事例２　指数関数・対数関数「対数」の指導の工夫
～記号化の考え方～

１　単元の指導計画・評価計画

(1) 単元の目標

対数の意味を理解するとともに、その有用性を認識することができるようにする。また、対数の基本的な性質を理解し、対数の計算をできるようにする。

(2) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
A1　対数やその性質に関心をもつとともに、それらを活用しようとしている。	B1　対数という概念を導入する過程を考察することができる。 B2　指数法則と対数の定義から、対数の性質を考察することができる。	C1　対数の記号や対数の性質を用いて、表現し処理することができる。 C2　底の変換公式を用いて、表現し処理することができる。	D1　対数の意味や対数の性質を理解し、基礎的な知識を身に付けている。

(3) 単元の指導計画並びに評価計画（４時間）

時間	学習活動	評価規準とのかかわり	評価方法
第１時間 **（本時）**	指数の近似値を求め、対数を導入する。	B1、D1	観察、ワークシート、小テスト、自己評価
第２時間	指数法則と対数の定義から対数の性質を導く。	B2、D1	観察、小テスト、自己評価
第３時間	対数の性質を用いて、対数の計算をする。	A1、C1	観察、小テスト、自己評価
第４時間	底の変換公式を導き、等式の変形をする。	C2	観察、小テスト、自己評価

２　本時の計画

(1) 本時の目標

・指数方程式を満たす指数の近似値を求め、その値を記号 log で表す考え方ができる。(B1)
・対数の記号を用いて、指数や値を表現できる。(C1)

(2) 本時の「数学的な見方や考え方」とポイント

・片桐氏による「記号化の考え方」とは、『記号に表していこうとする考え方と記号化されたものをよんでいこうとする考え方とがある。そして、さらに数学的用語を用いて簡潔、明確に表したり、これをよんでいこうとする考え方も含めていくものとする』考え方である。
・数学の世界では、定義として割り切って指導した方が効率的であることが多いが、効率を追うあまり、学ぶ必要性や意義が生徒にとって明らかとならず、学習の意欲を削ぐことがある。可能な限り、定義が生まれるまでの過程を大切にした指導をしたい。また、考えることとは、決

して問題を解くときのことだけを指しているのではなく、数学的知識の意味等を自分で深く考えることも含まれる。

(3) 本時の「数学的な見方や考え方」の評価（評価規準）と「努力を要する」生徒への手立て

「十分満足できる」状況（A）

指数方程式を満たすxの値を記号に表していこうとする考え方ができる。さらに、２つの数字を用いて、自ら記号にすることができる。

「おおむね満足できる」状況（B）

指数方程式を満たすxの値を記号に表していこうとする考え方ができる。

「努力を要する」状況と評価した生徒への手立て（回復指導）

放課後、数学の記号化された例を挙げて指導する。

(4) 本時の展開

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
指数の確認をする。	ワークシート① 復習　ある細菌は 1 時間で 10 倍に数が増える。最初は細菌が 100 個であったとすると、3 時間後には細菌は何個になるか？	・指数法則を確認する。 ・課題１につなげるために 10 の累乗で表す。
指数方程式を立てる。	課題１　1時間で10倍に数が増える1個の細菌がある。 (1) 1 億倍になるのは何時間後か？ (2) 2 倍になるのは何分後か？ (3) 30 分後や 10 分後は何個の細菌があるか。 ＜予想される生徒の反応＞ (1) 1 億＝10^8なので 8 時間 (2) 2 倍は 10 倍の 5 分の 1 なので $60\div5=12$ 分 (3) 30 分後は$10^{\frac{1}{2}}$個、10 分後は$10^{\frac{1}{6}}$個	・隣の生徒と相談させ、積極的に意見が出るよう机間指導をしながら促す。 ・$10^x=2$ を満たすxを求めればよいことに気付かせる。
対数の意味を考える。	ワークシート② 課題２　$10^x=2$を満たすxの値を求めよう。 ①$10^0=1$、$10^1=10$ であるからxの整数部分は 0 ②$10^{0.3}=1.995\cdots$、$10^{0.4}=2.511\cdots$であるから、xの小数第１位の値は 3 となる ③$10^{0.30}=1.995\cdots$、$10^{0.31}=2.041\cdots$であるから、xの小数第２位の値は 0 となる この計算を繰り返すと、$10^{0.3010299\cdots}=2$ であるから、1 時間で 10 倍に増える細菌が 2 倍になるのは、0.3010299･･･時間後と分かる。 すなわち、約 0.3 時間＝18 分となる。	・２人１組になり、１人が関数電卓で計算し、もう１人は記録する役割にする。 ・STEP１、STEP２は説明しながら進め、STEP３は各ペアのペースで進めさせる。

新しい記号を考える。	ワークシート③ 【発問】この x の値を表すよい方法はないだろうか？ 無理数を記号で表した考え方を思い出し、無限小数を記号にすることを考える。	・記号 log を導入する前に生徒に新しい記号を考えさせる。 評価【記号化の考え方】 指数方程式を満たす x の値を記号に表していこうとする考え方ができる。B1
	問題１　1 時間で 3 倍の数になる細菌がある。 この細菌が 5 倍の数になるまでにかかる時間を求めよ。	・上の質問で生徒から新しい記号の案が出ていれば、その記号を使って表す。
対数の定義を理解する。	$10^x = 2$ を満たす x のことを、10 を底とする 2 の対数といい、$x = \log_{10} 2$ と表す。 すなわち、$10^{\log_{10} 2} = 2$　であり、 $\log_{10} 2 = 0.3010299\cdots$　である。	
	例題３　(1)　$2^3 = 8$　から　$3 = \log_2 8$ (2)　$\frac{1}{2} = 2^{-1}$　から　$-1 = \log_2 \frac{1}{2}$	・今まで扱ってきた数値（指数が整数の場合）について log を用いて表す。
	《指数と対数》 $a > 0, a \neq 1, M > 0$ とするとき、 $a^p = M \Leftrightarrow p = \log_a M$	・指数と対数の関係を一般的にまとめる。 ・「底」「真数」という用語をここで指導する。
	問題２　次の□に適する数を求めよ。 (1)　$3^2 = 9$　から　$2=$ □ (2)　$\frac{1}{25} = 5^{-2}$ から　$-2=$ □	評価【数学的な技能】C1
振り返る。	自己評価表を記入する。	・自己評価表の活用を指導する。

(5) ワークシート、自己評価表

対数ワークシート①

２年　　組　　番　氏名

復習　ある細菌は 1 時間で 10 倍に数が増えるという。最初は細菌が 100 個であったとすると、3 時間後には細菌は何個になるだろうか。

課題１　1 時間で 10 倍に数が増える 1 個の細菌がある。

(1)　細菌の数が 1 億倍になるのは何時間後か。

(2)　細菌の数が 2 倍になるのは何分後か。

(3)　30 分後や 10 分後は何個の細菌があるか。

対数ワークシート②

２年　　組　　番　氏名

課題２　$10^x = 2$ を満たす x の値を求めよ。

STEP１：x の整数部分を求めよう！

$10^0 =$ [　　]　$10^1 =$ [　　] より、[　　] $< x <$ [　　]

すなわち、x の整数部分は [　　] であることが分かる。

STEP２：x の小数第１位を求めよう！

・$10^{0.1} =$

・$10^{0.2} =$

・$10^{0.3} =$

・$10^{0.4} =$　　すなわち、x の小数第１位は [　　] であることが分かる。

STEP３：x の小数第２位、小数第３位、小数第４位・・・とできるところまで調べてみよう！

STEP４：ワークシート①課題１に戻りましょう。

1 時間で 10 倍に数が増える細菌が、2 倍の数になるまでにかかる時間を x とすると、

x は方程式 [　　] を満たす。

このとき $x =$ [　　] 時間。すなわち 約 [　　] 分であることが分かった！

対数ワークシート③

２年　　組　　番　氏名

ところで・・・xの値を表すよい方法はないだろうか？

問題１

1 時間で 3 倍の数になる細菌がある。この細菌が 5 倍の数になるまでにかかる時間を求めよ。

例題

(1) $2^3=8$を変形すると　3＝□　　(2) $\frac{1}{2}=2^{-1}$を変形すると□

問題２　次の□に適する数を求めよ。

(1)　$3^2=9$　から　　2＝□　　(2)　$\frac{1}{25}=5^{-2}$　から　−2＝□

自己評価表

２年　　組　　番　氏名

学習課題	自己評価
課題１ 指数方程式を立てる。	□細菌の数が 2 倍になるまでの時間を考えることができた。 □自分の考えた答えについて考察することができた。 □指数方程式を立てることができた。
課題２ 新しい記号を考える。	□xの値を記号にするよさに気付いた。 □指数の無限小数を表すよい方法を考えることができた。 □関数電卓を用いて、10 の累乗の値を求めることができた。 □記号 log の意味が理解できた。
問題１ 記号を用いて表す。	□記号を用いて表すことができた。
問題２ 対数の記号を用いて変形する。	□対数の記号を用いて、式を変形することができた。

授業アンケート

1　今日の授業について

よく分かった　　分かった　　あまり分からなかった　　全く分からなかった

理由

2　今日の授業の感想を書いてください。

3　授業の記録

(1) 授業中の生徒の様子

復習の問題において 100,000 個という正答を全員が難なく求めることができたが、はじめから 100,000 を指数で表していた生徒はほとんどいなかった。そこで、教師から指数を用いて表現するように指示を出すと、簡単に10^5と変形できた。

課題１(1)では復習の解答において値を指数で表したことから、1 億を10^8として表した生徒が増加した。ほぼ全員の生徒が 8 時間後という答えを求めることができた。その求め方は時間をxとして指数方程式を立てた生徒は半数程度であり、その他の生徒は 1 を 10 倍ずつしながら、10 を何回掛けるのか数えながら求めていた。(2)では生徒の多くが 12 分後と答えたが、6 分後と答えた生徒は３名であった。周囲の生徒同士で相談させた結果、数人に発表してもらったときには全員の生徒が 12 分後という意見になってしまった。少数意見であった 6 分後を例に挙げて教師が説明して間違いであること確認してから、12 分後の場合について生徒に各自で計算させた。12 分後、24 分後、36 分後…と 2 倍ずつしながら考えていくことで、1 時間後には 10 倍を大幅に超えてしまうことを生徒は実感していた。答えが違っていることは分かった。(3)では 30 分後は$10^{\frac{1}{2}}$個、10 分後は$10^{\frac{1}{6}}$個、15 分後は$10^{\frac{1}{4}}$という答えが出てくるようになった。そこで教師が「どうやって考えたのか。どのような式が作れるか」とヒントを出したところ、ほとんどの生徒が(2)の答えを導くための$10^x = 2$という指数方程式を立てることができた。同時に、その方程式を満たす実数xが、これまで学習してきた知識では求められないことを察知した様子であった。$10^{\frac{1}{2}}$の値を質問しても分からなかったので、関数電卓を使わせた。

課題２では、教師が小数第１位を求めるところまでを全体で説明し、小数第２位以降は２人１組のペアになり、各ペアのペースで求めさせた。初めて関数電卓を扱うこともあり、電卓に興味を示しながら意欲的に互いに協力して活動に取り組んでいるペアが多かった。ペアの中には$10^{0.31}$, $10^{0.32}$, $10^{0.33}$…と値だけ求めていて目的がずれてしまったり、計算から記録まで全て１人で行ってしまったりしているペアがあったので、机間指導を行いながら活動を進めさせた。

活動の進度はペアによって様々であったが、一番早く小数第６位まで求められていたペアの生徒にその結果を発表してもらい STEP４以降に進んだ。

ワークシート③の「ところで・・・xの値を表すよりよい方法はないだろうか？」の質問欄に記入した生徒は誰もいなかった。そこで、次のように、生徒の受け答えで記号化の必要性について説明をしてから対数の記号化へと話を進めた。

Ｔ：「小数第６位以下も循環しない数字が続くが、このような数を何というか？」
Ｓ：「無理数」
Ｔ：「無理数にはどのような数があるか？」
Ｓ：「π、$\sqrt{2}$など」
Ｔ：「πとはいくつのこと？」
Ｓ：「3.14‥‥」
Ｔ：「$\sqrt{2}$とはいくつのこと？」
Ｓ：「1.4142･･･」
Ｔ：「これらは無理数だけど、どう表現しているの？」
Ｓ：「記号で表現している」
Ｔ：「最後まできちんと表すことができない無限小数は、今まで記号化して表現していた」

先の説明により記号化の必要性は納得していた。$10^x = 2$を満たすxの値について自分で新しい記号をつくろうというのは初めての試みであったため、生徒は戸惑っている様子でなかなか意見は出てこなかった。そこで、普段から活発な生徒を指名したところ、自分の名前の頭文字を使い「Ｆ

２」という記号を発表してくれた。その記号を用いて「$10^x = 3$ を満たす x」を表現させると、迷わず「Ｆ３」という答えが返ってきた。敢えてこのまま問題１に進み、そこでこの記号の不具合に気付かせるという授業展開とした。

問題１では、時間を x とした指数方程式 $3^x = 5$ を立てられたが、x をＦの記号では表現できないという困惑の表情を浮かべていた。生徒にとってかなり難しい問題となってしまったようであるが、生徒はそんな表情の中に何とかしようと考えている雰囲気があった。「なぜＦの記号ではうまく表現できないのか」という質問に対し、「3 と 5 の２つの数が表せない」と答える生徒がいたため、「Ｆ２」だけでなくもう１つの数字をつける必要があることに気付かせることができた。

「記号『Ｆ２』をつくったように考えてみてはどうか」と促したところ、「$F5_3$」「$F5^3$」の２種類の答えを多くの生徒がかくことができた。どちらの答えも間違いではないことを伝えた上で答えを１つにするために、記号の中から最も多い「$F5_3$」を答えとして全員で選んだ。数学の世界では、これを表す記号が対数 $\log_3 5$ であることを定義し、指数と対数の関係を一般化として黒板にまとめた。記号で用いる２つの数字が小さい数字 3 と大きな数字 5 で表すところが一致していたので、生徒は満足感があったようだ。

(2) 自己評価表

数学的な見方や考え方に関する自己評価の結果は次のようになった。

学習課題	自己評価
課題１ 指数方程式を立てる。	□細菌の数が 2 倍になるまでの時間を考えることができた。→19 名（67.9%） □自分の考えた答えについて考察することができた。→10 名（35.7%）
課題２ 新しい記号を考える。	□ x の値を記号にするよさに気付いた。→16 名（57.1%） □指数の無限小数を表すよい方法を考えることができた。→８名（28.6%）
問題１ 記号を用いて表す。	□記号を用いて表すことができた。→17 名（60.7%）

課題１(1)や課題２STEP３については記入されていたが、それ以外の部分は未記入であるものが多かった。課題１(1)では復習の解答において値を指数で表したことから、100 億を 10^{10} として表した生徒が増加した。時間を x として指数方程式を立てた生徒は 12 名（42.9%）であった。ワークシート①の記述から(2)において 12 分後と答えた生徒が約９割、6 分後と答えた生徒が約１割であった。

課題２では、x の値を記号にするよさに気付いた生徒が 16 名（57.1%）、指数の無限小数を表すよい方法を考えることができた生徒は８名（28.6%）と半数になっている。

(3) アンケート結果

ア　今日の授業について

よく分かった	分かった	あまり分からなかった	全く分からなかった
５名（17.8%）	１８名（64.4%）	５名（17.8%）	０名(0.0%)

「よく分かった」「分かった」主な理由

（理由　logでの表し方がしっかりと理解できたから。）

理由 自分で考え方を引き出せるようになったから。

理由 log を使うことになる迄の過程の説明があったから。

イ　今日の授業の主な感想

小数が長々と出てきていたときは、分からないと思ったけど、「log」になって理解できた。
分かりやすかったです。

(4) 指導と評価（数学的な見方や考え方）の一体化

ア　授業中の評価

課題２のときに、観察によって生徒を評価することは難しい状況であった。そこで、問題１において「記号『Ｆ２』をつくったように考えてみてはどうか」とヒントを与えたときに、「Ｆ5_3」「Ｆ5^3」のような２つの数字を使って答えをかくことができた生徒を「おおむね満足できる」状況（Ｂ）と評価した。

イ　自己評価表とアンケートからの評価

課題２において、xの値を記号にすることのよさに気付いた生徒 16 名（57.1%）を「おおむね満足できる」状況（Ｂ）と評価できる。アンケート結果から８割以上の生徒が授業を分かったが、評価規準に達していない生徒が多かったと判断できたので、次時に確認問題を実施した。

ウ　指導の改善の工夫

$10^x = 3$を満たすxの表現を「Ｆ３」であると生徒が答えたときに、そのまま問題１に進んで記号の不具合に気付かせるという授業展開としたが、記号「Ｆ２」、「Ｆ３」と出てきた次の段階で、教師が 10 以外の底を提示し、本当にこの記号で十分かどうかを生徒に考えさせて意見交換させる場面をつくる授業ができる。また、授業の最後に、振り返りとして生徒同士で対数を記号でかく問題を出し合う場面、例えば「5 を底とする 2 の対数を記号でかけ」をつくることもできる。

次時は、本時の生徒の様子から、次のような課題の提示から対数の性質の授業を行う。

例　$\log_{10} 2+\log_{10} 3=\log_{10} 5$　と計算してよいだろうか。

新しいことを考えようといわれても自分で創造することのできない生徒が多かった本時を踏まえて、三角関数の加法定理と同様に、対数の性質で生徒が躓きやすい例を提示し、考察してから対数の性質を導く授業展開である。無意識に計算すると例のようになってしまうところを、関数電卓を利用して確かめる。計算の誤りに気付いたら次はどうすべきかを考える。指数法則などを利用して証明する。

(5) 確認問題と「努力を要する」状況と評価した生徒

ア　確認問題

確認問題

２年　　組　　番　氏名

$\log_2 16$は何を表しているか説明しなさい。

対数の値が整数になる確認問題を出題した。答案をみると、説明しながら４という値になるなど対数の意味を深く理解している生徒が４名（14.3%）いた。授業の印象が強く残っていたために無理数や無限小数のような答えをかいた生徒もいた。これらの生徒については、$\sqrt{4}$ のように、必ずしも記号 log で表された数が無理数とは限らないことを理解したようだった。

＜解答例＞

2 を底とする 16 の対数の記号、$2^x = 16$ から $x = 4$、$2^x = 16$ となる数 x を表す記号、$2^{\log_2 16} = 16$ など（15 名）、底が 2、真数が 16 など（10 名）、無理数、循環しない無限小数など（３名）

イ　「努力を要する」状況と評価した生徒

「努力を要する」状況と評価した生徒は、自己評価表で「問題１　記号を用いて表すことができた」にチェックの入っていなかった生徒のうち、確認問題で $\log_2 16$ が何を表しているか説明できなかった生徒とした。その生徒にこれまでに学んだ数学の記号化された例を挙げながら、対数の記号について指導を実施した。そして後日改めて確認問題を行い、「$\log_{10} 2$ は何を表しているか説明しなさい」と出題したところ、「10 を底とする 2 の対数の記号」や「$10^x = 2$ となる数 x を表す記号」と答えることができたため、対数についての記号化の考え方が理解できたと判断した。

４　授業を振り返って

授業アンケートにおいて、23 名（82.2%）の生徒が、今日の授業は「よく分かった」、「分かった」と答えている。本時の目標は、指数方程式を満たす指数の近似値を求め、その値を記号 log で表すことの有用性に気付くことであった。そのために、関数電卓を利用して近似値を探し出す経験をさせることで、対数の意味とその必要性を実感させたり、対数を記号 log で表すことにより簡潔、明瞭に表現できるなど記号化のよさを実感させたりすることをねらいとした授業を行ったのである。対数を正しい記号でかくことが目標ではなかったわけで、生徒が対数の記号で表すことができなかったことを評価してしまわないように気を付けた。数学的な見方や考え方という観点はそのあたりを評価するところが難しいのだと思う。誤答の原因を考えると、正しい記号は次時から指導していけばすぐに正しく表すことができそうである。教師が焦らずじっくりと取り組む姿勢が大切であると感じた。

新しいことを考えようといわれても自分で創造することのできない生徒が多い実態が明らかになった。日頃「教えたことを覚えさせる」というこれまでの指導を行ってきていたことを反省させられた。このように知識の詰め込みでなく自ら考える力を身に付けさせるために、授業を改善していかなければならないことを感じた。また、例えば、前節の指数関数の単元において方程式を解くことは行ったが、方程式をつくることは行わなかった。方程式がつくれない生徒が多いことが授業の中で分かったので、補足しながら授業を進める状況になった。このように指導計画の後にも、これまでの指導の改善をしていかなければならない。