高等学校における教科指導の充実

数　学　科

数学の理解と定着を図るための
教材開発と授業実践

栃木県総合教育センター
平成18年３月

ま　え　が　き

栃木県では、平成13年度に「とちぎ教育振興ビジョン」を策定し、新しい時代への展望に立った教育計画に基づいて、様々な教育施策を推進してきました。その基本理念は「とちぎ教育振興ビジョン（二期計画）」においても引き継がれ、事業を展開するにあたっての視点の一つとして「学ぶ力をはぐくむ教育の充実」が盛り込まれています。

また、学力に関する国際的な調査や教育課程実施状況調査によって、生徒の学力の状況や学習に対する意識などが明らかにされてきました。これらの調査の報告書においても、学力向上のための提言がなされています。

これらのことから、総合教育センターでは、「高等学校における教科指導の充実に関する調査研究」事業を新たに起こしました。この調査研究の目的は、基礎・基本の確実な定着を図るための授業改善を目指して、教科指導の在り方について研究し、その成果を普及することにより、学力の向上に資することにあります。今年度は、国語科、地理歴史科、数学科、外国語科（英語）の４教科において、教育課程実施状況調査等の調査結果から指摘されている課題を踏まえ、その解決を図るための授業改善の方策等について研究に取り組みました。研究の成果をまとめた本冊子を、各学校の実情に応じて有効にご活用いただければ幸いです。

最後に、今年度の調査研究を進めるにあたり、ご協力いただきました研究協力委員の方々に深く感謝申し上げます。

平成18年３月

栃木県総合教育センター所長

佐　藤　信　勝

目　　　　　　次

数学の理解と定着を図るための教材開発と授業実践

はじめに

数学科では、学習指導要領の趣旨に則るとともに、平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査（以下、教育課程実施状況調査とする）や IEA（国際教育到達度評価学会）が行った TIMSS2003 等で指摘されている課題を踏まえ、テーマを「数学の理解と定着を図るための教材開発と授業実践」と設定した。

教育課程実施状況調査では、ペーパーテストと質問紙調査が行われた。ペーパーテストの結果を見ると、設定通過率を下回った問題が多く、無答率の高さが目立つ問題もあった。また、質問紙調査では、数学に対する好感度が低く、授業で学んだ内容が普段の生活や社会生活の中で役立つと思わない生徒が多いとの結果も報告された。このことは、TIMSS2003 等においても、ほぼ同じ傾向の課題が報告されている。各調査の報告では、こうした課題を解決するために、授業をより一層改善するよう求めている。特に、教育課程実施状況調査では、授業改善の視点を次のように示している。

1　基本的な概念や用語・記号の意味の理解など、基礎・基本の確実な定着を図る。
2　授業の中で、生徒一人一人の考えを生かす指導を工夫する。
(1) 多様な考えによってアプローチできる教材を開発する。
(2) 生徒の誤答や誤った考えを授業において積極的に活用する。
(3) 問題解決の過程を振り返る機会を授業に積極的に取り入れる。
(4) コンピュータや電卓などを積極的に活用する。
3　生徒が自分の考えを表現し合い、お互いの考えを比較したり検討したりする授業を工夫する。
(1) 数学的な表現力や思考力を育成する。
(2) 生徒同士がお互いの考え方を交流し合い、比較したり検討したりする場面を大切にする。
4　数学学習の意義や必要性を実感する授業となるよう工夫する。

本研究では、上記の視点を踏まえた教材を開発し、授業実践を通して、３つの事例の作成に取り組んだ。

各事例の内容は、次のとおりである。

事例１　場合分けの考え方を定着させるためのコンピュータの活用

場合分けが必要な、定義域に文字を含む二次関数の最大値、最小値の問題を通して、コンピュータを積極的に活用し、数学的な表現力や思考力を育成することをねらいとした。今回の取組では、場合分けの必要性を認識させるためには、コンピュータを用いてグラフを動的に考察していくことが有効であることを再確認するとともに、実践を通して明らかになった、条件の範囲を不等号を用いて表現することができないという課題についても考察し、追指導を行った。

事例２　**数学観の変容を促し、興味・関心・意欲を高めるための教材の開発**

教育課程実施状況調査では、「三角比が普段の生活や社会に出て役立つとは思わない。」と回答した生徒が多かった。そこで、実際の測量に使われていた道具を教材化し、数学史の話題に触れながら、生徒が三角比を学ぶ意義や必要性を実感できるようにすることをねらいとした。生徒が、意義や必要性を実感することによって、その後の三角比の授業により積極的に取り組むとともに、数学に対する好感度の向上を図ろうと考えた。

事例３　**問題解決しようとする態度を育成するための授業展開の工夫**

場合の数を求める際に、生徒は、順列か、組合せかといった短絡的な思考をすることが多い。そこで、数えたり、書き出したり、樹形図を描いたりする活動を苦にしない態度を身に付けさせ、問題の構造を把握することの大切さを実感させることを指導のねらいとした。そのための問題を設定するとともに、その問題に対する生徒の解法を分析し、生徒のユニークな発想、途中までの解答、誤った解答を生かしながら授業を行った。

事例を作成する際には、授業後に生徒自身に自己評価をさせたり、解答の分析を行ったりするなど、生徒の状況を詳細に把握することにも努めた。また、事例１、事例３では、実際の生徒と教師の授業でのやりとりを示すことによって、学習指導案からだけではわからない生徒との関わり方を示した。生徒一人一人の考え方を生かす授業、生徒が自分の考えを表現し合う授業の中で、教師がどのように関わればよいのか。具体的なやりとりの中から読み取っていただきたい。なお、各事例における授業のねらい、教材、授業展開等は、実践していただいた研究協力委員の先生方の学校の実態に合わせて設定した。評価結果も同様である。

<研究協力委員>

栃木県立小山高等学校	教　諭	加藤達也
栃木県立佐野高等学校	教　諭	会田英一
栃木県立氏家高等学校	教　諭	森戸浩美

<研究委員>

栃木県総合教育センター	研究調査部	指導主事	吉川孝昭
栃木県総合教育センター	研修部	指導主事	植木　淳

事例１　場合分けの考え方を定着させるためのコンピュータの活用
〜 定義域に文字を含む二次関数の最大・最小の指導 〜

１．事例の概要

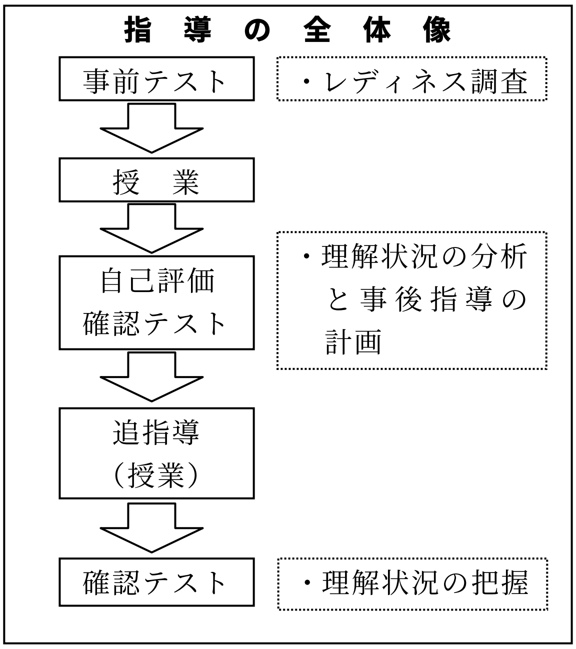
(1) 指導の改善

数学的な考え方の代表的なものの１つとして、場合分けの考え方がある。しかし、この考え方を理解することは､生徒にとってなかなか困難なことである｡生徒にとっては､｢面倒なもの｣、「難しいもの」と感じ、未消化なまま授業が進んでしまうことが多い。また、教科書での扱いも、場合分けをすることが前提となっており、生徒が場合分けの必要性を実感できるまでには至っていないのが現状である。

本事例では、定義域に文字を含む二次関数の問題を題材として、場合分けの必要性を実感させるために、コンピュータでグラフを表示してグラフを動的にとらえさせ、その中で、二次関数の値の変化として最大値、最小値を捉え、それを表現させることにした。また、授業を進める際には、生徒一人一人の考え方を生かすために、教材の提示方法、発問等を工夫するとともに、それぞれの考え方を比較、検討する場面を設けた。それによって、場合分けについての理解を深め、定着を図りたいと考えた。授業を進めていく上では、生徒の実態把握は欠かせないものである。事前テスト、自己評価、確認テストを実施することによって、生徒の理解状況の把握に努めた。

(2) 指導の全体像

生徒の既習事項の定着状況を把握するために、事前テストを実施した。その結果を考慮して、授業の進め方、授業の中での発問を工夫した。また、授業後には､生徒自身の自己評価、確認テストを実施し、理解状況の把握に努めた。事前の準備では、ここまでの指導を考えていたが、生徒の自己評価、確認テストの結果を分析したところ、条件の範囲を不等号を用いて表現することができないという課題が浮き彫りとなり、追指導が必要であると判断した。そこで、二次不等式の授業の際に、不等号を用いた範囲の表現方法について指導した。その後、再度、同じ授業を実施し、確認テストにより場合分けについての理解状況を分析した。



２．指導の展開

(1) 事前テストから

事前テストでは、一次関数、二次関数の変域、定義域に制限がある二次関数の最大値、最小値について確認した。その結果は、次のとおりであった。

事前テスト

１．一次関数 $y=2x-1$ について、x の変域が $3\leqq x\leqq 5$ のときの y の変域を求めよ。
　　正答率　84.6%

２．二次関数 $y=-x^2$ について、x の変域が $-1\leqq x\leqq 2$ のときの y の変域を求めよ。
　　正答率　20.5%

３．二次関数 $y=2x^2-1$（$-1\leqq x\leqq 2$）の最大値、最小値を求めよ。
正答率　最大値 60.6%　最小値 45.5%
４．二次関数 $y=x^2-2x+3$（$-1\leqq x\leqq 3$）の最大値、最小値を求めよ。
正答率　最大値 48.5%　最小値 78.8%
５．二次関数 $y=-3x^2-18x+5$（$-3\leqq x\leqq 2$）の最大値、最小値を求めよ。
正答率　最大値 78.8%　最小値 63.6%

一次関数の y の変域を求める問題１の正答率は 84.6%であったのに対して、二次関数の y の変域を求める問題２の正答率は 20.5%であった。「関数の値域」については、定義域の両端の値を代入して求める生徒が多く、二次関数のグラフを通して、関数の値の変化を考察していないことがうかがえる。その一方で、定義域に制限がある二次関数の最大値、最小値については、６割から７割程度の正答率となっている。二次関数の最大値、最小値を求めることはできるが、値域を求めることができない生徒、すなわち、最大値、最小値を二次関数の値の変化として捉えているのではなく、形式的に求めた生徒が多かったことになる。今回の「場合分けの考え方を定着させる」授業を通して、最大値、最小値を形式的に求めるのではなく、二次関数の値の変化として捉えることができるようにすることも大切であると実感した。このことを授業後の確認テストでも、再確認することとした。また、定義域の両端で最大値をもつ問題４の正答率が他と比較すると極端に低いことも、同様の原因が考えられるので、授業後の変化を分析することとした。

(2) 授業の準備

○授業のねらいの設定
①場合分けの必要性を実感できるようにさせる。
ねらい達成のための発問のポイント
「なぜ、従来と同じように考えることができないのか。」（どこに違いがあるのかを把握することができるか）
「どのような場合に分ける必要があるのか。また、それはなぜか。」（場合分けをする必要性を実感することができるか）
②問題解決場面で場合に分けて考えたことを表現できるようにさせる。
ねらい達成のための発問のポイント
「場合に分けて考えたものを数学的に表現することができるか。」（数学的に表現することができるか）

○展開における工夫
①課題の設定
生徒自身が容易にグラフを描けるように、二次関数の式に文字が含まれている課題ではなく、定義域に文字が含まれている課題とした。ただし、$a\leqq x\leqq a+1$ のような複雑な範囲ではなく、定義域の一方を固定した範囲とした。また、場合分けが煩雑にならないように、最大値、最小値を同時に扱うのではなく、それぞれを順に取り扱った。

課題１　$a>0$ のとき、次の関数の最大値を求めよ。
$y=x^2-4x+5$（$0\leqq x\leqq a$）

課題２　$a>0$ のとき、次の関数の最小値を求めよ。
$y=x^2-4x+5$（$0\leqq x\leqq a$）

②ワークシートの活用

生徒にとって定数 a が様々な値を取ることを把握することは難しい。そこで、導入では、具体的な a の値について最大値、最小値を考えさせることとした。その際、a の値による違いが明白となるよう、ワークシートにいくつかの場合を記入させた（全部で６つ記入することが可能）。また、ここでは、グラフを描くことが主ではないので、グラフ用紙に、点線でグラフを表示しておき、定めた定義域の範囲だけを描かせた。

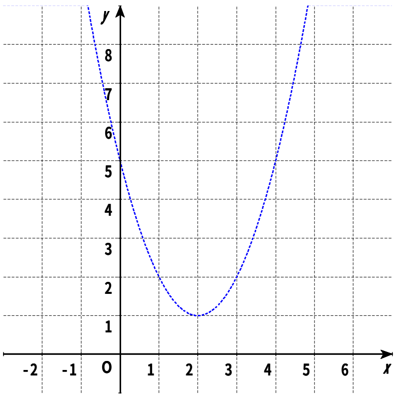
二次関数の最大・最小ワークシート

１年　組　番氏名

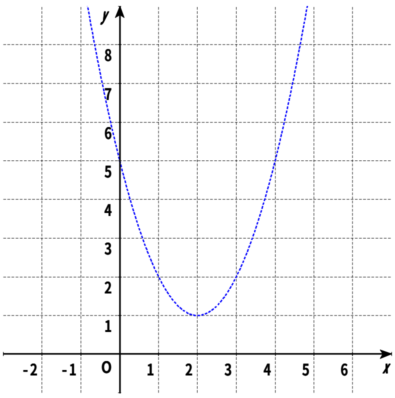
$a>0$ のとき、次の関数の最大値、最小値を考えよう。
$y=x^2-4x+5$（$0\leqq x\leqq a$）

＊具体的な a について考えてみよう。

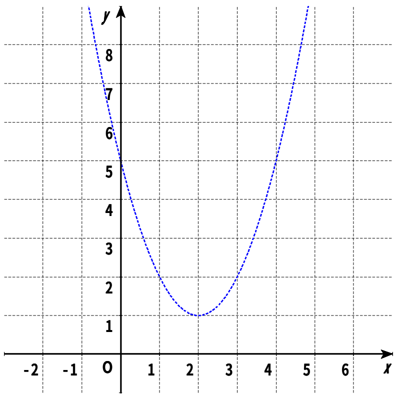
① $a=$ 　　のとき
$y=x^2-4x+5$（$0\leqq x\leqq$ 　）



② $a=$ 　　のとき
$y=x^2-4x+5$（$0\leqq x\leqq$ 　）

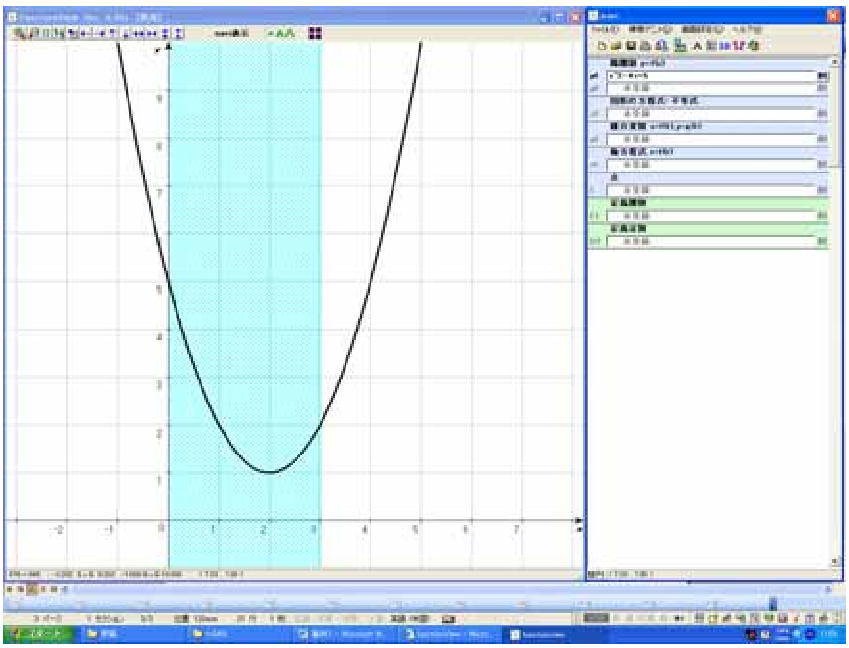


③ $a=$ 　　のとき
$y=x^2-4x+5$（$0\leqq x\leqq$ 　）



③コンピュータの活用

上記のようなワークシートを用いた活動では、連続的にグラフの変化を捉えることが困難である。連続的にグラフを捉えさせるためには、コンピュータを利用することが有効であると考え、フリーソフトウェアの Function View（群馬県立桐生工業高等学校　和田啓助　教諭作成）を用いて、グラフが変化する様子をプロジェクタで提示して、観察させた。



今回利用した「Function View」は、パラメータによる区間の設定が容易であり、そのパラメータを変更することによって、グラフを動的にとらえることが可能である。

○自己評価シート、確認テストの準備

①自己評価シートの作成

授業のねらい、授業展開に合わせて、自己評価シートの質問項目を検討した。ここでは、関心・意欲・態度は除き、数学的な見方や考え方、表現・処理の観点に絞った評価項目とした。特に、どこでつまずいているのかが明らかとなるようにした。

二次次関数の最大・最小　自己評価シート

1年　組　番　氏名

この時間に学習した内容について、以下の記号で答えてください。

○：あてはまる，△：少しあてはまる，×：あてはまらない

課題1．$a>0$ のとき、次の関数の最大値を求めよ。
$y=x^2-4x+5$（$0\leqq x\leqq a$）

（　）①aの値が与えられたとき、二次関数の最大値・最小値を求めることができた。

（　）②最大値は定義域の左端か右端でとることがわかった。

（　）③最大値を求めるとき、aの値による場合分けが必要であることがわかった。

（　）④場合分けをして最大値を求めることができた。

課題2．$a>0$ のとき、次の関数の最小値を求めよ。
$y=x^2-4x+5$（$0\leqq x\leqq a$）

（　）⑤最小値は定義域の右端か頂点でとることがわかった。

（　）⑥最小値を求めるとき、aの値による場合分けが必要であることがわかった。

（　）⑦場合分けをして最小値を求めることができた。

※④と⑦で×の人に質問します。

（　）⑧スクリーンに映し出されたグラフでaの値が変化しているときは、どこで最大値や最小値をとっているかはわかったが、答えを書くことができなかった。

⑨今日の授業で印象に残っていることを書いてください。

②確認テストの作成

確認テストでは、事前テストの結果を踏まえて、事前テストと同じ問題を数題出題した。場合分けが必要な問題については、授業の中で下に凸の関数を扱ったので、確認テストでは、上に凸の関数とした。

数学　確認テスト　No.

1年　組　番　氏名

1．二次関数 $y=2x^2-1$（$-1\leqq x\leqq 2$）の最大値、最小値を求めよ。

2．二次関数 $y=x^2-2x+3$（$-1\leqq x\leqq 3$）の最大値、最小値を求めよ。

3．二次関数 $y=-3x^2-18x+5$（$-3\leqq x\leqq 2$）の最大値、最小値を求めよ。

4．$a>0$ とする。関数 $y=-x^2+6x+1$（$0\leqq x\leqq a$）について、次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

(2) 最大値を求めよ。

(3) 授業展開

指導内容	学習活動（課題・発問・活動等）	指導上の留意点
・定義域が変化する関数の最大値の考察 (4)授業展開記録 ①導入　参照	課題１． $a>0$ のとき、次の関数の最大値を求めよ。 $y=x^2-4x+5$（$0\leqq x\leqq a$） 自分で a の値をいくつか具体的に決めて、最大値を求めてみよう。 ○ a に自分で決めた値を代入して最大値を求める。 $0<a<4$、$a=4$、$a>4$ のそれぞれの場合について、指名された生徒が板書する。	・ワークシートを配付。a に適当な値を代入し、最大値を求めさせる。 (ワークシートの利用) ・３タイプの解答において、定義域のどこで最大値になるかを発見させる。
(4)授業展開記録 ②展開１　参照	最大値になるところはどんなところだろう。 ○ a の値によって、最大値は定義域の左端・右端のいずれでとるか見分ける。	・生徒の発言を促し、生徒自身の表現で答えさせる。
	課題１の解答は、どのように表現すればよいだろう。 ＜予想される生徒の反応＞ ・今までと違う。 ・いくつかの解答がある。	・課題１では、最大値が１通りでは表現できないことに気付かせ、場合分けの必要性を実感させる。
・Function View による最大値の確認 (4)授業展開記録 ③展開２　参照	a の値で場合に分けて考えたものをどのように表現すればよいだろう。 ○映し出されたグラフを見て、どのような場合分けになるかを考える。	・a の値を連続的に変化させ、どこで状況が変わるのかを気付かせる。
・定義域が変化する関数の最小値の考察	課題２． $a>0$ のとき、次の関数の最小値を求めよ。 $y=x^2-4x+5$（$0\leqq x\leqq a$）	・課題１で板書したグラフから考えさせる。
・Function View による最小値の確認	○映し出されたグラフを見て、どのような場合分けになるかを考える。	・a の値を連続的に変化させ、場合分けの方法を考えさせる。
・本時のまとめ	○映し出されたグラフによる確認 ○自己評価シートの記入 ○確認テストの実施	

(4) 授業展開記録

実際の授業展開の様子を先生（Ｔ）と生徒（Ｓ）の会話として以下に示す。

①導入

Ｔ：昨日まで、二次関数の最大値、最小値について考えてきました。
今日は、さらに一歩進んでみましょう。

課題１の提示（板書）

Ｔ：さて、同じように二次関数の最大値を考える問題です。
昨日までの問題との違いは何でしょうか？
Ｓ：定義域の中にaが入っている。
Ｔ：そうですね。aが入っていることだけが違いますね。しかし、これだけの違いで、ずいぶん違ってきますので、今日の授業はしっかり考えてくださいね。
では、問題に入りましょう。最大値を求めなさい、という問いですから、まずはどうすればよいですか？
Ｓ：最大値、最小値を求めるときは、標準形に直して、グラフを描いて考えます。
Ｔ：そうでしたね。では、標準形に変形してみましょう。

机間指導

Ｓ：標準形に変形して、グラフを描こうと思ったんだけど、定義域がよくわからないからグラフが描けないぞ。aが１とか２とかわかればできるのに。
Ｔ：今、Ｓ君が言ってくれたように、定義域が $0 \leqq x \leqq a$ と与えられているので、aがいくつかわからないので、グラフをどこまで描けばよいのかわかりませんね。しかし、グラフが描けないと最大値を求めることができません。実は、aの値は、いくつかわからないのではなく、いろいろな値を考えることができるのです。そこで、今からワークシートを使って、自分でaの値を具体的に決めて、最大値を求めてみましょう。
例えば、$a>0$ なので、$a=1$ であれば、定義域が $0 \leqq x \leqq 1$ になるので、そのときの最大値を求めればよいことになります。自分で、３つから４つのaの値を決めて、最大値を求めてみましょう。

導入では、前回までの学習の復習をするとともに、今までの問題との違いを認識させることに留意した。

また、ワークシートの取組を観察すると、aの値を自然数として考える生徒しかいなかった。具体的な例の提示を工夫する必要があった。

②展開１（具体的にaの値を定め最大値をそれぞれの場合に応じて考えることによって、場合分けの必要性を実感させる場面）

ワークシートの作業中に机間指導を行い、$a=$１、２、４、５の場合について解答した生徒をそれぞれ指名し、グラフと最大値を板書させた。

Ｔ：さて、今、$a=$１、２、４、５の場合について黒板に書いてもらいました。これを見て何か気が付くことはありませんか。
Ｓ：…（無言）。
Ｔ：では、もう少し考えるヒントを出しましょう。**最大値になるところはどんなところでしょうか。**
Ｓ：定義域の左側で最大になるときと、右側で最大になるときと、両側で最大になるときがある。

Ｔ：そうですね。１つの問題であるにも関わらず、最大値になるところが、定義域の右側であったり、左側であったり、両側であったりしていますね。
どういうときに右側、左側、両側になっていますか。
Ｓ：僕は、a＝３のときもやったんだけど、黒板と見比べると、a＝１、２、３のときに、左側になっているよ。
Ｔ：すばらしいね。３のときもやってあったんだね。他の人で、違うときに左側になっているという人いますか。
Ｓ：…（無言）。
Ｔ：では、a＝１、２、３のときに定義域の左側になっているということでいいですね。
では、右側になっているときはどうですか。
Ｓ：私は、a＝６と 10 のときをやりました。これと、黒板の結果を比べると、a＝５、６、10 のときだから、きっと、５以上のときは、右側になると思います。
Ｔ：そうかな。ここは後でもう少し検討してみよう。じゃ、最後に、両側で最大値になるのは、どういうときですか。
Ｓ：これは、黒板に書いてあるように、a＝４のときだと思います。
Ｔ：黒板を見れば、a＝４のときであるとわかりますが、本当にこのときだけでしょうか。誰か説明できる人いますか。
Ｓ：…（無言）。
Ｔ：二次関数のグラフである放物線は、軸について対称なグラフでしたね。ですから、x＝２という軸を考えれば、a＝４のときにしか、両側で最大値になることはないですね。
では、**課題１の解答は、どのように表現すればよいでしょうか。**
Ｓ：…（無言）。
Ｔ：何でもいいですから、気付いたこと、感じたことを発表してみてください。隣の人と少し話をしても結構ですから、みんなで少し考えてみましょう。

教室が少しざわつく。

Ｔ：さて、誰か発表してください。
Ｓ：今までの問題とは違って、答えが１つではなくて、３つの答えを書かないといけないと思います。
Ｓ：左側になるときと、右側になるときと、両側になるときの３つが答えとして書けないといけないと思います。

ここでは、キーとなる発問が２つあった（ゴシック体で表記）。この２つの発問によって、解答として書かれる最大値が複数あることに多くの生徒が気付いたようである。しかし、ワークシートの取組、この場面でのやりとりから、「aは自然数である」という誤解が生じ、場合分けの際に、「$0<a<4$」と表現すべきところを「a＝１、２、３」と表現した生徒が多かった。

③展開２（コンピュータを用いて、aの値を連続的に変化させた様子を見せ、場合分けの方法を考えさせる場面）

下のように、黒板に３通りの最大値を板書し、確認した。

＊最大値になるのは、３通り

＿＿＿＿＿＿　x＝＿＿＿のとき最大値＿＿＿＿＿（左側）
＿＿＿＿＿＿　x＝＿＿＿のとき最大値＿＿＿＿＿（両側）
＿＿＿＿＿＿　x＝＿＿＿のとき最大値＿＿＿＿＿（右側）

スクリーン上に $y=x^2-4x+5$（$0\leqq x\leqq a$）のグラフを映し出し、aを徐々に増加させて最大値として３つの答えを書かなければならないことを確認した。

T：ワークシートと、今、スクリーン上のグラフで確認してもらったように、最大値として３つの答えを書かなければならないことがわかりましたね。
　　では、この３つの答えは、何によって変わるのでしょうか。
S：今までの問題と違って、aがあるので３つの最大値が出てきてしまったし、今、先生は、画面上でaの値を動かしていたので、最大値がいろいろ変わるのは、aによって変わるんだと思います。
S：それと、さっきのワークシートの時も、$a=1$、２、３のときや、$a=4$のときと考えたので、３つの答えが出るのはaの値によって変わってくるんだと思います。
T：そうですね。aの値によって変わってくることがわかりますね。では、ここの黒板に書いてある（前ページ）ところにはどのように書けばよいでしょうか。
　　たとえば、両側で最大値になるときは、$a=4$のときだね。だから、ここは、「$a=4$のとき」、と表現すればいいね。では、残りの部分を、まずは自分で考えて書いてみましょう。

机間指導をすると、定義域の左側で最大値をとるとき、「$0<a<4$」あるいは「$a<4$」と表現すべきところを、「$a=1$、２、３」と表現している生徒や、「$a>4$」と表現すべきところを「$a=5$、６、７」と表現している生徒が半数近くいた。前述したとおり、ワークシートの印象が強いことによる影響であると判断し、机間指導後、再度、コンピュータを用いて、連続的な変化を観察させた。aの値が１、２、３だけではなく、1.1、1.2、…も考えられることや、また、それが連続的に変化している様子を確認させた。

T：今、見てもらったように、aの値は１、２、３のように整数とは限りません。では、この部分（$0<a<4$と書くべき場所を指して）はどのように表現したらよいでしょうか。
S：aが０より大きくて、４より小さければいいですよね…。言葉では表現できるけど式で表すのはどうしたらいいのか…。
S：「大きい」、「小さい」だから不等式で表せばいいのかな。でも、どう書けるんだ？
S：$a<4$（a小なり４）と表現すればいいのかな。
T：大分近づきましたね。問題に何か条件が付いていませんでしたか。
S：そうか、$0<a<4$（０小なりa小なり４）と書けばいいんだ。
T：そうですね。定義域の左側で最大値になるときは、「$0<a<4$」と表現すればよいですね。
　　では、定義域の右側で最大値になるときは、どうでしょうか。
S：同じように考えれば、$a>5$かな。
T：では、4.5などはどうなりますか。
S：そうか、aが４より大きくなればいいんだから、$a>4$となればいいんだ。

生徒は、一次不等式については、既に学習している。しかし、不等号を用いて示された範囲を図示することはできるが、与えられた範囲を不等号を用いて表現することは、定着していなかった。一次不等式の学習の際に、先を見通して指導する必要があった。

この後、最大値となるxの値と、最大値を確認した。さらに、最小値についての授業を進めたが、最大値を丁寧に求めたので、コンピュータの画面を見せただけで、最小値をとる場所が変化することや、場合分けの必要性を十分に感じることができたようである。また、aの値の範囲についても、スムーズに把握することができた。しかし、aの値の範囲を表現することができない生徒が多くいた。

(5) 自己評価と確認テストによる理解状況の分析

○自己評価結果（○：あてはまる　△：少しあてはまる　×：あてはまらない）

・選択肢による評価から

質問		○	△	×
最大値	①aの値が与えられたとき、二次関数の最大値・最小値を求めることができた。	82.1%	15.4%	2.5%
	②最大値は定義域の左端か右端でとることがわかった。	79.5%	12.8%	7.7%
	③最大値を求めるとき、aの値による場合分けが必要であることがわかった。	76.9%	15.4%	7.7%
	④場合分けをして最大値を求めることができた。	12.8%	59.0%	28.2%
最小値	⑤最小値は定義域の右端か頂点でとることがわかった。	74.4%	17.9%	7.7%
	⑥最小値を求めるとき、aの値による場合分けが必要であることがわかった。	74.4%	17.9%	7.7%
	⑦場合分けをして最小値を求めることができた。	15.4%	53.8%	30.8%
④と⑦で×の人	⑧スクリーンに映し出されたグラフでaの値が変化しているときは、どこで最大値や最小値をとっているかはわかったが、答えを書くことができなかった。	66.7%	25.0%	8.3%

・自由記述から（⑨今日の授業で印象に残っていることを書いてください。）

- ・コンピュータを使って説明があったので、わかりやすかった。イメージができた。
- ・場合分けをするのが難しい。（わかったつもりでも、実際にやろうとすると混乱した。）
- ・理解するのに苦労した。
- ・練習すればできる気がした。
- ・事前テストで最大値をとるのが２か所ある問題があったが、その意味がよく理解できた。

・考察

選択肢による評価からもわかるように、７割以上の生徒は、最大値、最小値をとる点が変化することは把握できた（②、⑤）。また、それが、aの値によって変わり、aの値による場合分けが必要であることも理解できていた（③、⑥、⑧）。しかし、「場合分けをして最大値、最小値を求めることができたか」の問いについては、最大値、最小値ともに求めることができたと答えた生徒が１割程度しかいないという結果であった。このことは、場合分けの必要性は把握できたが、aの値の範囲を適切に表現することができないために、最大値、最小値を求めることができない生徒が６割はいることを示している。特に、自由記述に書かれていた、「わかったつもりでも、実際にやろうとすると混乱した。」という言葉が象徴的であった。

また、コンピュータを使ったことに関しては、「きれいで見やすい」、「わかりやすい」、「最初は、aの値は具体的なものしか想像できなかったが、コンピュータの画面を見て、イメージができた」といった感想があった。コンピュータを使ったことが、グラフを動的にとらえさせることに有効であった。

○確認テスト結果

１．二次関数 $y=2x^2-1$（$-1\leqq x\leqq 2$）の最大値、最小値を求めよ。

最大値　60.6%（事前テスト）→87.5%（確認テスト）

最小値　45.5%（事前テスト）→78.1%（確認テスト）

２．二次関数 $y=x^2-2x+3$（$-1\leqq x\leqq 3$）の最大値、最小値を求めよ。

最大値　48.5%（事前テスト）→71.9%（確認テスト）

最小値　78.8%（事前テスト）→84.4%（確認テスト）

３．二次関数 $y=-3x^2-18x+5$（$-3\leqq x\leqq 2$）の最大値、最小値を求めよ。

最大値　78.8%（事前テスト）→84.4%（確認テスト）

最小値　63.6%（事前テスト）→65.6%（確認テスト）

４．$a>0$ とする。関数 $y=-x^2+6x+1$（$0\leqq x\leqq a$）について、次の問に答えよ。 (1) 最小値を求めよ。 (2) 最大値を求めよ。

(1) 最小値　正答 30.6%　誤答 58.3%　無答 11.1%

(2) 最大値　正答 33.3%　誤答 52.8%　無答 13.9%

・考察

確認テストの問題１、２、３の正答率の変化からわかるように、授業の中でコンピュータを使ってグラフを動的にとらえさせたことによって、最大値、最小値を二次関数の値の変化として考えることができるようになった生徒が明らかに増加した。特に、両端で最大値をもつ問題２の正答率が５割弱から７割以上に増えたことに、二次関数の最大値、最小値に対する認識の深まりが感じられる。また、自己評価の自由記述にみられるように、「事前テストの問題の意味がよく理解できた。」という生徒が多く、場合分けが必要な問題を通して、関数についての理解が深まった。

一方で、場合分けが必要な問題については、自己評価の結果同様に、正答に至るまでの生徒が３割と少なく、解答からも、悪戦苦闘している様子がうかがえた。特に、a の値の範囲を間違える生徒が多かった。最大値、最小値については、それぞれ２通り、３通り書けている生徒は全体の７割程度いるにも関わらず、半数近くの生徒は a の値の範囲が表現できずに誤答となった。

○自己評価と確認テストの結果から

授業のねらいの１つである「場合分けの必要性を実感できるようにさせる。」ことについては、概ね良好な結果であった。しかし、もう１つのねらいである「問題解決場面で場合に分けて考えたことを表現することができる。」ことについては、反省点が多かった。最大のポイントは、「a の値の範囲を表現することができない」ことにある。一次不等式が高等学校に移行したことによって、「範囲の概念をもてないまま高等学校に入学している生徒が多い」ということを、教師自身があまり認識していなかったことが大きな要因の１つである。従前の学習指導要領では、小学校で不等号を扱い、中学校で一次不等式を扱っていたが、現在は、中学校で初めて不等号を扱うことになっている。中学校の教科書では、関数の単元で、変域として「$x>3$」といった表現はあるが、それほど深い認識をしていなかったのではないかと想像できる。今後は、高等学校で学ぶ一次不等式の単元で、より一層の指導の充実を図ることが必要である。

今回の取組では、この後学習する二次不等式の際に、範囲を不等号を用いて表現させるなど、範囲、不等式の概念の育成をさらに図った後に、もう一度、本授業を実践することにした。

○追指導とその結果

二次不等式の学習の終了後に、再度コンピュータを用いて同様の授業を実践した。授業では、生徒の発言も多く、活発であった。特に、範囲を不等式で表現することについて学習した直後だったこともあり、aの値の範囲を適切に表現できた生徒が多かった。

また、確認テストの結果も以下のとおりであった。

問　$a>0$とする。関数$y=-x^2+6x+1$（$0\leqq x\leqq a$）について、次の問に答えよ。 (1) 最小値を求めよ。 (2) 最大値を求めよ。

(1) 最大値　前回　正答 30.6%　誤答 58.3%　無答 11.1%
今回　正答 83.3%　誤答 16.7%　無答 0%

(2) 最小値　前回　正答 33.3%　誤答 52.8%　無答 13.9%
今回　正答 80.6%　誤答 13.9%　無答 5.5%

数字からもわかるとおり、場合分けの必要性を認識し、それを表現することができるようになった。授業後の生徒の表情からも自信を読み取ることができた。もちろん、これで、場合分けが必要な問題をすべて解決できたわけではない。関数に文字が含まれた場合や、定義域の両端に文字が含まれた場合については、今後さらに演習していく必要がある。

３．今後の課題

数学の授業の在り方について

従来は、授業の進度の関係もあり、どうしても教師主導の授業が中心であった。問題の解き方を解説し、問、練習によってその内容の定着を図ることが多かった。今回の授業は、できるだけ生徒の発言を促すことに配慮し、そのための発問を準備した。生徒は、意外なほどに多くの考えを発言した。それらを通して、様々な見方や考え方、表現方法をもっていることがわかった。生徒の発言を授業に生かすことは、生徒を主体的に授業に取り組ませる方策の１つとして、とても大切なことである。また、生徒の考え方を生かす授業を進めていく上で重要なことは、教師の忍耐力であることもわかった。一言説明してしまえば、スムーズに流れていくとわかっていても、そこで耐え、あえて生徒の発言を引き出すことが大切である。生徒の「授業に参加したい」、「授業をわかりたい」という気持ちを、授業の中で上手に表現させることが教師には求められるのではないだろうか。

コンピュータの活用について

各教室にコンピュータとプロジェクタが整備されたが、それを活用するまでには至っていなかった。ハードの準備、ソフトの準備の時間を考えると、その一歩が踏み出せないのが現状であった。しかし、黒板とワークシートだけでは限界がある。ワークシートだけでは、「aが整数である」ことから抜け出すことができない生徒がかなりの数になったのではないだろうか。コンピュータは、連続的に変化する様子をイメージさせるためには、どうしても欠かせない教具の１つである。その後の定着にも、大きな影響があると感じた。また、今回の取組では、形式的に最大値、最小値を捉えていた生徒が、関数の値の変化としてとらえることができるようになったことも大きな収穫であった。コンピュータを活用できる場面を十分研究し、取り組んでいく必要がある。

指導に生かす評価の工夫について

授業を進める際に、教師は、「生徒のレディネスはおおよそこんなものだろう。」とか、

「中学校では、このあたりまで学習しているであろう。」といった、大まかな把握はしている。しかし、実際のところは、教師の思いこみの部分も多く、的確に把握しているとは言い難い。最大値、最小値の問題が解けるということは、関数の値の変化として値域を把握しているであろうと考えていた。しかし、事前テストを通して、最大値、最小値を求める際に、形式的に求めていることが多く、関数の値の変化として捉えていないことがわかった。また、自己評価と確認テストを実施したことによって、評価に基づき指導の方向性を見いだすことができた。従来、場合分けについては、「ここは難しいから」と教師があきらめていた部分が多く、なぜ定着されないのか、どこに原因があるのかを解明するまでには至っていなかった。自己評価と確認テストを実施することで、場合分けが必要なことは理解できたが、それを表現できるようになるまでには大きな壁があることがわかった。これは、場合分けに限ったことではない。生徒の状況を的確に把握し、それを基に、教材、授業展開を工夫していくことが重要である。

引用・参考文献

・http://hp.vector.co.jp/authors/VA017172/（高機能関数グラフ・図形表示ソフト Function View）

・国立教育政策研究所教育課程研究センター　平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査報告書

事例２　**数学観の変容を促し、興味・関心・意欲を高めるための教材の開発**
～ クロススタッフを用いた三角比の導入 ～

１．事例の概要

(1) 指導の改善

現在授業で扱っている「数学」は、いうまでもなく先人達の知恵を源流としている。特に、ここで取り上げる三角比の分野でそれを想像することは比較的たやすい。いいかえれば「数学」が数学と呼ばれるようになるずっと以前から、測量など日常的な生活の営みとして先人達は数学的活動を行い、それが発展して今日の「数学」があるともいえる。それにも関わらず、生徒のもつ三角比(さらには数学)のイメージはどうであろうか。教育課程実施状況調査によれば、74.6%もの生徒が、「三角比が普段の生活や社会に出て役立つとは思わない。」と回答している。教師が描いているイメージと生徒のもつイメージがあまりにも違っていることを認識し、これからの授業を考えていかなければならない。

三角比は、その起源が紀元前 3000 年にさかのぼるほど古く、測量などの人間生活に密着して発展してきただけでなく、数学の発展にも大きく寄与してきた。また、三角比の授業では、以前から、校舎内外で、直接測れないものを求めるなどの体験的な学習に取り組んでいる事例が数多く報告されている。そこで、本事例では、数学史的な要素を取り入れ、三角比の導入として、実際に測量で使われていた道具を教材化し、数学のおもしろさ、奥深さを体感しながら、三角比を学ぶ意義や必要性を実感し、より積極的にその後の授業に取り組めるようになることをねらいとした。

授業を構築していく際には、次の点を考慮した。

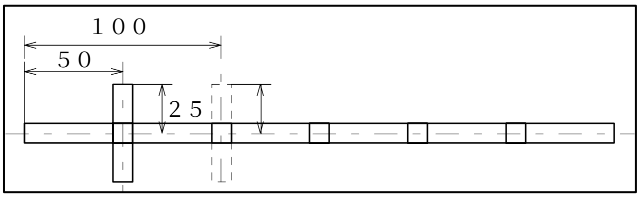
- 中学校で学習した、相似の内容を利用して簡単な測量を行い、三角比を学ぶ意義を実感させる。
- 道具の改良には数学的な考え方、数学の知識が必要であることを実感させる。
- 数学は決して机の上だけで発展したものではなく、生活に密着して発展してきたことを実感させる。
- 授業の進度を考慮して、授業は１時間で終了する。
- 授業を進めていく上では、生徒が自分の考えを表現し合い、お互いの考えを比較したり検討したりすることができるように配慮する。

(2) 教材の開発

本事例では、クロススタッフという実際に測量で使われていた道具を教材として取り上げることにした。クロススタッフとは、２点間の距離、物の大きさ（長さ）、太陽の高度などの角度を測るための道具である。もともと、紀元前 400 年頃にカルデアの天文学者が使用していたと言われている。その後、大航海時代（15 世紀～16 世紀頃）には海上で盛んに使用された。

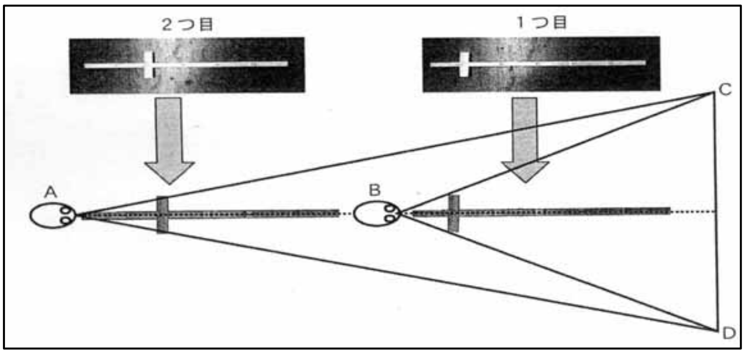
クロススタッフは、スタッフと呼ばれる長い棒を、プレートと呼ばれる板に通したものをいう。今回は、９㎜×９㎜×300㎜ の角材と９㎜×９㎜×50㎜ の角材で自作した。それぞれの角

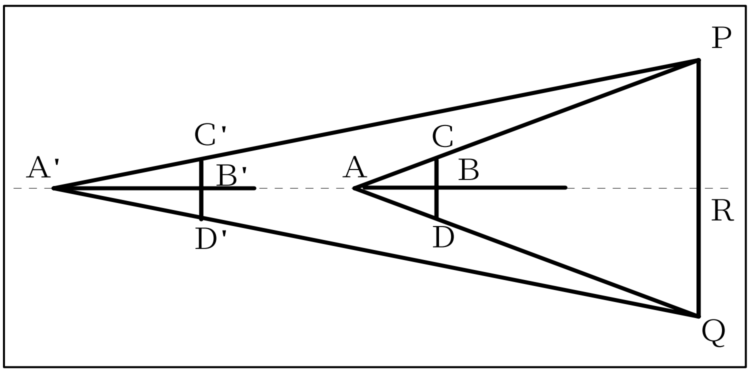
材が組み合うように、角材の幅の溝を掘った。特にスタッフと呼ばれる長い方の角材は、50㎜（プレートの長さ）間隔で溝を掘る。この２つを組み合わせて測量する。



①クロススタッフによる物の大きさ（長さ）の測定

　クロススタッフを使って物の大きさ（長さ）を測る場合は、スタッフの１つ目の溝にプレートを置き、スタッフを水平に持って測りたいものとプレートを同時に見ながら、測りたいものがちょうどプレートに隠れる位置まで移動する。その位置で、プレートを手前から２つ目の溝に置き、測りたいものとプレートを同時に見ながら、後ろに下がっていき、再び、測りたいものがプレートに隠れるところで止まる。このとき、後ろに下がった距離と測ったものの長さが等しくなっている。これは、測りたいものとの間に障害物等があり、直接測ることができないときにも有効である。





　証明は次のようになる。

　後ろに下がる前のクロススタッフを ABCD、後ろに下がった後のクロススタッフを A'B'C'D'とする。測る長さを PQ とし、PQ の中点を R とする。

　△ABC∽△ARP

　AB：BC＝50：25＝2：1 より

　　　AR：PR＝2：1 …①

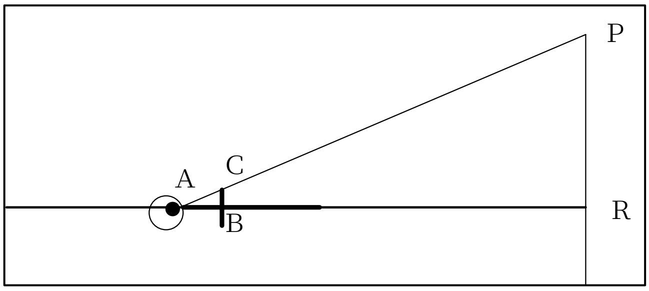
　よって　PQ＝AR…②

　また　△A'B'C'∽△A'RP　 A'B'：B'C'＝100：25＝4：1　より　A'R：PR＝4：1 …③

　①、③より、A は A'R の中点であり、このことと②から　PQ＝AA'

②クロススタッフによる高さの測定

　正接の導入とするために、本来クロススタッフでは使われていなかった使い方を、考えた。物の大きさ（長さ）を測定する場合は、プレートが水平になるように使ったが、高さを測定する場合は、垂直になるように使う。右の図からわかるように、△ABC と△ARP の相似を利用する。プレートを１つ目の溝に置くか、２つ目の溝に置くかによって、AR：PR の比が異なることに着目させる。１つ目の溝にプレートを置いた場合、上記証明からもわかるとおり、AB：BC＝2：1 より AR の$\frac{1}{2}$倍が PR となる。２つ目の溝にプレートを置いた場合、同様にして、AB：BC＝4：1 より AR の$\frac{1}{4}$倍が PR となる。この$\frac{1}{2}$と$\frac{1}{4}$が何によって決まるかを考えさせせることによって、正接の導入とする。



２．指導の展開

(1) 事前アンケート調査による生徒の数学に関する意識

教育課程実施状況調査を踏まえて、授業実施前に数学に関する意識調査を行った。特に注目すべき結果を、下表に示す。（表中の「肯定的な回答率」とは、「そう思う」と「どちらかといえばそう思う」と回答した者の合計の値。また、「全国」の値は教育課程実施状況調査から。）

質　問　事　項	肯定的な回答率
「数学の勉強は大切だ」	87.0%（全国　53.5%）
「数学を勉強すれば、私の普段の生活や社会生活の中で役立つ」	42.9%（全国　33.3%）
「普段の生活や社会生活の中で役立つよう数学を勉強したい」	57.2%（全国　31.0%）
「数学の授業がどの程度わかりますか」	33.8%（全国　35.3%）
「数学の時間にいろいろな考えを発表しあうのは楽しいと思う」	41.6%（全国　33.5%）
「数学で新しい内容や考えを勉強したら自分の身の周りの場面で使ってみますか」	13.0%（全国　9.7%）

全国と比較すると、数学の勉強の大切さや、有用性を認識している生徒が多い結果であったが、授業がわかると回答した生徒は、全国同様３割程度にとどまっている。また、数学の勉強が大切だと思っているにも関わらず、普段の生活や社会生活の中で役立つと思っている生徒はその半数であった。さらに、６割近くの生徒が、ただ単に受験としての数学ではなく、普段の生活や社会生活の中で役立つよう数学を勉強したいと思っている。これらが、現在の授業の大きな課題の１つである。多くの生徒が大学への進学を希望している現状を踏まえながらも、数学を学ぶことの意義を考えさせるような授業展開を心がける必要がある。

(2) 授業の準備

○授業のねらいの設定

①三角比を学ぶ意義や必要性を実感させる。

クロススタッフによる測量の原理を考えることによって、クロススタッフに数学が盛り込まれていることに気付かせる。また、クロススタッフで高さを測ることによって、正接の導入とする。

②数学は生活に密着して発展してきたことを実感させる。

クロススタッフを実際に使うことによって、道具のよさを実感させるとともに、道具の改良には数学的な考え方が必要であることを実感させる。

○展開における工夫

①授業の概要

導入では、図１の絵を提示しクロススタッフを紹介した。

展開１では、製作したクロススタッフをグループ毎に配付し（１グループ３名程度）、あえて原理を説明せず、使い方を説明し、実際に測量をさせた。測量後には、その道具の長所、短所を発表させることによって、道具のよさを実感させた。その後、クロススタッフの数学的な意味を確認した。

展開２では、塵劫記の絵（図２）を提示して、直角二等辺三角形の相似による測量について考えさせた。その後、クロススタッフによって

授業の概要

導　入・クロススタッフの紹介

⇩

展開１
・クロススタッフによる測量１（大きさの測定）
・クロススタッフの数学的意味の確認

⇩

展開２
・相似による測量（塵劫記）
・クロススタッフによる測量２（高さの測定）

⇩

まとめ・測量の結果の吟味

高さを測量させた。その際、プレートの位置をいろいろ変えて測量させた。

　まとめでは、高さの測量の結果とスタッフとプレートの長さの比を吟味することによって、正接の導入とした。

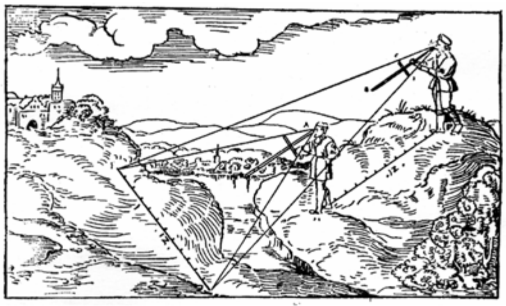


図１

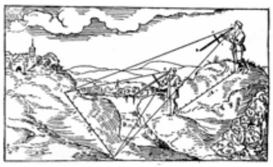
図２

②ワークシートの活用

　本時は、教科書の内容への導入としての位置付けになっているので、ワークシートを作成し、使用した。特に、作業の場面があるので、作業結果も随時記入できる形とした。また、考え方を誘導するような形式とはせずに、生徒自身が自由に感じたこと、考えたことが記入できるように配慮した。

数学ワークシート１（先人に学ぶ数学：三角形を利用した測量）

次の絵は何をしているところだろう？



＿＿＿＿＿＿＿＿

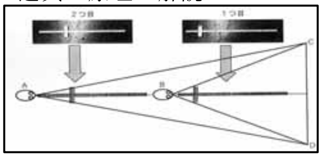
＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿

絵の中の人が使っている道具を＿＿＿＿＿＿という。

この道具の原理の解説



AB=CD になることの証明

実際にクロススタッフを使って測量してみよう。

測った物＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

測量による長さ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

実際の長さ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

この道具のよさ・おもしろさは？また、改善点は？

次に…

下の絵は何をしているところだろう？

上の絵は、江戸時代にもっとも売れた和算書（数学の本）「塵劫記」の中の「立ち木のながさをはながみにてつもる事」の章の絵です。左側にはこう書いてあります。

「はながみを四角に折りて、またすみとすみと折りて、下のすみに小石をかみよりにてつり下げて、かみのすみすみのかねの合う所にて見るべし。さて、居る所より木の根まで間竿にてうちてみる時に七間あり。これに居だけを三尺加える時に、木のながさ七間半というなり。」

どういう意味だろう？

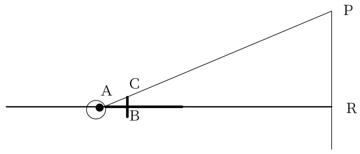
なぜ、木の高さが求まるのだろう？

クロススタッフを別の方法で使って、手の届かないところの高さを測量してみよう。

測量による高さ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

実際の高さ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

今回の測量の原理



(3) 授業展開

指導内容	学習活動（課題・発問・活動等）	指導上の留意点
導入 ・クロススタッフの提示・紹介・簡単な説明	○クロススタッフの提示 これは何をしているところだろう。 ・生徒の反応に随時対応する。 「何を測っているんだろう。」 「どうやって測っているんだろう。」 ○クロススタッフの紹介・簡単な説明 「図の中の道具は“クロススタッフ”と呼ばれ、16世紀頃､船乗りたちに盛んに利用された測量の道具です。」 ○クロススタッフの使い方の説明	・絵からクロススタッフが対象物の幅を測るための道具であることに気付かせる。 ・時間を与えて、周囲の者と話し合わせる。 ・**1 (2)**（P15）参照 ・使い方の説明（**1 (2)** ①参照(P16)）にとどめ、原理については測量後に簡単に触れる。
展開１ ・クロススタッフによる測量１	○クロススタッフのよる測量１ クロススタッフを使って自分たちで測りたい物を測ってみよう。 ・測量の結果を発表する。 ○クロススタッフの数学的な意味 ワークシートを用いて、生徒たちが発表しながら、簡単に証明する。 ○道具のよさの確認 この道具のよさ、すごさは何だろう。また、おもしろさはどんなところにあるだろう。逆に、難しいところや、改善した方がいいところはどこだろう。 クロススタッフのよさ ・簡単に作れる（誰でも作れる)。 ・離れたところから測れる。 ・原理を知らなくても使える（使い方が簡単)。 クロススタッフの改善点 ・誤差（製作時の誤差、測量時の誤差）がでる。	・黒板の長さ、窓の幅等を自由に測量させる。 ・三角形を利用して測量していることを実感させる。 ・時間を与えて、周囲の者と話し合わせる。 ・なぜ誤差がでるのかを考えさせ、発表させる。
展開２ ・クロススタッフによる測量２	○塵劫記の中にある木の高さの測量 ・絵を見て、文語体で書かれているところの意味を考え、発表する。 今、発表してくれたことは、本当ですか？なぜ、こんな事で、木の高さが測れるんでしょうか？周りの人と話し合ってみよう。 ・黒板に掲示された絵を用いて、木の高さが測定できる理由を説明する。 ・直角二等辺三角形の性質、相似な図形の性質等を確認する。	・黒板にも、ワークシートと同じ絵を掲示する。 ・手の届かない木の高さがなぜ測れるのか、小石にはどういう意味があるのかを確認する。

指導内容	学習活動（課題・発問・活動等）	指導上の留意点
まとめ	・塵劫記における測量方法のよさ 身近な物で、手の届かないところをどうやって測るかといった知恵が詰まっている。 〇クロススタッフによる測量２ クロススタッフを使って手の届かないところの高さを求めてみよう。 後ろの壁に、テープが貼ってあります。あのテープが貼ってある高さをクロススタッフを使って測ってみよう。 ・プレートを置く場所は、１つ目の溝、２つ目の溝、３つ目の溝など、自分たちで決めて測量する。 ・それぞれの溝で計測された結果を発表する。その際、どのように計算したかも発表する。 〇測量結果の考察 ・１つ目の溝の班…壁からの距離を$\frac{1}{2}$倍して、目の高さを加えた。 ・２つ目の溝の班…壁からの距離を$\frac{1}{4}$倍して、目の高さを加えた。 ・３つ目の溝の班…壁からの距離を$\frac{1}{6}$倍して、目の高さを加えた。 今、発表された、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$ は、何によって決まる数でしょうか。 ・考える三角形の形が変わる。 ・考える三角形の辺の比が変わる。 ・考える三角形の角度が変わる。 〇次時の予告 辺の比と角度がそれぞれ関係していることを、さらに追究していくことを伝える。	・今後、このようなことを学んでいくということを紹介する。 ・授業の前に、後ろの壁の手の届かない場所にテープを貼っておく。 ・クロススタッフの数学的な意味について、再度確認しておく。 ・「プレートの位置」という答えが予想されるが、そのときは、「プレートの位置が変わると何が変わるでしょう」と発問する。

(4) 事後アンケート調査による達成状況の分析

事前アンケート調査と同じ形式で授業後に調査をした。以下はその結果の抜粋である。

①選択肢調査の結果

質　問　事　項	肯定的な回答率
「数学の勉強は大切だ」	88.6%（事前　87.0%）
「数学を勉強すれば、私の普段の生活や社会生活の中で役立つ」	49.4%（事前　42.9%）
「普段の生活や社会生活の中で役立つよう数学を勉強したい」	60.8%（事前　57.2%）
「数学の授業がどの程度わかりますか」	34.2%（事前　33.8%）
「数学の時間にいろいろな考えを発表しあうのは楽しいと思う」	45.6%（事前　41.6%）
「数学で新しい内容や考えを勉強したら自分の身の周りの場面で使ってみますか」	19.0%（事前　13.0%）

②自由記述の結果（誤字と思われる場合もそのまま抜粋した。）

ア．久しぶりに楽しんで数学の授業ができた。

イ．いつもの授業と違って自分達でいろいろやりながら、どうしてそうなるのかを考えながらやったので、普通の授業を受けるよりもいいと思った。

ウ．数学を生かした道具を使えておもしろかった。

エ．教科書・ノートを使わない授業だったので楽しかった。

オ．何百年も前の人が数学の理にかなったことをしているのに驚いた。

カ．授業でやった数学と違って別の世界の数学をやったみたいでとても楽しかった。

キ．昔の人たちは本当に簡単な材料でいろいろなものの高さを測っていてすごいと思った。

ク．道具を使って勉強をすると教科書だけでやるよりも理解しやすい。

ケ．簡単で身近にあるものでも測れるのだからすごかった。

コ．知らないうちに周りに数学が使われていることがわかった。まだまだ身の周りにいろいろな数学が使われているのではないかと興味をもった。

サ．数学は身近なことにも役立つことが理解できた。また、道具を使ってわかりやすく理解することができた。

シ．ただの棒２本が数学に関係しているんだと言われてすごいと思った。

ス．日常の生活の中に数学の考え方が役に立っていることがわかった。

セ．昔のやり方での長さの測り方などのおもしろい授業だったので楽しかった。

ソ．昔の人がこんなこと発見できるなんてすごいと思った。数学の公式とかもだれかが考えたものであって人間の脳ミソは恐ろしい････。

タ．昔の人の知恵の奥深さに驚いた。

チ．今まで知らなかった方法で測ることができることを知り驚きました。授業の中で実際ためしてみたりして楽しかったです。原理は少し難しかったけどよくわかった。

選択肢による調査の結果を見ると、ほとんどの調査項目で数字がわずかではあるが、上昇した。特に、「数学を勉強すれば、私の普段の生活や社会生活の中で役立つ」についての肯定的な意見は、6.5%上昇した。また、「数学で新しい内容や考えを勉強したら自分の身の周りの場面で使ってみますか」については、まだまだ数字は低いものの、6.0%上昇した。もちろん、１時間の授業で、生徒の意識が画期的に変わることは考えられない。しかし、少しずつこのような時間を増やすことによって、卒業するまでには、大きな意識の変化が期待できる。今回は、数学史的な内容も含んでいたため、普段の生活で役立つと回答した生徒は、半数程度であるが、今後も折に触れて、生活に密着して発展してきたことを実感できるような授業に取り組む必要がある。

また、自由記述を見ると、ほとんどの生徒が肯定的な意見を述べていた。記述され

【黒板消しの幅を測る生徒】

【手の届かない地点の高さを測る生徒】

ているものは、「楽しかった。」、「すごいと思った、驚いた。」、「わかりやすかった。」といった回答に分類することができる。その要因としては、数学の身近さ、奥深さ、先人の知恵に対する尊敬の念が十分に感じられたことであると考えられる。数学は机上の世界だけでなく、自分たちが生きている現実の中でも役立っているということや、友達と話し合うことによって数学のもつ正確さや理論そのものを高めていくというおもしろさを生徒自身が実感できたのではないだろうか。以上のことから、今回の授業のねらいとしていた、「数学は生活に密着して発展してきたことを実感させる。」ことについては、十分達成されたと考えられる。また、授業を進める上で配慮した、「生徒が自分の考えを表現し合い、お互いの考えを比較したり検討したりすることができるようにする。」ことについても、期待以上の効果があった。生徒の記述の中に、「いつもの授業と違って、自分達でいろいろやりながら、どうしてそうなるのかを考えながらやったので、普通の授業を受けるよりもいいと思った。」とあった。普段の授業においても、知識の伝達が一方通行にならないように注意しなければならない。

３．今後の課題

数学の授業の在り方について

「先生の授業は、生徒にとって、数学を学ぶ意義が感じられるような授業ですか？」と問われると、返事に窮する。もちろん、高等学校で学ぶ数学が、全て、実生活における有用性を直接、実感できる内容ではないし、そのような教材も少ない。しかし、少ないからといって、素通りしてしまっては、生徒の意識はますます低下するばかりである。各学校の生徒の実態に応じて、数学を学ぶ意義を感じられるような授業を展開していく必要がある。ただし、高等学校における数学の学習は、実生活における有用性を感じることが目的の全てではない。数学を純粋に追求する楽しさ、おもしろさを体験させたり、多面的にものを見る力や論理的に考える力などを育成したりすることもとても大切なことである。これらのバランスを十分図りながら、これからの数学の授業を考えていかなければならない。また、授業の展開についても留意する必要がある。効率を優先するあまり、教師による一方的な授業が多くなってしまっていたが、今回の取組を通して、生徒が互いに自分の考えを表現し合い、議論し合うことによって、数学的な考え方が深まるとともに、生徒自身の中で「わかった」、「おもしろかった」との思いが深まることがわかった。もちろん、生徒同士が活発に議論するためには、生徒の思考力や表現力などの実情を考慮して、教師が適切な発問を投げかけることが重要なことである。

数学に関する生徒の意識について

数学の勉強が大切だと思う生徒は、全国の調査では、５割程度しかいない。本校では、９割近くの生徒が大切さを感じているものの、数学を勉強すれば普段の生活や社会生活の中で役立つと思う生徒は４割程度であった。また、本文では紹介しなかったが、論理的に考えることができるよう数学を勉強したいと思っている生徒はちょうど半数であった。さらに、数学を勉強すれば入学試験や就職試験に役立つと思っている生徒は９割以上いた。入学試験や就職試験に役立つと思うことは悪いことではない。しかし、それと同じように、普段の生活に役立ったり、論理的に考えることができるようになったりすると感じられなければならない。生徒の意識調査を改めて実施したことによって、生徒の数学に対する意識の改善を図る必要性を実感した。また、授業を実施して、予想以上に生徒は数学的活動を望んでいることがわかった。はじめは、いつもと違う授業形式にとまどっていた生徒たちも、特に２度目の測量作業の際には、生徒同士で積極的に意見交換し合いながら活動に取り組んでいた。

卒業した生徒から「何を習ったかは忘れてしまったけど、授業は楽しかった。」との声を聞くことがある。その楽しかった記憶は、やがて学習したことを再び学習し直すときや、さらに発展させるといったときに、大いに役立つ。苦しかった記憶では、学習の動機付けにはなかなかならない。これからの数学の授業は、少しでも「楽しかった」、「おもしろかった」と思ってもらえるような工夫が必要である。そのためには、数学を学ぶ意義が意識できるような内容を随所に盛り込み、生徒自身が「数学」に接することができるような展開を考えなければならない。

引用・参考文献

・国立教育政策研究所教育課程研究センター　　平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査報告書
・国立教育政策研究所 HP　http://www.nier.go.jp/kaihatu/katei_h14/index.htm
・下野新聞　2005 年 6 月 16 日
・数学教育　2004 年 4 月号　明治図書 P94～98
・数学教育　2004 年 8 月号　明治図書 P94～98
・http://www.macchinematematiche.unimo.it/Sito_Macchine/mostra4/sezioni/sezione1/221_ITA.htm（クロススタッフの紹介）
・http://130.158.186.230/museum/Mathematics_tools/index.htm（クロススタッフの作り方など）

事例３	問題解決しようとする態度を育成するための授業展開の工夫 〜 生徒の考え方を生かした場合の数の指導 〜

１．事例の概要

(1) 指導の改善

場合の数は、積の法則、和の法則、順列、組合せと学習をしていく。それぞれの導入では、数えたり、書き出したり、樹形図を描くなどの活動を通して、その構造を把握するために、しっかり思考する。しかし、その後の指導では、生徒は、順列か組合せのいずれかであるといった考えにとらわれ、数学的な思考の障害になっている様子が見られる。そのため、少し複雑な問題に出会うと、戸惑ってしまうことが多い。

また、教育課程実施状況調査の質問紙調査では､｢順列や組合せの考えを用いて、場合の数を能率的に数えあげること」については、表のように、生徒は、内容がわかりにくく、きらいであるという傾向が見られる。一方、教師は、生徒にとって比較的理解しやすく、興味を持ちやすいと考えている傾向が見られる。指導の際には、生徒と教師の間の大きなギャップを十分認識する必要がある。

「順列や組合せの考えを用いて、場合の数を能率的に数えあげること」				
生	よくわかった	33.7%	好きだった	29.6%
徒	よくわからなかった	47.6%	きらいだった	51.8%
教	生徒にとって理解しやすい	47.3%	生徒が興味を持ちやすい	65.9%
師	生徒にとって理解しにくい	30.0%	生徒が興味を持ちにくい	13.3%

教育課程実施状況調査から

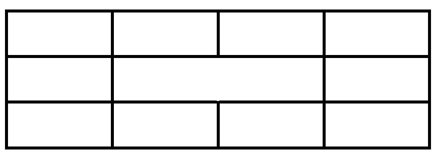
場合の数の指導では、計算の前提となる、数えたり、書き出したり、樹形図を描いたりする活動を苦にしない態度を身に付けさせ、問題の構造を把握することの大切さを実感させる必要がある。そのために、単純に順列、組合せだけで解決できる問題ではなく、多様な解法が考えられる問題を設定し、その問題に対する生徒のユニークな発想、途中までの解答、誤った解答を生かして授業を進めることにした。

(2) 多様な解法が考えられ、生徒の解答が授業の中で生かせる問題の設定

生徒が設定した問題に取り組む中で、数えたり、書き出したり、樹形図を描いたりする活動を試みることで、問題の構造がわかり､「おもしろい」と感じたり、正答にたどり着いたときに「わかった」と感じたりすることで、この活動が解答への大切なステップになっていることを実感させたい。また、正答にたどり着かなかった場合でも、他の生徒の解法を見て学んだり、自分の誤答が「惜しい」と認められたりすることで、生徒が解決への手応えを実感し、その結果、活動を苦にしない態度が身に付くことを意図した。

以上の考えにもとづく問題は、多少手応えはあるが、問題の意味がわからなくて手が出ないということがないように、設定はそれほど難解でないものが望ましい。今回は、次のような問題で試みた。

問題）右のような図形がある。この中に、長方形（正方形も含む）はいくつあるか。



予想される主な解答は、次のとおりである。

【解答例１】全て数える解法

全て数える方法では、数え間違う生徒が多い。重複なく、もれなく、要領よく数えるためには、次のような方法がある。

（その１）長方形の面積で分類し、もれのないように数える。（１マスを面積１とする）

面積１の長方形	… 10 個	面積２の長方形	… 11 個
面積３の長方形	… ８個	面積４の長方形	… ５個
面積６の長方形	… ５個	面積８の長方形	… ２個
面積９の長方形	… ２個	面積 12 の長方形	… １個

合計　44 個

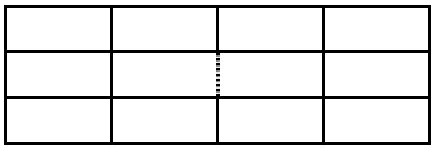
（その２）長方形の位置で分類し、もれのないように数える。

図の中の数字は、その位置を左上の頂点とする長方形の数である。

10	7	2	3
6	4	（0）	2
4	3	2	1

合計　44 個

【解答例２】補集合を除く解法



右図の点線を通るような長方形の数を全体（60 個）から引く。このような長方形を数える場合も、【解答例１】の２通りの方法がある。

（その１）長方形の面積で分類する場合（点線を含む長方形の数）

面積１の長方形	… ２個	面積２の長方形	… ６個
面積３の長方形	… ２個	面積４の長方形	… ４個
面積６の長方形	… ２個		

合計　16 個

したがって、求める長方形は　60－16＝44（個）

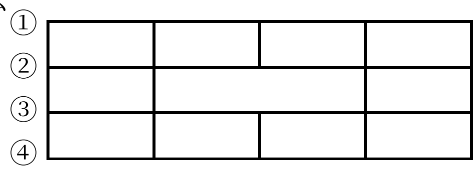
（その２）長方形の位置で分類する場合（点線を含む長方形の数）

2	2	4	0
2	2	4	0
0	0	0	0

合計　16 個

したがって、求める長方形は　60－16＝44（個）

【解答例３】場合分けをして組合せの計算を利用する解法



右図の横の平行線に、上から順に①～④の番号を付けると、次のように考えることができる。

（その１）場合に分けて考える。

ｉ）数える長方形の上の辺が①上にある場合

下の辺が②上にあるとき、縦の辺は５本から２本選べばよい　${}_5C_2=10$ 通り

下の辺が③上にあるとき、縦の辺は４本から２本選べばよい　${}_4C_2=6$ 通り

下の辺が④上にあるとき、縦の辺は４本から２本選べばよい　${}_4C_2=6$ 通り

ii）数える長方形の上の辺が②上にある場合

下の辺が③上にあるとき、縦の辺は４本から２本選べばよい　${}_4C_2=6$ 通り

下の辺が④上にあるとき、縦の辺は４本から２本選べばよい　${}_4C_2=6$ 通り

iii）数える長方形の上の辺が③上にある場合

下の辺が④上にあるとき、縦の辺は５本から２本選べばよい　${}_5C_2=10$ 通り

ｉ)、ii)、iii）より　長方形は 44 個

（その２）

縦の辺として５本使えるのは、①と②、③と④を選んだときの２通りで、縦の辺として４本使えるのは、①と③、①と④、②と③、②と④を選んだときの４通りである。

したがって、長方形は　$2\times{}_5C_2+4\times{}_4C_2=44$（個）

以上、全部で６通りの解法を準備し、授業に臨んだ。

２．指導の実践

(1) 授業のねらいと展開の工夫

○授業のねらいの設定

①数えたり、書き出したり、樹形図を描いたりする活動の重要性を認識させ、生徒に活動を苦にしない態度を身に付けさせる。

②生徒の考えた解法や途中までの解答､誤った解答を生かして授業を進めることによって、解決への手応えを実感させる。

○展開の工夫

実施する授業は２時間とした。

１時間目は、右のワークシート１、２を使用した。ワークシートには､｢下書きから答えまでの全てを用紙に記入すること｡｣との文言を付け加えた。ワークシート１の問題を導入の問題とし、その後、ワークシート２の問題に十分な時間(20 分間)を与え、取り組ませた。解けた生徒に対しては、他の解法で挑ませた。また、授業の中で「今回は答えの正誤よりも、考える過程をみんなで検討していきます｡｣と伝え､計算の過程やメモを消さないようにさせた。

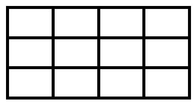
授業後にワークシートを回収し、全ての生徒の解答を分類し、それぞれの解法ごとに生徒の自筆の解答を載せたワークシートを作成した。

２時間目では、作成したワークシートをもとに、生徒とともに解法を分析し、数えたり、書き出したり、樹形図を描いたりする活動の重要性を認識させた。

数学ワークシート１

１年　組　氏名

問題１）５本の平行線と４本の平行線が直角に交わる右のような図がある。この中に、長方形（正方形を含む）は、いくつあるか。

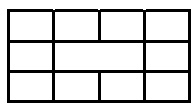


下書きから答えまでの全てを用紙に記入すること。

数学ワークシート２

１年　組　氏名

問題２）問題１の図形から、１か所線分を除いた右のような図がある。この中に､長方形(正方形を含む)は、いくつあるか。



下書きから答えまでの全てを用紙に記入すること。

(2) 問題１、問題２の解答の分析結果

①問題１について

以前の授業の中で取り扱った問題であったので、ほとんどの生徒が、スムーズに解答し、正答にたどり着けた。計算ミスをした者を含めて８割の生徒は、組合せを使って、${}_4C_2 \times {}_5C_2 = 60$と解答していた。残りの生徒は、面積で分類して数えていた。

正答	組合せの考え方を使った解答	30 名（75%）
	面積で分類し数えた解答	８名（20%）
誤答	組合せの考え方を使ったが、計算ミスをした解答	２名（５%）

（合計 40 名）

②問題２について

次の視点で解答を分析した。

・正答にたどり着いた生徒は、どのように考えたか。

・正答にたどり着いていないが、その考え方で正答にたどり着けるものについては、どこでつまずいてしまったか。

・誤答した生徒は、どこで間違ってしまったか。

問題２の解答は下の表のようであった。

解答パターン	解　答　方　法	正答数	誤答数	途中の解答数
1	数える（面積で分類） 【解答例１】（その１）	6	9	3
2	数える（その他の方法で分類）	2	1	0
3	補集合を除く （補集合の数は面積で分類し数える） 【解答例２】（その１）	8	4	2
4	補集合を除く （補集合の数は計算で求める）	2	12	1
5	１、３行目中央の縦の線分をないものとして数え、後からその線分を使うものを加える。	6	5	1
6	横の辺を２本指定して、縦の辺は組合せの計算で求める。 【解答例３】（その１）	0	5	1
7	縦の辺を２本指定して、横の辺は組合せの計算で求める。	1	1	0
8	図形を分割	0	6	0
9	図形を移動して変形	0	5	1
10	その他	0	5	0

（数字は延べ数）

個々の解答パターンについて

・解答パターン１、２

数えようとした生徒の中には、重複や数えもれがあり、誤答が多かった。

・解答パターン３

補集合を数えた生徒は、数える長方形の数が多くなかった（16 個）ので、数え間違いが少なく、正答率が高かった。

・解答パターン４

補集合を計算で求めようとした生徒は、計算方法を誤り、誤答が多かった。

・解法パターン５

補集合を除く解法ではなく、考えやすいように線分をないものとし、その線分を使う長方形の数を加えて求めた解法である。複数の解法を思い付いた生徒の中に

多かった。この解法は、事前に予想していなかった。

・解法パターン６

事前に予想していた解法の中で、生徒が正答にたどり着くのは難しいと思われるものであったが、成績上位者の中に数名、この解法を試みた生徒がいた。しかし、全て誤答であった。

・解法パターン７

それほどすっきりとした解答ではなかったが、正答者がいた。

・解法パターン８、９

図形の分割・移動・変形を用いて解決しようと試みた生徒がいた。しかし、このままでは、正答にはたどり着けない。

全体的な傾向について

生徒は、順列か組合せのいずれかで解けるのではないかと考えて取り組みはじめていた。単純に解決できないことに気付くと、まずは、工夫して順列、組合せの計算ができないかと考えていた。もちろん、悪いことではないが、順列、組合せの計算に頼っている傾向がある。数えようとした解答の延べ数が 21（24.1%）であったのに対して、何とか計算でと考えた解答の延べ数が 66（75.9%）であったことがそれを表している。

(3) ２時間目の授業の展開

２時間目の授業では、まず、問題１を取り上げ、２通りの解法をそれぞれ生徒に説明させ、基本的な事項の確認を行った。

問題２は、生徒の自筆の解答、作業スペースを確保したワークシートを作成し、それをもとに進めた。正答にたどり着ける解法（解法パターン１、２、３、４、５）を確認するとともに、正答にはたどり着けない図形の分割や変形による解法（解法パターン８、９）について取り上げ、その考え方が正しいかどうかを含めて、深く掘り下げることにした。また、この解法の考え方を使って、解法パターン６（事前に予想した【解答例３】）を導くことにした。

問題２の解答の取り扱い

①正答にたどり着ける解法（解法パターン１、２、３、４、５）

・全て数える解法（解法パターン１、２）

長方形の形で分類したものについて、生徒自筆の解答（図１）をワークシートにそのまま載せた。ここで、面積で分類することもできることを付け加えた。

また、長方形の位置で分類する方法で解答した生徒がいなかったので、下の図２を与えて、その数字の意味を考えさせた。特に、全て数える解法の場合には、ただ闇雲に数えるのではなくて、ある方針をもって数えることの大切さを実感させるように説明した。

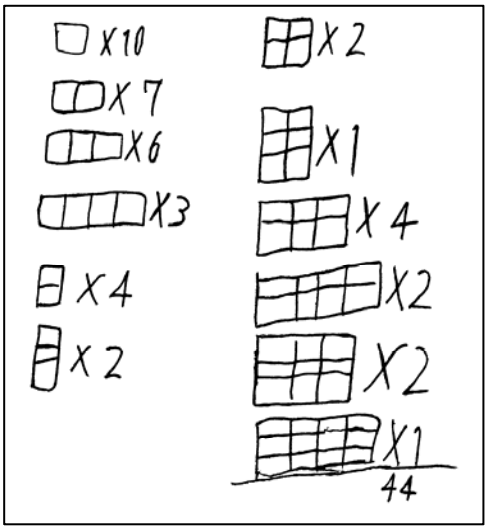


図１

10	7	2	3
6	4	（0）	2
4	3	2	1

図２

・補集合を除く解法１（解法パターン３）

全て数える解法と同様に、生徒自筆の解答（図３）をワークシートにそのまま載せた。生徒の解答のように、授業の中で、左右対称の性質を利用することができることを他の生徒にも気付かせたい。なお、生徒の解答では、太線の部分が赤線になっていたが、線を太くして載せた。

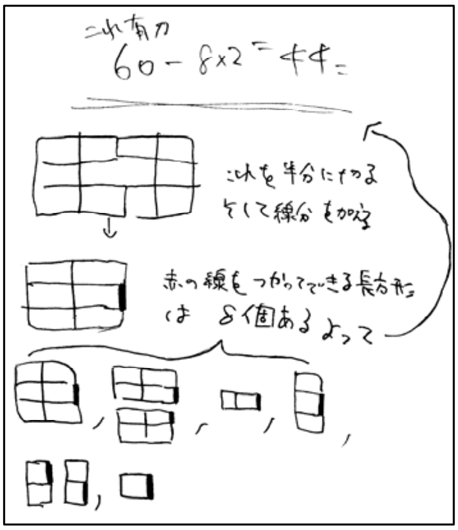
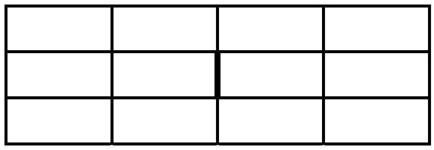


図３

・補集合を除く解法２（解法パターン４）

補集合を除く解法１（解法パターン３）に比べると、補集合を計算で求める解法（解法パターン４）は、誤答が多かった。解法の方針、計算方法について生徒とともに確認することによって、誤答の原因を解明していった。誤答は、長方形をつくる縦線の選び方、横線の選び方を求める際に、単純に組合せの考えを使って求めるものが多かった。ここでは、右の図を与えて、太線を含む長方形の数について考えていった。



・生徒独自の解法（解法パターン５）

事前に予想していなかった解法として、生徒自筆の解答（図４）をワークシートにそのまま載せ、取り上げた。ただし、生徒の解答では、説明が不十分なところもあるので、授業の中で生徒に確認しながら進めた。

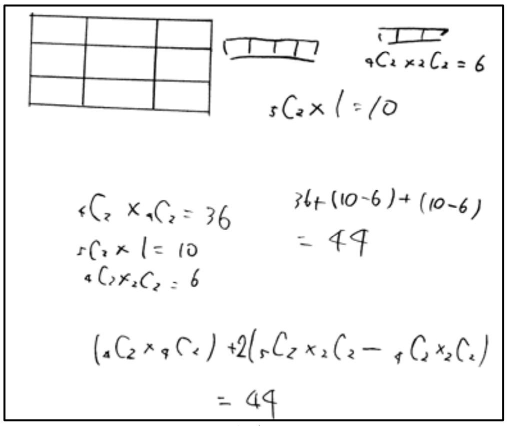


図４

（解答の方針）１、３行目の縦の線分がないものとして長方形の数を導き、そこに、その線分を使ってできる長方形の数を加える。

（解答）図１の点線部分がなかったとすると、長方形は

${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36$（個）である。

また、点線部分を使ってできる長方形は次のようになる。

図２の長方形は　${}_2C_2 \times {}_4C_2 = 6$（個）である。

図３の長方形は　${}_2C_2 \times {}_5C_2 = 10$（個）である。

したがって、点線部分を使う長方形は図２、図３の長方形の差 10－６＝４の２倍の８個となる。

よって、長方形は　36＋８＝44（個）

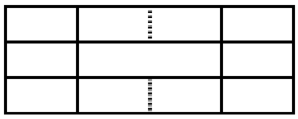


図１


図２

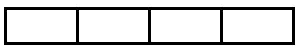


図３

以上４つの解法を確認することによって、生徒全体の解答の 71％を扱うことになる。生徒

には、「ここまでしかできなかったけど、その方法を評価してもらった。」、「いろいろ試みて答えは導けなかったが、惜しいところまでは考えることができていた。」という印象をもたせることをねらいとした。さらに、誤答しか導けなかった生徒にも、ここまでの解法でいくつかの数え方や計算方法があることを実感させるように配慮した。

②図形の分割や変形による解法（解法パターン８、９）

次の問題を提示し、考察を深めることにした。

①下の図の中に長方形はいくつあるか。
問題２の場合の長方形の数と比較せよ。
②同じにならない原因はどこにあるか。

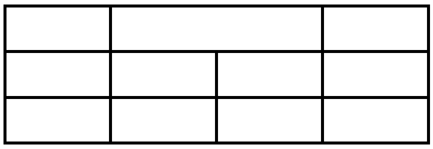


図１

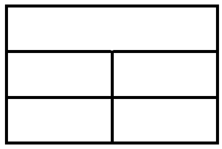


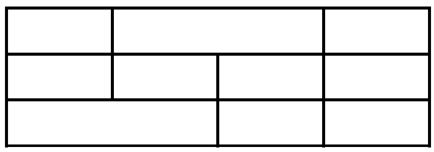
図２

さらに、右の図１、図２を板書し、原因を探る活動を深めていった。特に、図１では存在しないが、図２では存在する長方形に着目させ、横の辺の間に長方形を作る上で有効な縦の辺が何本あるかが重要であることを認識させるようにした。その上で、解法パターン６（事前に予想した【解答例３】）を確認する。誤答であっても、解答を分析することによって、考え方を有効に活用することができることを実感させられるように配慮した。

③確認問題

最後に、次の問題に取り組ませ、まとめとした。

確認問題
右の図の中に長方形はいくつあるか。



(4) ２時間目の授業展開の記録

(3)２時間目の授業の展開にしたがって授業を進めた。実際の授業展開の様子を先生（Ｔ）と生徒（Ｓ）の会話としてポイント毎に示す。

導入では、問題１について触れた。解法についても、組合せの考え方を使った解答、面積で分類して数えた解答の両方について取り上げた。特に、面積で分類して数えた解答については、取り組んだ生徒にその考え方を発表させた。他の生徒も納得したようである。

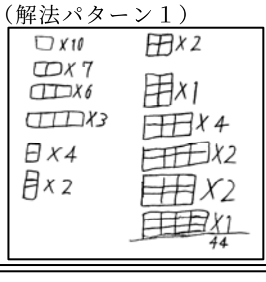
続いて、問題２のワークシートを配付し、多様な解答があったこと、それぞれによさがあることを伝えた。その後の様子を以下に示す。

①全て数える解法（解法パターン１、２）の場面

Ｔ：まず、最初に数える解法について考えていきましょう。ワークシートの１を見てください。ある人の解答を載せておいたので、この人の考え方をそれぞれ探ってみてください。では、〇〇君、どう考えたと思いますか。

Ｓ：この解法は、長方形の形で数えていったものだと思います。できる長方形の形の数をそれぞれ数えていって、足したものだと思います。

１（解法パターン１）



Ｔ：はい、ありがとうございました。今の説明でわかりましたか。長方形の形で分類して数える解法でした。これでもよいのですが、問題１のように面積で分類することもできます。１マスの面積を１とすると、一番大きなものは 12、一番小さなものは１であるので、それぞれの長方形の数を数えても同じように求めることができます。
数えて解答してくれた人は何人かいましたが、数字が大きかったので、数え間違いをしている人が結構いました。気を付けてください。

２（解法パターン２）

10	7	2	3
6	4	（0）	2
4	3	2	1

Ｔ：次に、同じように数える解法を１つ紹介しましょう。ワークシートの２を見てください。この図には、小さな長方形の左上に数字が書いてあります。この数字にはどんな意味があるか、考えてみてください。周りの人と話をしても結構ですから、意味を考えてみましょう。

＜４、５分時間を与える。周囲の生徒と一生懸命数字の意味を話し合っていた。＞

Ｔ：さぁ、どうでしょう。
Ｓ：10 と書いてある長方形をのばしていくと、全部で 10 個の長方形がある。という意味じゃないかな。
Ｔ：わかった、今の？
ようするに、これは長方形の位置で分類して数えたものです。左上に 10 と書いてある長方形を左上とする長方形の数が 10 個であるという意味ですね。残りは、同じようにそれぞれを左上とする長方形の数が書いてあるので、これらの数字を全て加えると、答えの 44 個になる、ということですね。
Ｔ：解法パターン１、２からわかるように、数えることもとても有効な方法ですが、ただ闇雲に数えるのではなく、ある方針をもって数えていくことが大切ですね。

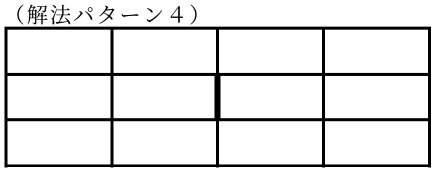
補集合を除く解法１（解法パターン３）についても、同様にして、解答者の意図を生徒に考えさせ、発表させた。

②補集合を除く解法２（解法パターン４）の場面

Ｔ：今の解法パターン３と同じように、問題１の場合の総数 60 から、真ん中の太線を使うものを引いて求めようとした人が結構いましたが、手を挙げてみてください。

＜20 数名の生徒が挙手＞

４（解法パターン４）



Ｔ：結構いますね。ですが、実は答えを間違ってしまった人が一番多かったのも、この解法でした。ワークシートの４を見てください。真ん中の太線を使うものを計算で求めようとして、間違った人が多かったようです。しかし、みんなが、いろいろなことを考えていることがとてもよくわかりました。ここでは、どのように計算したらよいかみんなで考えていきましょう。
まずは、線があるとすると全部で 60 個ですね。次に、真ん中の太線を使う長方形の数を考えます。どうすればよいですか。
Ｓ：縦の線の選び方と横の線の選び方がそれぞれ何通りあるか考えればよいと思います。
Ｔ：そうですね、では、縦の線の選び方は何通りですか。
Ｓ：縦の線は、５本あるから ${}_5C_2$ 通りだと思ったけど、これだと間違いですよね。
Ｓ：真ん中の太線は必ず使うから、残り１本の縦線の選び方を考えるんじゃないかな。だとすると、４本から１本選ぶから４通りかな。

T：そうですね。縦線の選び方は、実は、４通りですね。では、横線はどうでしょう。
S：横線は４本だから、$_4C_2$通りかな。
S：でも、それだと、上から１番目の線と２番目の線を選ぶと、結局、太線を使わなくなっちゃうから、それだとだめじゃないかな。
S：具体的に考えればできるんじゃないかな。たとえば、１番目と３番目、１番目と４番目…とか。
T：そうですね。そう考えると何通りになりますか。
S：そうすると、１番目と３番目、１番目と４番目、２番目と３番目、２番目と４番目の４通りしかないぞ。
S：そうか、縦線の選び方も横線の選び方も単純に組合せではできないのか。
T：そうですね。実は、横線の選び方は、今の４通りしかないですね。何が何でも順列や組合せで考えればいいというものではなく、選び方が、順列なのか、組合せなのか、と考える前に、どんな選び方があるのかを考えることが場合の数は求める際には有効であり、大切であるということを覚えておいてください。
では、太線を使ってできる長方形の数はいくつになるでしょうか。
S：縦線の選び方が４通り、横線の選び方が４通りだから、４×４＝16 通りになると思います。
T：そうですね。ですから、全体の 60 通りから、太線を使ってできる長方形の数の 16 通りを引いて、44 通りになるわけですね。

この授業場面を通して、生徒は、順列か、組合せかと単純に考えるのではなく、状況の把握が大切であり、把握に基づいて立式することの重要性を認識できたようである。

③生徒独自の解法（解答パターン５）の場面

T：では、次にワークシートの５を見てください。実は、これは、事前に準備した解法にはない、みんなの中の誰かが独自に考えてくれた方法です。みんなが先生になって、この答案を採点するつもりで、この人の考え方を探ってみてください。
S：さっきの３や４は、真ん中の太線があるものとして全体を考えてから、太線を使うものを引いて求めたけど、この人の解答は、最初に、１列目と３列目の真ん中の線をないものとして数えてから、それを使うものを加えて求めているんじゃないのかな。
T：そうですね。先ほどは、余分なものを引いて求めましたが、この解答は、足りないものを加えて求めているんですね。すばらしい考え方だと思います。
S：先生、この解答の図１の点線部分がない場合の長方形の数が 36 個になることは、わかりますが、その後何をやっているのかよくわからないですが。

５（解法パターン５）

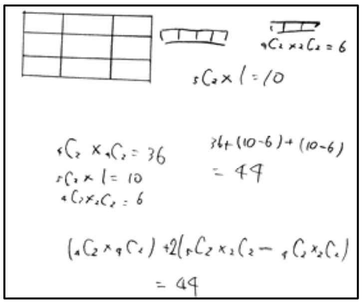


図１

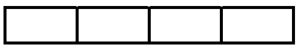
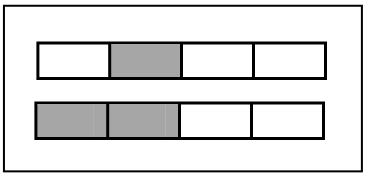


図２

T：そうですね。ここからが難しいですね。みんなも考えてみてください。わからないときは、周りの人と話しても結構ですから、この人は何を考えているのか探ってみてください。
＜５分程度の時間を与え、生徒に自由に討論をさせる。＞
T：さて、どうでしょうか。
S：図１では、真ん中の線がない場合の長方形の数を考えていて、図２では、真ん中の線がある場合の長方形の数を考えていて、それを引き算すれば、真ん中の線だけを使った長方形の数が求められるんだと思います。そして、それを２倍しているのは、１行目と３行目の２つあるからだと思います。

Ｓ：でも、わざわざそんなことしなくても、図１の１行目の真ん中の線だけを使った長方形の数は、単純に求められると思います。ここに１つとここに１つと、そして左右対称だから２倍して、全部で４個。それが、１行目と３行目だから、全部で８個、というふうにも求められるんじゃないですか。



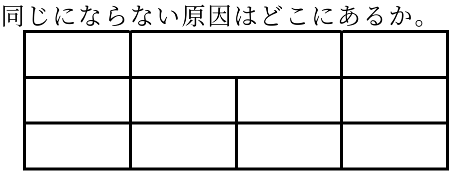
Ｔ：そうですね。そういう方法ももちろん正解です。今までにやってきたように、いろいろな解法があります。この場合も同じことが言えますね。
　そうすると、今求めた８個と最初に求めた 36 個を加えると、求める長方形の数が 44 個となります。

　ここまで進めた段階で、従来とは異なる授業展開にほとんどの生徒は慣れ、多様な思考をしようとする姿勢が見られるようになった。その様子から、数えたり、書き出したりする活動の重要性を認識し、取り組もうとする態度が育ってきたことがうかがえる。

④図形の分割や変形による解法（解答パターン８、９）の場面

Ｔ：では、次に、この図を見てください。（ワークシートの６の図を板書）見覚えのある人がいるでしょう。図形をずらして解決しようとした解法だと思います。では、これを見て、最初の問題の場合とこの場合では、長方形の数が同じになるでしょうか。予想してみましょう。

６①下の図の中に長方形はいくつあるか。
　問題２の場合の長方形の数と比較せよ。
②同じにならない原因はどこにあるか。



Ｔ：同じになると思う人は手を挙げてください。
＜半数程度の者が手を挙げる。＞

　では、違うと思う人は手を挙げてください。
＜同じく半数程度の者が手を挙げる。＞

　はい、ありがとうございました。意見が分かれましたね。同じであれば、ずらして解決することができるし、違うのであれば、ずらすことはできないということですね。では、今までに考えてきた解法のいずれでもかまいませんので、この中に長方形はいくつあるか求めてみてください。

＜５分程度の時間を与え、各自取り組ませる。長方形の面積で分類し数えている生徒と補集合を除く解法で解決している生徒がそれぞれ半数程度いた。＞

Ｔ：では、いくつでしたか。
Ｓ：私は、面積で分類して数えてみました。そしたら、48 個になりました。
Ｓ：私は、全体から余分なものを引いて求めましたが、そしたら、やっぱり 48 個でした。
Ｔ：長方形の数は違いますね。と言うことは、ずらして求めることはできないということですが、どこに違いがあるのでしょうか。それをみんなで考えていきましょう。
Ｓ：端の１列ずつは同じだから、図形として違うのは、真ん中の２列だけですよね。
Ｔ：そうですね。では、この図１、図２を見てください（図１、図２を板書）。それぞれの真ん中の２列だけを抜き出したものですが、それぞれ長方形は何個あるでしょうか。

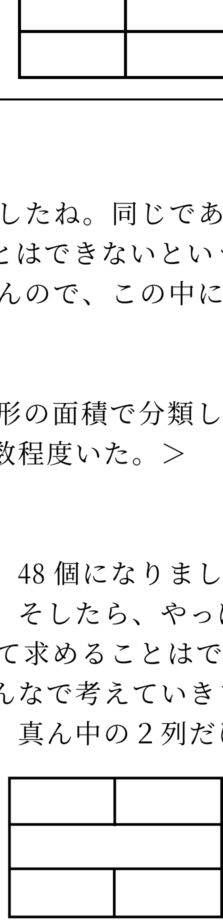


図１

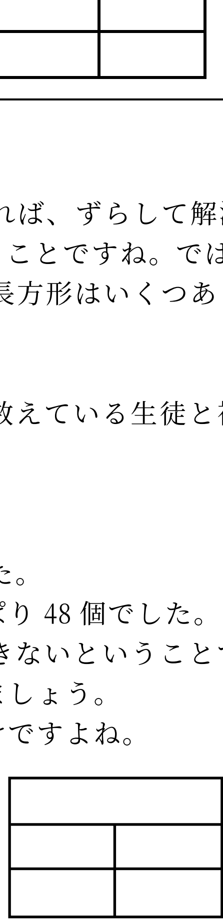
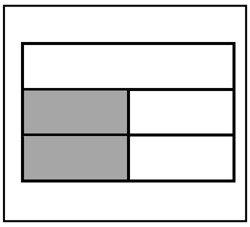


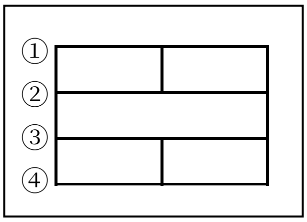
図２

Ｓ：図１の長方形は 10 個で、図２の長方形は 12 個だと思います。
Ｔ：そうですね、いろいろな解法があると思いますが、図１では 10 個、図２では 12 個になります。では、数が違うということは、図１にはないけど、図２にはある長方形があるはずです。それは、どんな長方形でしょうか。探してみましょう。
Ｓ：縦に２個並んだ長方形だ。
Ｔ：そうですね。ここにある縦に２個並んだ長方形の数だけ、図１と図２は違います。
では、どの線分のせいで、この長方形はできてしまったんでしょうか。周りの人と話し合ってみましょう。



＜５分程度時間を与え、生徒に自由に討論をさせる。＞

Ｔ：では、どうでしょうか。
Ｓ：図１にも、図２にも、縦の線は３本あるけれど、図１では、真ん中の縦の線が上手に使えていないと思います。
Ｓ：そうか、図２の真ん中の縦の線によって、６個の長方形を作っているけれど、図１の真ん中の縦の線は、４個の長方形しか作っていない。この違いがそのまま、個数の違いになっているんだ。
Ｔ：いいところに気が付きましたね。上の辺と下の辺が決まっても、場所によって、選べる縦の本数が変わってきてしまうんですね。たとえば、横の線を上から①、②、③、④とすると、①と②、①と③を選んだときには、有効な縦の線は、それぞれ何本あるでしょうか



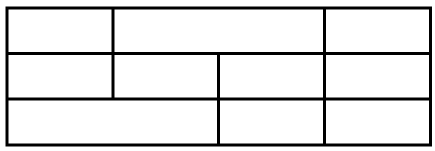
Ｓ：そうか、①と②のときは３本から２本を選ぶことになるけど、①と③のときは、２本から２本を選ぶしかないんだ。
Ｔ：他の人もわかりましたか。横の線の選び方によって、縦の線として選ぶことのできる本数が変わっていますね。ということは、横の線の選び方に応じて縦の線の選び方を考えていけば、長方形の数を求めることができるのではないでしょうか。

この後、生徒とともに、解法パターン６（事前に予想した【解答例３】）を考えた。生徒は、１つ１つ納得しながら長方形の数を求めていた。誤った解答であったにもかかわらず、その考え方を使って、正答にたどり着けたことは、多くの生徒にとって意外だったようである。図形の分割や変形による解法を考えた生徒にとっては,「全く間違った考えをしたのではなく、そこからもう少し考えればよかったんだ。」という気持ちになったようである。

⑤確認問題への取組

最後に、ワークシートの７の確認問題に取り組ませた。面積で分類して数えていた生徒もいたが、ほとんどの生徒が、最後に考えた解法で問題に取り組んでいた。今まで学んだ様々な解法の中から、この図形に適した解法を選択できていた。前回の問題において、左右対称であることを使って、補集合を除く解法を考えた生徒も、「これは左右対称ではないし、計算が大変そうだったので、最後に考えた解法でやってみました。」と答えていた。最後に、「正答にたどり着く解法は決して１通りではないから、数えたり、書き出したり、樹形図を描くなどして、その状況を把握し、取り組むことが大切である。」ということを強調し、授業を終わりにした。

７　確認問題
下の図の中に長方形はいくつあるか。



３．今後の課題

従来、場合の数の授業では、授業が進むにつれて、「これは、順列なのか、組合せなのか」といった短絡的な思考を求めることが多かった。しかし、授業者自身がこのような意識で授業を進めれば、生徒は自ずとその意識に染まっていく。今回の問題に取り組ませたときも、最初は、「順列か、組合せか」と考える生徒が多かった。問題を見たときに、「どういう構造をしているんだろう」と考える生徒はごくわずかであった。

以上のことを改善するためには、数えたり、書き出したり、樹形図を描くなどの活動が重要であることを授業者が意識するとともに、普段の授業の中でも、問題の構造を考える習慣をつけさせる必要がある。そして、時には今回の取組のように、いろいろな考え方を検討する時間を設定することが大切である。もちろん、扱う問題を十分に吟味し、順列、組合せだけで解決できる問題ではなく、あまり複雑ではないが、多様な解法が考えられる問題であることが望ましい。

今回の取組では、次の２点について大きな効果があった。１つは、数えたり、書き出したり、樹形図を描くなどの活動の重要性を生徒が実感できたことである。もう１つは、多様な解法を授業者が一方的に紹介するのではなく、生徒の解法を生かして、全員で考えていくことによって、自分の考え方のよさ、他の考え方のよさが実感できたことである。最後の確認問題に取り組んでいた生徒は、最初に問題に取り組んでいた生徒とは明らかに違っていた。長方形を書き出して数えたり、一部分を抜き出してその状況の把握に努めたりと、問題の構造の把握に懸命に取り組んでいた。もちろん、この時間だけで十分であるとは思えない。これからの取組が、今回芽生えた力をさらに伸ばしていくこととなる。

一方、今回の取組では、生徒のすばらしさを実感することもできた。準備した解法以外の解法を思いついた生徒、地道に数えた生徒など、頭が下がる思いである。また、普段は、講義形式の授業が多く、意見を発表させる場面が少なかったが、機会を与えれば、十分に考えを述べることができることも、改めて認識することができた。これらの生徒の芽を摘むことなく、さらに伸ばしていくためにも、可能な限り多くの生徒の考え方、意見を有効に取り入れた授業づくりをしていく必要がある。

引用・参考文献

・国立教育政策研究所教育課程研究センター　　平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査報告書

おわりに

生徒から「今日の授業は楽しかった」とか「数学が少しわかった気がする」といった言葉を聞くと、何物にも代え難い嬉しさを感じるものである。教師は、生徒に学習内容を理解させ、定着させるために、日々教材研究をしたり授業展開を工夫したりして、授業改善に取り組んでいる。授業改善の視点を、各事例の成果と課題から次のように挙げることができる。

1．教材の開発

どのような問題を教材として示すかは、数学科の授業を成功に導く１つのキーとなる。

教科書の例や例題を教材として示す場合は、その問題の意図、生徒に身に付けさせたい能力を十分に検討する必要がある。事例１では、教科書の例題を使っている。生徒の実態を捉え、つまずきやすい箇所を事前に検討し、ワークシートやコンピュータを活用して、場合分けの必要性を実感させることができた。

授業のねらいを達成させるために、教師が問題を新たに開発する必要もある。事例３では、多様な考えによってアプローチできる問題を新たに開発した。単元の導入やまとめの段階では、解法や答えが１つに決まってしまう問題よりも、解法が幾通りもある問題を生徒に取り組ませることによって、単元の内容に対する興味を喚起することができる。

また、単元の導入では、具体的な道具などを開発し、教材として授業で使うことも効果的である。事例２では、数学史との関連も考慮し道具を開発した。数学を身近に感じさせるためには、実際に手に触れさせて使わせてみることは、大切なことである。

教材研究の第一歩は、教材の吟味である。教科書の例や例題であっても、自ら開発した問題であっても、授業のねらいや生徒の実態に合った問題であるかどうかを十分に検討することが大切である。

2．授業展開の工夫

数学の問題は、正答と誤答がはっきりしているため、授業では、正答だけを求めることが多い。しかし、生徒が主体的に授業に取り組むためには、誤答も含めて生徒の考え方を生かす授業を展開する必要がある。生徒の考え方を整理して、それらを積極的に授業の中で取り上げることによって、生徒の課題意識を喚起したり、授業を活性化させたりすることができる。事例３では、誤った考え方であっても否定せずに、その考え方を生かして正答を導き、どこでつまずいていたのかを明確にすることによって、正答への道筋を理解させることができた。それぞれの解法のよさを実感させるだけでなく、解法の相違点を吟味させることによって、数学の理解を深めることができる。

また、授業の中でコンピュータを活用することも、生徒が主体的に授業に取り組むためには有効である。事例１では、コンピュータを活用してグラフを動的に捉えさせ、場合に分けることを生徒自身が発見的に予想し、生徒とともに検証した。コンピュータを活用することによって、数学的な性質や考え方を予想する段階で、活動の幅を広げることができる。従来では、イメージすることができなかった生徒でも、具体的に見ることによって予想が可能となる。生徒一人一人が予想することができれば、自ずと授業への参加意識も高まってくる。

生徒の学習意欲を喚起し、理解を深めるためにどのような授業展開が有効かについて、今後ますます研究し、取り組んでいく必要がある。

３．数学を学ぶ意味を考える

$\boxed{\text{事例２}}$では、大きさ（長さ）を測る、高さを測るといった身近な活動と数学史の内容を取り入れることによって、数学のおもしろさ、奥深さを体験し、三角比を学ぶ意味を実感させることができた。また、$\boxed{\text{事例３}}$では、公式や解法を覚えることだけが数学ではなく、試行錯誤することによって考えることの楽しさを体験し、数学を学ぶ意味を実感させることができた。生徒の数学に対する意識の改善を図り、学習意欲を喚起するためにも、数学を学ぶ意味や数学の有用性を実感させることのできる授業に取り組むことが大切である。

今回紹介した３つの事例は、以上の視点から十分に検討したものである。その趣旨や授業の進め方を参考に、各学校の実態を踏まえた課題等を設定し、活用していただきたい。研究協力委員の先生方に取り組んでいただいた授業は特別な授業ではない。多くの学校で、多くの教室でこのような授業が実践されることを望んでいる。教材の研究、授業の進め方の研究等をさらに進め、数学の授業が、生徒にとって、楽しい授業、わかる授業、できる授業となるよう工夫していただきたい。

高等学校における教科指導の充実
数　学　科

発　行　　平成18年3月
栃木県総合教育センター　研究調査部
〒320-0002　栃木県宇都宮市瓦谷町1070
TEL 028-665-7204　　FAX 028-665-7303