、既習事項と結びつける際に、教師が説明してしまうのではなく、生徒自身に思い出させ、生徒自身の言葉で表現させることをねらいとしている。既習事項は、生徒が考えるよりどころとなるものであるので、教師が与えるのではなく、生徒自身から導きださせたい。

生徒の成長がうかがえる場面もあった。Ｓ３、Ｓ４、Ｓ９、S14 は、他の生徒の発言に対して、率直に疑問を訴えることができていた。また、Ｓ５、S15 は、多くの生徒が既習事項を思い出すことに十分寄与したと思われる。これらの発言が自由に、しかも、規律の中で出てくることによって、話し合いが活発になり、数学的な表現力、数学に対する関心・意欲の高まりにつながると思われる。

場面２（２次関数の一般形のグラフのかき方の考察・グループ学習）

あるグループ（５人）に焦点を当てて、その会話を示す。途中、教師の助言が入っている。

Ｓ１：どっちで考える？
Ｓ２：グラフで考えるのは、難しそうだから式で考えようよ。
Ｓ３：どんなふうに難しいと思う。
Ｓ４：グラフがかけないのに、どうやったら２つの点が分かるか難しくないかな。
Ｓ５：えっ、式も難しそうだよ。どうやったらカッコの２乗になるの？
Ｓ６：結局、両方大変そうだね。とりあえず、グラフでやってみて、だめだったら式にしてみようか。
Ｓ７：そうだね。

Ｓ８：さっき、「どうやったら２つの点が分かるかが難しい」って言ってたけど、どうしたらいい。
Ｓ９：・・・・・
Ｔ１：何で難しいのかな。
Ｓ10：グラフがかけないし、２次関数だし、・・・。
Ｔ２：じゃ、何だったらわかりそうかな。
Ｓ11：１次関数だったら、中学校のときにやったからできそうだよ。
Ｓ12：そういえば、１次関数のときに x 軸との交点を求めなさい。とか、やったよね。どうやったんだっけ。
Ｓ13：y を 0 にしたんだよ。
Ｓ14：そうだ。じゃ、２次関数でも、y を 0 にすれば、２つの点の座標が分かるんじゃない。やってみよう。
Ｓ15：1 と 3 になったよ。
Ｓ16：その真ん中だから、2 だ。頂点は、2 だ。
Ｓ17：でも、それは、x だよね。y はどうすればいいんだ？
Ｓ18：さっき、分からないときに１次関数で考えたから、また、１次関数で考えればいいんじゃない。
Ｓ19：１次関数で x が分かっているときは、式に代入すれば、y が出てきたんだから、今度も、式に入れればいいんだよ。
…

このグループでは、グラフの特徴からグラフをかくことに挑んだ。生徒同士の話し合いでは、難しいか、難しくないかが中心となり、どこにその難しさがあるかを考察しないことが多い。ここでは、教師がその補助を行った。そして、難しさに潜む解決のヒントを既習事項に結びつけることによって、このグループでは解決に至ったことが読み取れる。

生徒同士の話し合いの中で、自分の考えを伝えたり、友達の考えからヒントを見出し自分の考えをまとめたりすることで、グループとして筋道だった考察、表現になっていることを実感させることが大切である。このことは、生徒同士の話し合いという外的活動が、自分でじっくり考えるという内的活動の質を高めることにもなる。

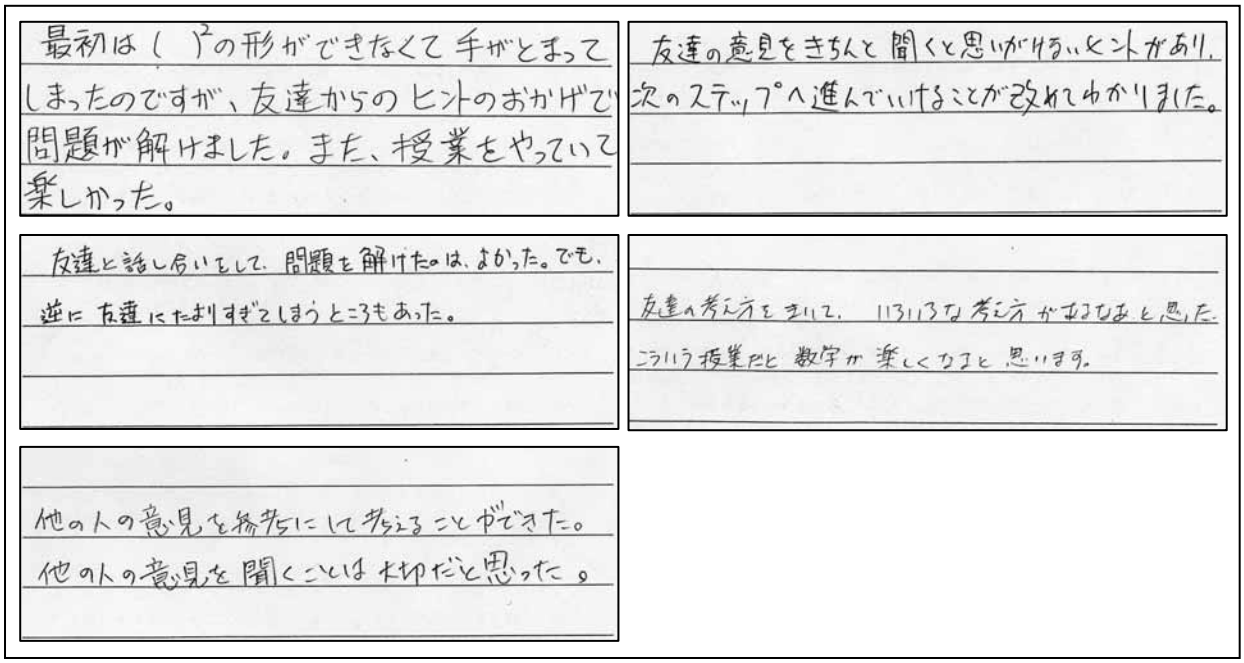
また、既習事項を思い出しただけでは、関連を図ることにはならない。思い出した既習事項を用いて、直面している課題を解決に導かなければならない。今回は、すぐに解決に向かったが、ときには、解決に結びつかないこともある。そのことも生徒にとっては、学習になるであろう。

数学的な表現としては、まだまだ稚拙なところもあるが、以前と比較すると、発言の回数が増え、発言の内容も飛躍的に進歩している。今後、話し合う機会、書く機会を継続して設定することによって、表現力も徐々に身に付いていくことが期待される。

④授業後の取組と生徒の感想

本授業後に、グラフの特徴からグラフをかく方法、式の特徴からグラフをかく方法、それぞれのよさを話し合った。生徒からは、「２次関数のグラフの特徴をよく理解できた」「２次関数と２次方程式がこんなところでつながっているとは思わなかった」との感想が出されたが、生徒の話し合いで、今後は式の特徴からグラフをかく方法、すなわち、平方完成をしてグラフをかくことになった。その上で、２次関数の式の１次の係数が奇数である場合、２次の係数が１以外の場合について考察

し、２次関数のグラフのかき方としてまとめた。授業後に自由記述で授業の感想を書かせた。以下はその主なものである。



生徒の感想を見ると、おおむね好意的に受け止めている生徒が多かった。しかし、「友達に頼りすぎてしまうところもあった」、「あまり自分の思ったことを口にすることができなかった」という感想のように、生徒によっては消極的な感想も若干見られた。今後は、これらの生徒が活躍できるようなグループ編成、問題場面の設定、助言の仕方も考えていかなければならない。

3　指導の結果と成果

(1) 生徒へのアンケート調査結果

授業を実施したクラスで、再度「数学の授業に関するアンケート」を実施した。その結果をまとめたものが次ページの**表２**である。その結果を見ると、意識の変容が見て取れる。特に、事前の調査では、友達の考えを聞くことの重要性の意識（「大切だ」という意識　項目(6)(7)(9)(10)）が高く、友達の考えを聞くことの意識（「～してみたい」という意識　項目(1)(2)(4)(5)）が低かったが、事後の調査では、友達の考えを聞くことの意識が高まっていることが分かる。実際に授業の中で、友達の考えを聞き、それに対して質問したり、意見を述べたりする経験を重ねることによって、自分たちにもできることが実感できたからであると考えられる。さらに、話し合ったり議論したりするという外的活動が、自分でじっくり考えるという内的活動の質を高めることになったことを実感できたからであると考えられる。これは、教師にとっては大いに反省をすべきことでもある。初めから無理だと決めつけずに、様々な経験を積ませることによって、生徒は大きな変容を見せる。今後、このような授業を継続することによって、生徒の数学の授業や数学そのものに対するイメージが、問題を解くことだけが数学の学習なのではなく、考えることとそれを他者に分かるように表現することも大切な要素であることが認識されるようになる。

表２「数学の授業に関するアンケート」（実施後）の結果

質　問　事　項	平均値		
	取組前		取組後
	全体	実施クラス	実施クラス
(1)　数学の授業のとき、友達の考えを聞いてみたいと思います。	2.8	2.8	3.3
(2)　数学の授業のとき、友達がなぜそのように考えたのか、そのわけを聞きたいと思います。	2.7	2.6	3.4
(3)　数学の授業のとき、自分でじっくり考えてみたいと思います。	3.1	3.1	3.6
(4)　数学の授業のとき、友達の発表に対して、問い返したいと思います。	1.8	1.8	3.6
(5)　数学の授業のとき、友達の考えに、付け加えたいと思います。	1.8	2.0	3.4
(6)　数学の授業のとき、友達の考えを聞くことは大切です。	3.3	3.4	3.4
(7)　数学の授業のとき、いろいろな考え方のわけを聞くことは大切です。	3.3	3.4	3.6
(8)　数学の授業のとき、自分でじっくりと考えることは大切です。	3.5	3.5	3.7
(9)　数学の授業のとき、問い返すことは大切です。	2.7	2.7	3.6
(10) 数学の授業のとき、付け加えることは大切です。	2.5	2.7	3.4
(11) 数学の授業のとき､友達の考えが同じか､違うかを知ることは大切です。	2.9	3.3	3.3
(12) 数学の授業のとき、よりよい考えに高めていくことは大切です。	3.3	3.5	3.5
(13) 数学の授業のとき、友達と話し合うことは大切です。	3.2	3.4	3.6
(14) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすることは、数学の勉強によいことです。	3.0	3.2	3.6
(15) 数学の授業のとき、自分でじっくり考えていくと、分からないことや疑問に思っていることが分かるようになります。	2.8	2.9	3.1
(16) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、考えをはっきりとしたものにすることができます。	3.0	3.1	3.4
(17) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、考えを深めることができます。	3.1	3.2	3.5
(18) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、新しい考えをつくりだすことができます。	2.9	3.1	3.5

（２）　実践を通して

今回取り組んで、課題となることが大きく２点あった。

１つは、生徒の表現力の未熟さである。考えを発表する前に、自分のノートに考えを書かせたが、内容は十分ではなかった。図だけで示されていて何を示しているのかが分かりにくいもの、文章だけで表現されていて数学的な表現ができていないもの、式の羅列に終始していて式の意味やその式が成り立つ理由が不明なものなどがあった。また、発表の内容が、周囲に理解されないものもあった。数時間の授業では、生徒の表現力を十分に養うことはできない。３年間を見通して、考え方を記述したり、話し合ったり、議論したりする場面を設定することで、数学的な表現力の育成を図っていく必要がある。

もう１つは、単元の計画を数学的コミュニケーションの視点から改めて見直すことである。全ての授業で、話し合ったり議論したりする時間を設けることは難しい。そこで、単元全体の中で、どの場面で何を考えさせるのかを明確にすることが大切となる。その単元の主となる考え方の学習には、やはり生徒にじっくりと取り組ませたい。既習事項や今後学習する内容との結びつきを踏まえて、生徒に考えさせたいこともある。また、話し合ったり議論したりする時間を設定しなくても、発表者以外の生徒に、発表された意見を考えた理由や具体的な例を発表させたり、発表を中断させ他の生徒にその続きを説明させたりするなど、生徒の発言の取り扱い方を工夫するだけでもコミュニケーションが活発化し、内的活動を充実させることができる。これらのバランスを考えながら、単元全体でメリハリのある計画を設定する必要がある。その際、授業で扱う課題の設定も重要となる。教科書に載って

いる例や例題をそのまま課題として設定することができる場合もあれば、生徒の実態を踏まえて課題を新たに設定しなければならないこともある。数学的コミュニケーション能力の向上を図るためには、生徒の既習事項の習得状況、表現力、数学の学習への関心や意欲を十分に把握し、生徒の実態にあった課題を設定する必要がある。

今回の取組を通して、生徒は大きな収穫を得ることができた。それは、数学的課題を材料として、友達と話し合ったり議論したりすることができ、そして、そのよさを再認識したことである。さらに、「数学を考える」ということがどういうことかを経験したことである。これらの意識の変容をここで終わらせることなく、さらに大きな変化となるよう授業の改善に取り組む必要がある。