事例３　微分・積分の考え「導関数の応用」の指導の工夫
～　発展的な考え方　～

１　単元の指導計画・評価計画

(1) 単元の目標

導関数を用いて関数の値の増減や極大・極小を調べ、グラフの概形をかくことができるようにする。また、微分の考えを事象の考察に活用することができるようにする。

(2) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
A1　導関数を用いて関数の値の増減や極大・極小を調べようとしている。 A2　微分の考えを事象の考察に活用しようとしている。	B1　関数の値の増減や極大・極小を微分の考えを用いて考察できる。 B2　いろいろな事象を微分の考えを考察し表現したり、その過程を振り返ったりすることなどを通して、数学的な見方や考え方を身に付けている	C1　導関数を応用して接線の方程式を求めることができる。 C2　関数の増減及び極値を調べ、グラフの概形をかくことができる。	D1　微分係数と接線の傾きについて理解し、知識を身に付けている。 D2　導関数を用いて関数の値の変化を調べることを理解している。

(3) 単元の指導計画並びに評価計画（７時間）

時間	学習活動	評価規準とのかかわり	評価方法
第１時間	曲線上の点における接線の方程式を導く。	C1、D1	観察、ワークシート、自己評価、小テスト
第２時間 第３時間	関数の値の変化の様子を、導関数を用いて調べる。 関数の増減や極大・極小を調べて、グラフの概形をかく。	A1、B1、C2	観察、自己評価、小テスト
第４時間	導関数を用いて、関数の最大値・最小値を求める。	D2	観察、自己評価、小テスト
第５時間 第６時間 第７時間 **（本時）**	関数の増減を調べて、３次方程式の実数解の個数を求めたり、不等式を証明したりする。 グラフを表す３次関数の式を複数の解法で求める。	A2、B2	観察、ワークシート、自己評価、小テスト

２　本時の計画

(1) 本時の目標

・グラフを表す３次関数の式を求めようとしている。(A2)
・いろいろな角度から問題を考察することができる。(B2)

(2) 本時の「数学的な見方や考え方」とポイント

・片桐氏による「発展的な考え方」とは、『１つのことが得られても、さらによりよい方法を求めたり、これを基にして、より一般的な、より新しいものを発見していこうとする考え方』である。

・問題解決後に、数学的に思考したことを自分自身に問いかけたり、他と議論したりして振り返り、考察することを大切にしたい。このような振り返りにより、自分の数学的な考えの正しかったことが分かり、それらが自らの知識として構成されるとともに、次なる段階での創造的な思考に有意に働くと考える。アンケートを用いて、本時の学習で分かったことはどういうことか、本時の学習でどのように考えてきたのかなどについて、自らの学習過程を振り返らせたい。

(3) 本時の「数学的な見方や考え方」の評価（評価規準）と「努力を要する」生徒への手立て

「十分満足できる」状況（A）

１つの解法だけでなく、別解を考えることができる。さらに、より新しい解法や条件が変わればどうなるのか、一般化できないかなどを考えることができる。

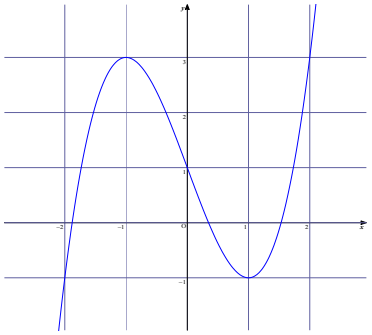
「おおむね満足できる」状況（B）

１つの解法だけでなく、別解を考えることができる。

「努力を要する」状況と評価した生徒への手立て（回復指導）

役に立った重要なアイデアをノートに記録させ、そのよさを考えるきっかけを与える。

(4) 本時の展開

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
３次関数のグラフの性質を言葉や式に表す。	課題　３次関数のグラフがある。 （１）グラフから読み取れることを言葉や式で表せ。また、増減表をかけ。 （２）３次関数をいろいろな解法で求めよ。 ＜予想される生徒の解答例＞ （１）３次の係数が正、y 切片が１、 $x=-1$ で極大値 3、$x=1$ で極小値-1、 $x \leqq -1$、$1 \leqq x$ で増加、$-1 \leqq x \leqq 1$ で減少、 (-2，-1)、(2，3) を通る	
３次関数を決定する。	（２）（解法１）３次関数を一般形におく。 ①　通る点の条件から、４元１次連立方程式を解き、係数を決定する。 ②　導関数が満たす条件から、導関数の係数を決定する。 （解法２）グラフを平行移動すると３次関数を因数分解形における。 y 軸方向に１だけ平行移動して得られる３次関数と x 軸の共有点の x 座標から３次関数を因数分解形 $y=a(x+2)(x-1)^2$ とおく。	評価【関心・意欲・態度】A2 評価【発展的な考え方】B2 １つの解法だけでなく、別解を考えることができる。 ・２人１組で考えさせ、多様な考え方や新しい考え方を見つけることに重点を置く。

微分の逆の操作を考える必然性を理解する。	（解法３）導関数から３次関数を導く。 関数の増加・減少の様子から、導関数を $y'=a(x-1)(x+1)$ とおき、微分の逆操作を考える。 ※生徒から解法３が出ない場合の発問 ・「微分して、３次関数のグラフがかけた。では、グラフから３次関数のどんな式が分かるか。」 ・「増減表から、導関数の式が分かるか。」 ＜予想される生徒の解答例＞ $y'=(x-1)(x+1)$ 、 $y'=a(x-1)(x+1)$ 【発問】 y' から y を求めるには、どうしたらいいか。 ＜予想される生徒の反応＞ ・微分を逆に行う ・微分して $y'=ax^2-a$ になる関数を考える ・ $3x^2$ を x^3 、 $2x$ を x^2 に置き換える ＜予想される生徒の誤答＞ $y=\frac{a}{3}x^2-ax$ 、 $y=\frac{a}{3}x^2-ax+1$	・「微分する」と「積分する」(「導関数」と「不定積分」）を対比する。記号の導入や積分定数は次時にする。 ・積分定数については、本時はふれず、グラフの y 切片から、３次関数の定数項が１であることのみ確認する。
周囲の生徒と解法を振り返る。	それぞれの解法のよさや積分の必然性などを振り返る。	・まず、自分自身で振り返った後、周囲の生徒と振り返らせる。
自己評価で振り返る。	自己評価シートを記入する。	・自己評価表の活用を指導する。

(5) ワークシート、自己評価表

ワークシート

２年（　　）組（　　）番　氏名（　　）

課題１　＜グラフから読み取れたこと＞

言葉で表してみよう	それを式で表してみよう
・ ・	

課題２　＜３次関数をいろいろな解法で求める＞

（　　）さんの方法	（　　）さんの方法
（　　）さんの方法	（　　）さんの方法

自己評価表

２年（　　）組（　　）番　氏名（　　）

学習課題	自己評価
課題 （1）グラフを読み取り、言葉や式で表す	□言葉や式で表すことができた。 □増加・減少に着目できた。 □増減表にまとめることができた。 □導関数を求めることができた。
課題 （2）もとの３次関数をいくつかの解法で求める。特に、新しい解法を見つける	□少なくとも１つの方法で、３次関数を求めることができた。 □複数の解法で考えた。 □平行移動を考えようとした。 □導関数からもとの関数を求める方法があることがわかった。 □導関数からもとの関数を求める逆演算を考えられた。

アンケート

1　今日の授業の理解度について

よく理解できた　　理解できた　　理解できなかった　　全く理解できなかった

理由「

」

2　今日の授業で分かったことや特に大切だと思ったことは何ですか？

3　今日の授業の感想を自由に書いてください。

3　授業の記録

(1) 授業中の生徒の様子

課題（1）のグラフを読み取ることについては、極値やその極値を与える x の値、通る点などはすぐに出てきたが、増加・減少についての答えはなかなか出てこなかった。それらから増減表をつくることはできたが、関数の増加・減少を不等式で表すことはできなかった。

課題（2）では、３次関数を一般形において解く生徒が多かった。極値を与える x の値が２次方程式の解であることを利用して解と係数の関係から３次関数を決定した生徒もいた。生徒は課題を解くことに一生懸命になっていた。解けた生徒に別解を考えさせてみたが、グラフを平行移動させる解法２の考え方をする生徒はいなかった。増減表から y' の式を考えさせてみると、生徒はすぐに $y'=a(x-1)(x+1)$ を導いた。$y'=ax^2-a$ と変形した後、y' から y を求めるにはどうしたらいいかと発問すると、微分して y' になる式を考えると答えたので、各自でその式を求めさせた。ここで余裕が出てきたのか、答えに興味をもち始めたのか周囲の生徒と相談しはじめる生徒がでてきた。教師が y 切片について特に触れなくても答えを導きだしていた。他の生徒の意見が自分のより深い理解へとつながっていることを実感している生徒が多数みられた。

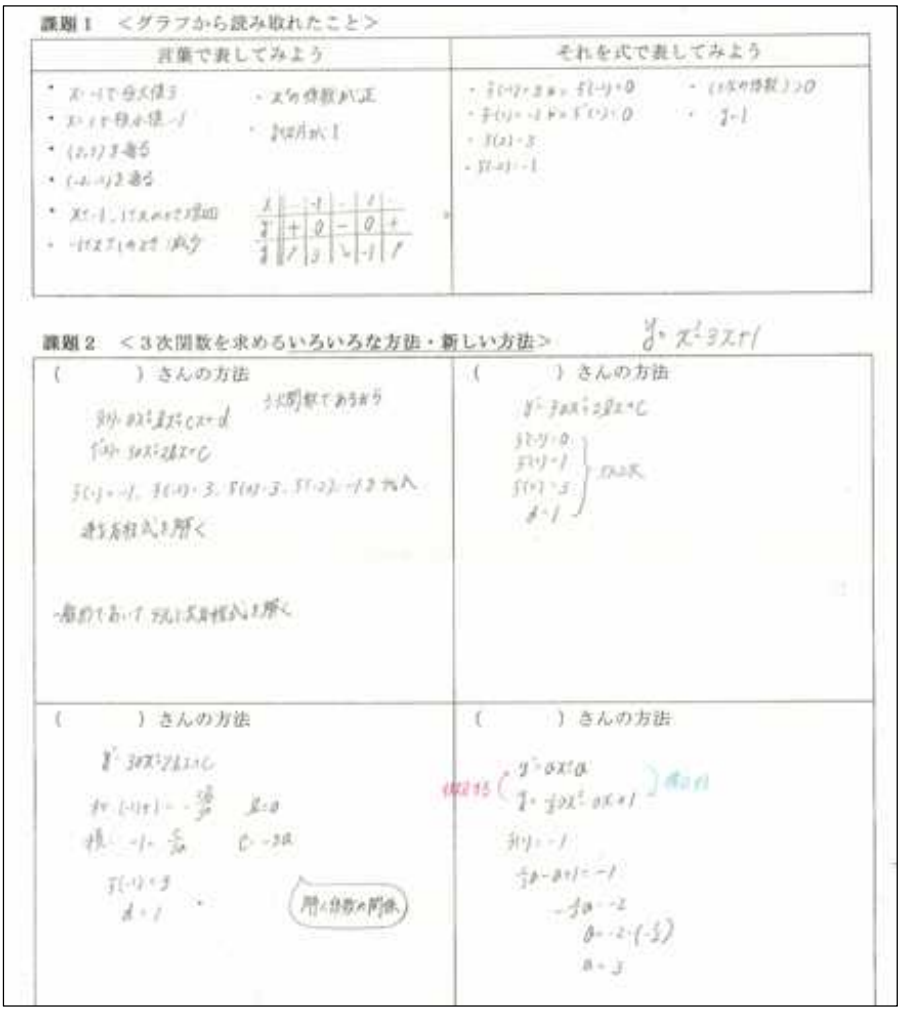
答え合わせの際、y 切片の確認をして、他の解法との比較を行った。少ない文字定数で関数をおけることや計算の簡潔さなどから解法３が最もよい解法として選ばれた。

(2) ワークシート、自己評価表

ア　ワークシート

生徒全員のワークシートに複数の解答がかかれていた。

主な記入例



イ　自己評価表

数学的な見方や考え方に関する自己評価の結果は次のようになった。

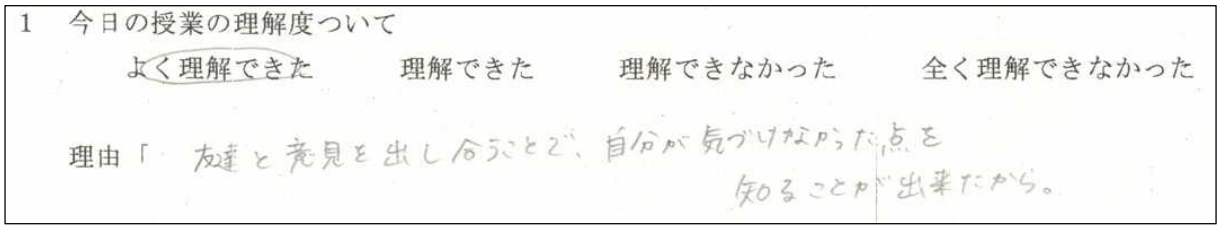
学習課題	自己評価
課題 （２）もとの３次関数をいくつかの解法で求める。特に、新しい解法を見つける。	□複数の解法で考えた。→36 名（92.3%） □平行移動を考えようとした。→２名（5.1%） □導関数からもとの関数を求める逆演算を考えられた。 →35 名（89.7%）

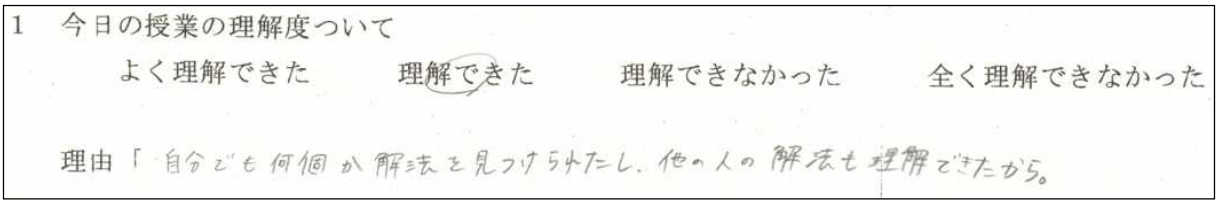
(3) アンケート結果

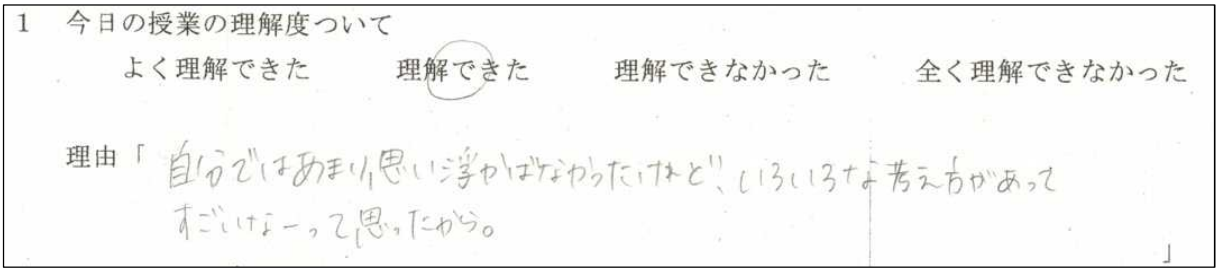
授業の理解度についての結果は次のようになった。

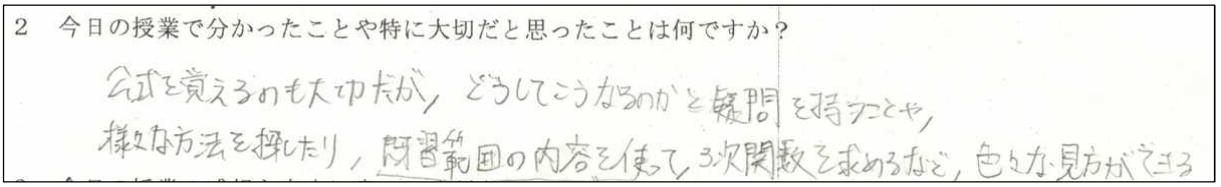
よく理解できた	理解できた	理解できなかった	全く理解できなかった
13 人(33.3%)	26 人(66.7%)	0 名(0.0%)	0 名(0.0%)

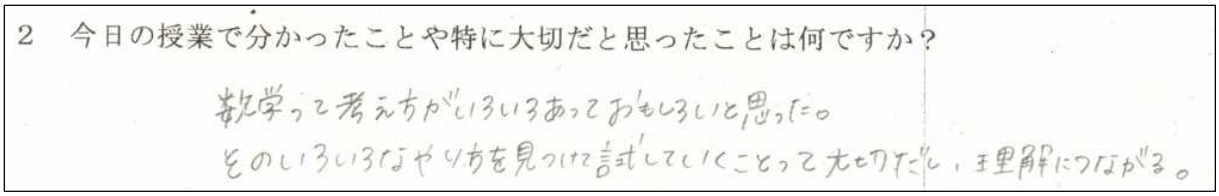
主な「理由」、「授業でわかったことや特に大切だと思ったこと」、「感想」は以下のとおりである。

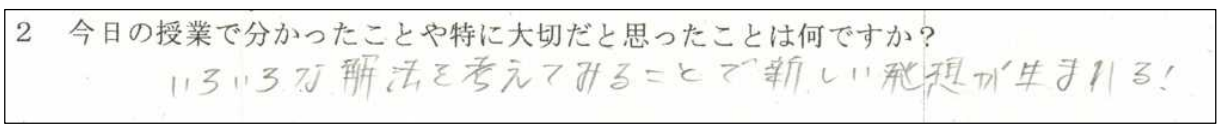

1　今日の授業の理解度ついて
よく理解できた　理解できた　理解できなかった　全く理解できなかった
理由「友達と意見を出し合うとで、自分が気づけなかった点を知ることが出来たから。

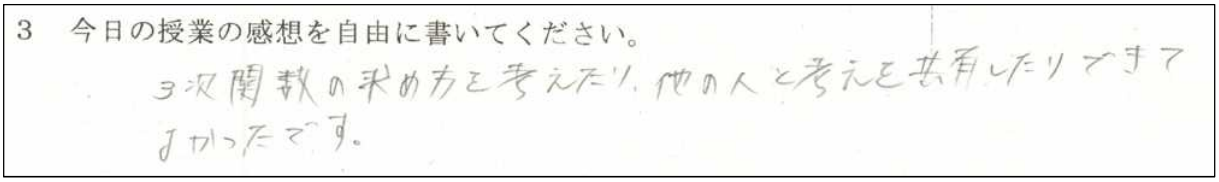

1　今日の授業の理解度ついて
よく理解できた　理解できた　理解できなかった　全く理解できなかった
理由「自分でも何個か解法を見つけられたし、他の人の解法も理解できたから。

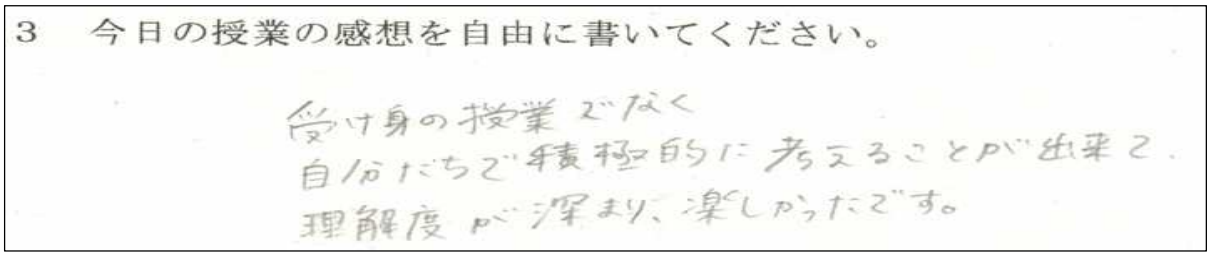

1　今日の授業の理解度ついて
よく理解できた　理解できた　理解できなかった　全く理解できなかった
理由「自分ではあまり思い浮かばなかったけど、いろいろな考え方があってすごいなーって思ったから。」


2　今日の授業で分かったことや特に大切だと思ったことは何ですか？
公式を覚えるのも大切だが、どうしてこうなるのかと疑問を持つことや、様々な方法を探したり、既習範囲の内容を使って3次関数を求めるなど、色々な見方ができる


2　今日の授業で分かったことや特に大切だと思ったことは何ですか？
数学って考え方がいろいろあっておもしろいと思った。
そのいろいろなやり方を見つけて試していくことって大切だし、理解につながる。


2　今日の授業で分かったことや特に大切だと思ったことは何ですか？
いろいろな解法を考えてみることで新しい発想が生まれる！





(4) 指導と評価（数学的な見方や考え方）の一体化

ア　授業中の評価

問題を解く時間が生徒によって差があったものの、その後は全ての生徒が別解を一人で考えたり、周囲の生徒と相談して考えたりできていたので、「おおむね満足できる」状況（B）と評価した。

イ　ワークシートと自己評価表からの評価

ワークシートの記述の中に、自分一人でグラフから $y'=a(x-1)(x+1)$ を求めている生徒が４名いた。そのうち１名は、積分することで３次関数を決定していた。残りの３名は、３次関数の一般形の導関数と恒等式となることから３次関数を決定していた。この生徒３名は、「十分満足できる」状況（A）と評価できる。

自己評価で平行移動を考えた２名の生徒のうち１名はワークシートに記述はなかった。もう一人の生徒はワークシートに記述があるが３次関数の決定まではいかなかった。記述のあった生徒は「十分満足できる」状況（A）と評価できる。

ウ　授業の改善の工夫

授業中の生徒観察と、自己評価表の「導関数からもとの関数を求める逆演算を考えられた」生徒が 35 名（89.7%）いたので、次時は生徒に不定積分の積分定数の意味や積分の公式・性質を導かせる授業計画を考えた。また、グラフから導関数 y' を求めることに時間がかかるので、数学が得意でない他のクラスにおいて積分の導入の授業を行う場合は、はじめの課題は導関数 y' の提示から行い、積分操作の考察に時間をかけようと考えた。

本時のグラフの読み取りにおいて、増加・減少に着目できていないことが分かった。数学Ⅱにおいて導関数を使って関数の増減を調べる目標はあるが、数学Ⅱの範囲では導関数の符号と関数の増減との関係を証明することはできない。数学Ⅲの指導のときには平均値の定理を用いて、そのことを直感的に確認するとともに、グラフの凹凸、変曲点も含めて導関数の符号との関係をつかめるような指導の工夫を考えたい。

(5) 「努力を要する」状況と評価した生徒

授業中に「努力を要する」状況と評価した生徒はいなかったが、問題解決に役に立った重要な考え方をノートに記録するよう全体に指示をした。自己評価で複数の解法を考えられなかったと回答していた生徒３名に対して、放課後、ノートの記録確認やそれぞれの解法のよさなどを質問するなど５分程度の指導を行った。ノートに記録があり、解法のよさにも納得していた。

４　授業を振り返って

これまで、講義形式の授業ばかりで、自ら解法を見つけ出すような授業ができていなかった。生徒が解法を他者に説明したり、他者から聞いたりする様子は、真剣かつ楽しそうであった。そのことはアンケートにも記入されていたことから分かるし、数学的な見方や考え方をより一層実感できたようである。

昔から丁寧に教えることはよいと思われているが、どの部分について丁寧なのか問われなければならないのだろう。丁寧な指導とは、生徒が考えなければならないところまで立ち入って教えることではなく、一人一人の数学的な見方や考え方に目を向け、問題解決の過程をじっくり見守り、必要なときに適切な助言をものことであることを痛感させられた。

日頃から基本的な知識・技能は身についていると思うのだが、それが活用できないと感じていた。その原因は、生徒が自分でその知識や技能を学び取っていない授業を教師が行っていたことだと考えられる。数学科の目標の文頭に「数学的活動」を出して強調されたのはそのような理由からであり、そのために指導の工夫をしていきたい。