事例３　問題解決しようとする態度を育成するための授業展開の工夫
～ 生徒の考え方を生かした場合の数の指導 ～

１．事例の概要

(1) 指導の改善

場合の数は、積の法則、和の法則、順列、組合せと学習をしていく。それぞれの導入では、数えたり、書き出したり、樹形図を描くなどの活動を通して、その構造を把握するために、しっかり思考する。しかし、その後の指導では、生徒は、順列か組合せのいずれかであるといった考えにとらわれ、数学的な思考の障害になっている様子が見られる。そのため、少し複雑な問題に出会うと、戸惑ってしまうことが多い。

また、教育課程実施状況調査の質問紙調査では､「順列や組合せの考えを用いて、場合の数を能率的に数えあげること」については、表のように、生徒は、内容がわかりにくく、きらいであるという傾向が見られる。一方、教師は、生徒にとって比較的理解しやすく、興味を持ちやすいと考えている傾向が見られる。指導の際には、生徒と教師の間の大きなギャップを十分認識する必要がある。

「順列や組合せの考えを用いて、場合の数を能率的に数えあげること」				
生徒	よくわかった	33.7%	好きだった	29.6%
	よくわからなかった	47.6%	きらいだった	51.8%
教師	生徒にとって理解しやすい	47.3%	生徒が興味を持ちやすい	65.9%
	生徒にとって理解しにくい	30.0%	生徒が興味を持ちにくい	13.3%

教育課程実施状況調査から

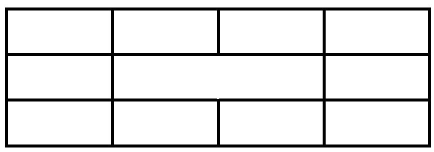
場合の数の指導では、計算の前提となる、数えたり、書き出したり、樹形図を描いたりする活動を苦にしない態度を身に付けさせ、問題の構造を把握することの大切さを実感させる必要がある。そのために、単純に順列、組合せだけで解決できる問題ではなく、多様な解法が考えられる問題を設定し、その問題に対する生徒のユニークな発想、途中までの解答、誤った解答を生かして授業を進めることにした。

(2) 多様な解法が考えられ、生徒の解答が授業の中で生かせる問題の設定

生徒が設定した問題に取り組む中で、数えたり、書き出したり、樹形図を描いたりする活動を試みることで、問題の構造がわかり､「おもしろい」と感じたり、正答にたどり着いたときに「わかった」と感じたりすることで、この活動が解答への大切なステップになっていることを実感させたい。また、正答にたどり着かなかった場合でも、他の生徒の解法を見て学んだり、自分の誤答が「惜しい」と認められたりすることで、生徒が解決への手応えを実感し、その結果、活動を苦にしない態度が身に付くことを意図した。

以上の考えにもとづく問題は、多少手応えはあるが、問題の意味がわからなくて手が出ないということがないように、設定はそれほど難解でないものが望ましい。今回は、次のような問題で試みた。

問題）右のような図形がある。この中に、長方形（正方形も含む）はいくつあるか。



予想される主な解答は、次のとおりである。

【解答例１】全て数える解法

全て数える方法では、数え間違う生徒が多い。重複なく、もれなく、要領よく数えるためには、次のような方法がある。

（その１）長方形の面積で分類し、もれのないように数える。（１マスを面積１とする）

面積１の長方形 …	10 個	面積２の長方形 …	11 個
面積３の長方形 …	８個	面積４の長方形 …	５個
面積６の長方形 …	５個	面積８の長方形 …	２個
面積９の長方形 …	２個	面積 12 の長方形 …	１個
		合計	44 個

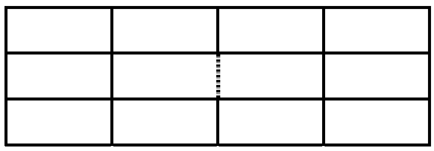
（その２）長方形の位置で分類し、もれのないように数える。

図の中の数字は、その位置を左上の頂点とする長方形の数である。

10	7	2	3
6	4	（0）	2
4	3	2	1

合計　44 個

【解答例２】補集合を除く解法



右図の点線を通るような長方形の数を全体（60 個）から引く。このような長方形を数える場合も、【解答例１】の２通りの方法がある。

（その１）長方形の面積で分類する場合（点線を含む長方形の数）

面積１の長方形 …	２個	面積２の長方形 …	６個
面積３の長方形 …	２個	面積４の長方形 …	４個
面積６の長方形 …	２個		
		合計	16 個

したがって、求める長方形は　60－16＝44（個）

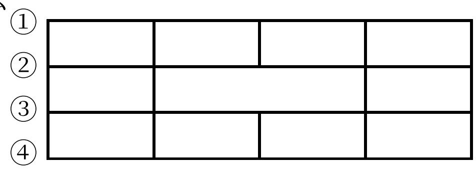
（その２）長方形の位置で分類する場合（点線を含む長方形の数）

2	2	4	0
2	2	4	0
0	0	0	0

合計　16 個

したがって、求める長方形は　60－16＝44（個）

【解答例３】場合分けをして組合せの計算を利用する解法



右図の横の平行線に、上から順に①～④の番号を付けると、次のように考えることができる。

（その１）場合に分けて考える。

ⅰ）数える長方形の上の辺が①上にある場合

下の辺が②上にあるとき、縦の辺は５本から２本選べばよい　${}_5C_2=10$ 通り

下の辺が③上にあるとき、縦の辺は４本から２本選べばよい　${}_4C_2=6$ 通り

下の辺が④上にあるとき、縦の辺は４本から２本選べばよい　${}_4C_2=6$ 通り

ⅱ）数える長方形の上の辺が②上にある場合

下の辺が③上にあるとき、縦の辺は４本から２本選べばよい　${}_4C_2=6$ 通り

下の辺が④上にあるとき、縦の辺は４本から２本選べばよい　${}_4C_2=6$ 通り

iii）数える長方形の上の辺が③上にある場合

下の辺が④上にあるとき、縦の辺は５本から２本選べばよい　${}_5C_2=10$ 通り

ｉ)、ii)、iii）より　長方形は 44 個

（その２）

縦の辺として５本使えるのは、①と②、③と④を選んだときの２通りで、縦の辺として４本使えるのは、①と③、①と④、②と③、②と④を選んだときの４通りである。

したがって、長方形は　$2\times{}_5C_2+4\times{}_4C_2=44$（個）

以上、全部で６通りの解法を準備し、授業に臨んだ。

２．指導の実践

(1) 授業のねらいと展開の工夫

〇授業のねらいの設定

①数えたり、書き出したり、樹形図を描いたりする活動の重要性を認識させ、生徒に活動を苦にしない態度を身に付けさせる。

②生徒の考えた解法や途中までの解答､誤った解答を生かして授業を進めることによって、解決への手応えを実感させる。

〇展開の工夫

実施する授業は２時間とした。

１時間目は、右のワークシート１、２を使用した。ワークシートには､｢下書きから答えまでの全てを用紙に記入すること。｣との文言を付け加えた。ワークシート１の問題を導入の問題とし、その後、ワークシート２の問題に十分な時間（20 分間）を与え、取り組ませた。解けた生徒に対しては、他の解法で挑ませた。また、授業の中で「今回は答えの正誤よりも、考える過程をみんなで検討していきます。｣と伝え、計算の過程やメモを消さないようにさせた。

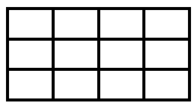
授業後にワークシートを回収し、全ての生徒の解答を分類し、それぞれの解法ごとに生徒の自筆の解答を載せたワークシートを作成した。

２時間目では、作成したワークシートをもとに、生徒とともに解法を分析し、数えたり、書き出したり、樹形図を描いたりする活動の重要性を認識させた。

数学ワークシート１

１年　組　氏名

問題１）５本の平行線と４本の平行線が直角に交わる右のような図がある。この中に、長方形（正方形を含む）は、いくつあるか。

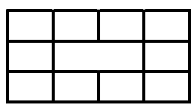


下書きから答えまでの全てを用紙に記入すること。

数学ワークシート２

１年　組　氏名

問題２）問題１の図形から、１か所線分を除いた右のような図がある。この中に､長方形(正方形を含む)は、いくつあるか。



下書きから答えまでの全てを用紙に記入すること。

(2) 問題１、問題２の解答の分析結果

①問題１について

以前の授業の中で取り扱った問題であったので、ほとんどの生徒が、スムーズに解答し、正答にたどり着けた。計算ミスをした者を含めて８割の生徒は、組合せを使って、${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 60$と解答していた。残りの生徒は、面積で分類して数えていた。

正答	組合せの考え方を使った解答	30名（75%）
	面積で分類し数えた解答	８名（20%）
誤答	組合せの考え方を使ったが、計算ミスをした解答	２名（５%）

（合計40名）

②問題２について

次の視点で解答を分析した。

・正答にたどり着いた生徒は、どのように考えたか。

・正答にたどり着いていないが、その考え方で正答にたどり着けるものについては、どこでつまずいてしまったか。

・誤答した生徒は、どこで間違ってしまったか。

問題２の解答は下の表のようであった。

解答パターン	解　答　方　法	正答数	誤答数	途中の解答数
1	数える（面積で分類） 【解答例１】（その１）	6	9	3
2	数える（その他の方法で分類）	2	1	0
3	補集合を除く （補集合の数は面積で分類し数える） 【解答例２】（その１）	8	4	2
4	補集合を除く （補集合の数は計算で求める）	2	12	1
5	１、３行目中央の縦の線分をないものとして数え、後からその線分を使うものを加える。	6	5	1
6	横の辺を２本指定して、縦の辺は組合せの計算で求める。 【解答例３】（その１）	0	5	1
7	縦の辺を２本指定して、横の辺は組合せの計算で求める。	1	1	0
8	図形を分割	0	6	0
9	図形を移動して変形	0	5	1
10	その他	0	5	0

（数字は延べ数）

個々の解答パターンについて

・解答パターン１、２

数えようとした生徒の中には、重複や数えもれがあり、誤答が多かった。

・解答パターン３

補集合を数えた生徒は、数える長方形の数が多くなかった（16個）ので、数え間違いが少なく、正答率が高かった。

・解答パターン４

補集合を計算で求めようとした生徒は、計算方法を誤り、誤答が多かった。

・解法パターン５

補集合を除く解法ではなく、考えやすいように線分をないものとし、その線分を使う長方形の数を加えて求めた解法である。複数の解法を思い付いた生徒の中に

多かった。この解法は、事前に予想していなかった。

・解法パターン６

事前に予想していた解法の中で、生徒が正答にたどり着くのは難しいと思われるものであったが、成績上位者の中に数名、この解法を試みた生徒がいた。しかし、全て誤答であった。

・解法パターン７

それほどすっきりとした解答ではなかったが、正答者がいた。

・解法パターン８、９

図形の分割・移動・変形を用いて解決しようと試みた生徒がいた。しかし、このままでは、正答にはたどり着けない。

全体的な傾向について

生徒は、順列か組合せのいずれかで解けるのではないかと考えて取り組みはじめていた。単純に解決できないことに気付くと、まずは、工夫して順列、組合せの計算ができないかと考えていた。もちろん、悪いことではないが、順列、組合せの計算に頼っている傾向がある。数えようとした解答の延べ数が 21（24.1%）であったのに対して、何とか計算でと考えた解答の延べ数が 66（75.9%）であったことがそれを表している。

(3) ２時間目の授業の展開

２時間目の授業では、まず、問題１を取り上げ、２通りの解法をそれぞれ生徒に説明させ、基本的な事項の確認を行った。

問題２は、生徒の自筆の解答、作業スペースを確保したワークシートを作成し、それをもとに進めた。正答にたどり着ける解法（解法パターン１、２、３、４、５）を確認するとともに、正答にはたどり着けない図形の分割や変形による解法（解法パターン８、９）について取り上げ、その考え方が正しいかどうかを含めて、深く掘り下げることにした。また、この解法の考え方を使って、解法パターン６（事前に予想した【解答例３】）を導くことにした。

問題２の解答の取り扱い

①正答にたどり着ける解法（解法パターン１、２、３、４、５）

・全て数える解法（解法パターン１、２）

長方形の形で分類したものについて、生徒自筆の解答（図１）をワークシートにそのまま載せた。ここで、面積で分類することもできることを付け加えた。

また、長方形の位置で分類する方法で解答した生徒がいなかったので、下の図２を与えて、その数字の意味を考えさせた。特に、全て数える解法の場合には、ただ闇雲に数えるのではなくて、ある方針をもって数えることの大切さを実感させるように説明した。

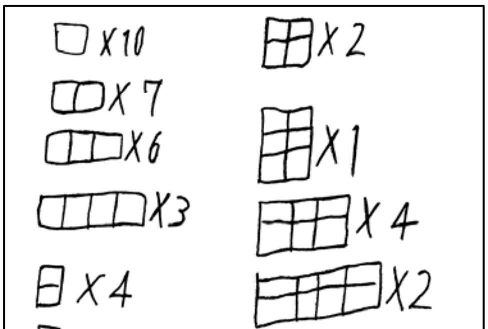


図１

10	7	2	3
6	4	（0）	2
4	3	2	1

図２

・補集合を除く解法１（解法パターン３）

全て数える解法と同様に、生徒自筆の解答（図３）をワークシートにそのまま載せた。生徒の解答のように、授業の中で、左右対称の性質を利用することができることを他の生徒にも気付かせたい。なお、生徒の解答では、太線の部分が赤線になっていたが、線を太くして載せた。

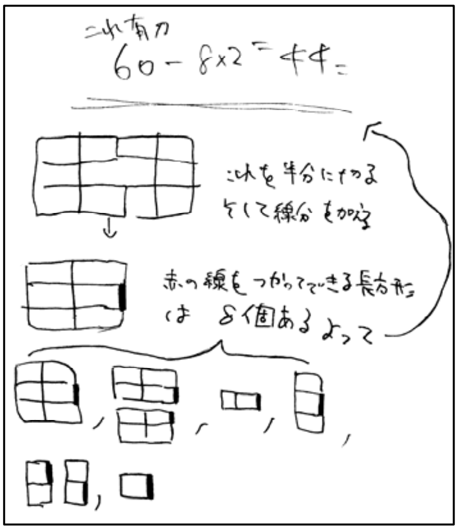
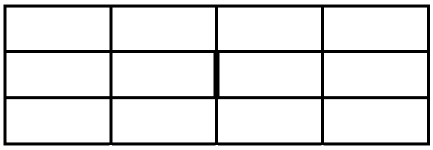


図３

・補集合を除く解法２（解法パターン４）

補集合を除く解法１（解法パターン３）に比べると、補集合を計算で求める解法（解法パターン４）は、誤答が多かった。解法の方針、計算方法について生徒とともに確認することによって、誤答の原因を解明していった。誤答は、長方形をつくる縦線の選び方、横線の選び方を求める際に、単純に組合せの考えを使って求めるものが多かった。ここでは、右の図を与えて、太線を含む長方形の数について考えていった。



・生徒独自の解法（解法パターン５）

事前に予想していなかった解法として、生徒自筆の解答（図４）をワークシートにそのまま載せ、取り上げた。ただし、生徒の解答では、説明が不十分なところもあるので、授業の中で生徒に確認しながら進めた。

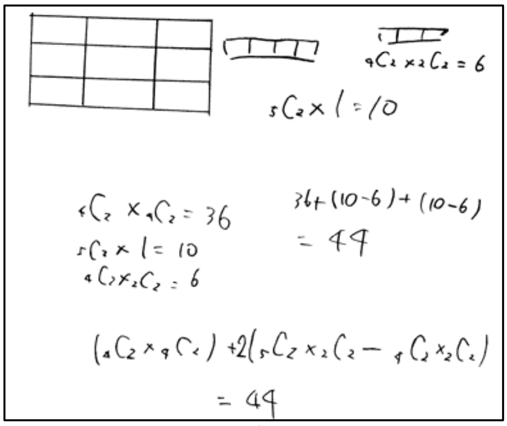


図４

（解答の方針）１、３行目の縦の線分がないものとして長方形の数を導き、そこに、その線分を使ってできる長方形の数を加える。

（解答）図１の点線部分がなかったとすると、長方形は

$_4C_2\times{}_4C_2=36$（個）である。

また、点線部分を使ってできる長方形は次のようになる。

図２の長方形は　$_2C_2\times{}_4C_2=6$（個）である。

図３の長方形は　$_2C_2\times{}_5C_2=10$（個）である。

したがって、点線部分を使う長方形は図２、図３の長方形の差 10－６＝４の２倍の８個となる。

よって、長方形は　36＋８＝44（個）

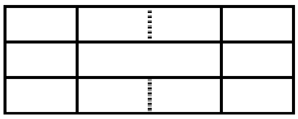


図１


図２

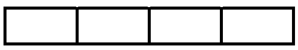


図３

以上４つの解法を確認することによって、生徒全体の解答の 71%を扱うことになる。生徒

には、「ここまでしかできなかったけど、その方法を評価してもらった。」、「いろいろ試みて答えは導けなかったが、惜しいところまでは考えることができていた。」という印象をもたせることをねらいとした。さらに、誤答しか導けなかった生徒にも、ここまでの解法でいくつかの数え方や計算方法があることを実感させるように配慮した。

②図形の分割や変形による解法（解法パターン８、９）

次の問題を提示し、考察を深めることにした。

①下の図の中に長方形はいくつあるか。
問題２の場合の長方形の数と比較せよ。
②同じにならない原因はどこにあるか。

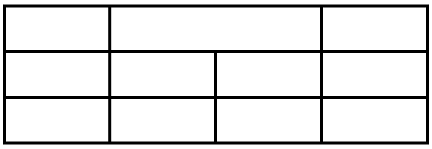


図１

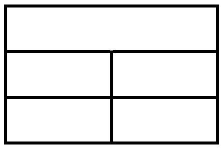


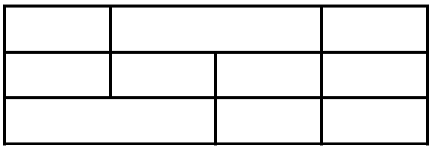
図２

さらに、右の図１、図２を板書し、原因を探る活動を深めていった。特に、図１では存在しないが、図２では存在する長方形に着目させ、横の辺の間に長方形を作る上で有効な縦の辺が何本あるかが重要であることを認識させるようにした。その上で、解法パターン６（事前に予想した【解答例３】）を確認する。誤答であっても、解答を分析することによって、考え方を有効に活用することができることを実感させられるように配慮した。

③確認問題

最後に、次の問題に取り組ませ、まとめとした。

確認問題
右の図の中に長方形はいくつあるか。



(4) ２時間目の授業展開の記録

(3) ２時間目の授業の展開にしたがって授業を進めた。実際の授業展開の様子を先生（Ｔ）と生徒（Ｓ）の会話としてポイント毎に示す。

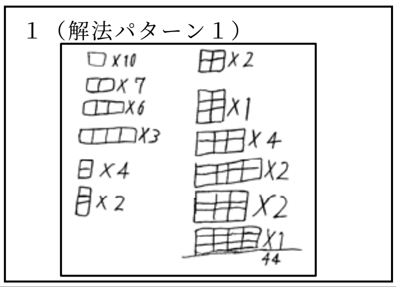
導入では、問題１について触れた。解法についても、組合せの考え方を使った解答、面積で分類して数えた解答の両方について取り上げた。特に、面積で分類して数えた解答については、取り組んだ生徒にその考え方を発表させた。他の生徒も納得したようである。

続いて、問題２のワークシートを配付し、多様な解答があったこと、それぞれによさがあることを伝えた。その後の様子を以下に示す。

①全て数える解法（解法パターン１、２）の場面

Ｔ：まず、最初に数える解法について考えていきましょう。ワークシートの１を見てください。ある人の解答を載せておいたので、この人の考え方をそれぞれ探ってみてください。では、○○君、どう考えたと思いますか。

Ｓ：この解法は、長方形の形で数えていったものだと思います。できる長方形の形の数をそれぞれ数えていって、足したものだと思います。



Ｔ：はい、ありがとうございました。今の説明でわかりましたか。長方形の形で分類して数える解法でした。これでもよいのですが、問題１のように面積で分類することもできます。１マスの面積を１とすると、一番大きなものは 12、一番小さなものは１であるので、それぞれの長方形の数を数えても同じように求めることができます。
数えて解答してくれた人は何人かいましたが、数字が大きかったので、数え間違いをしている人が結構いました。気を付けてください。

２（解法パターン２）

10	7	2	3
6	4	（0）	2
4	3	2	1

Ｔ：次に、同じように数える解法を１つ紹介しましょう。ワークシートの２を見てください。この図には、小さな長方形の左上に数字が書いてあります。この数字にはどんな意味があるか、考えてみてください。周りの人と話をしても結構ですから、意味を考えてみましょう。

＜４、５分時間を与える。周囲の生徒と一生懸命数字の意味を話し合っていた。＞

Ｔ：さぁ、どうでしょう。
Ｓ：10 と書いてある長方形をのばしていくと、全部で 10 個の長方形がある。という意味じゃないかな。
Ｔ：わかった、今の？
ようするに、これは長方形の位置で分類して数えたものです。左上に 10 と書いてある長方形を左上とする長方形の数が 10 個であるという意味ですね。残りは、同じようにそれぞれを左上とする長方形の数が書いてあるので、これらの数字を全て加えると、答えの 44 個になる、ということですね。
Ｔ：解法パターン１、２からわかるように、数えることもとても有効な方法ですが、ただ闇雲に数えるのではなく、ある方針をもって数えていくことが大切ですね。

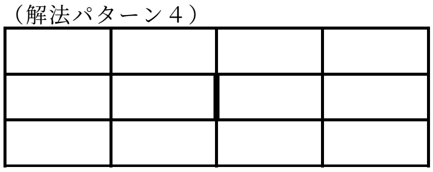
補集合を除く解法１（解法パターン３）についても、同様にして、解答者の意図を生徒に考えさせ、発表させた。

②補集合を除く解法２（解法パターン４）の場面

Ｔ：今の解法パターン３と同じように、問題１の場合の総数 60 から、真ん中の太線を使うものを引いて求めようとした人が結構いましたが、手を挙げてみてください。

＜20 数名の生徒が挙手＞

４（解法パターン４）



Ｔ：結構いますね。ですが、実は答えを間違ってしまった人が一番多かったのも、この解法でした。ワークシートの４を見てください。真ん中の太線を使うものを計算で求めようとして、間違った人が多かったようです。しかし、みんなが、いろいろなことを考えていることがとてもよくわかりました。ここでは、どのように計算したらよいかみんなで考えていきましょう。
まずは、線があるとすると全部で 60 個ですね。次に、真ん中の太線を使う長方形の数を考えます。どうすればよいですか。
Ｓ：縦の線の選び方と横の線の選び方がそれぞれ何通りあるか考えればよいと思います。
Ｔ：そうですね、では、縦の線の選び方は何通りですか。
Ｓ：縦の線は、５本あるから ${}_5C_2$ 通りだと思ったけど、これだと間違いですよね。
Ｓ：真ん中の太線は必ず使うから、残り１本の縦線の選び方を考えるんじゃないかな。だとすると、４本から１本選ぶから４通りかな。

T：そうですね。縦線の選び方は、実は、４通りですね。では、横線はどうでしょう。
S：横線は４本だから、${}_4\mathrm{C}_2$通りかな。
S：でも、それだと、上から１番目の線と２番目の線を選ぶと、結局、太線を使わなくなっちゃうから、それだとだめじゃないかな。
S：具体的に考えればできるんじゃないかな。たとえば、１番目と３番目、１番目と４番目…とか。
T：そうですね。そう考えると何通りになりますか。
S：そうすると、１番目と３番目、１番目と４番目、２番目と３番目、２番目と４番目の４通りしかないぞ。
S：そうか、縦線の選び方も横線の選び方も単純に組合せではできないのか。
T：そうですね。実は、横線の選び方は、今の４通りしかないですね。何が何でも順列や組合せで考えればいいというものではなく、選び方が、順列なのか、組合せなのか、と考える前に、どんな選び方があるのかを考えることが場合の数は求める際には有効であり、大切であるということを覚えておいてください。
では、太線を使ってできる長方形の数はいくつになるでしょうか。
S：縦線の選び方が４通り、横線の選び方が４通りだから、４×４＝16 通りになると思います。
T：そうですね。ですから、全体の 60 通りから、太線を使ってできる長方形の数の 16 通りを引いて、44 通りになるわけですね。

この授業場面を通して、生徒は、順列か、組合せかと単純に考えるのではなく、状況の把握が大切であり、把握に基づいて立式することの重要性を認識できたようである。

③生徒独自の解法（解答パターン５）の場面

T：では、次にワークシートの５を見てください。実は、これは、事前に準備した解法にはない、みんなの中の誰かが独自に考えてくれた方法です。みんなが先生になって、この答案を採点するつもりで、この人の考え方を探ってみてください。

５（解法パターン５）

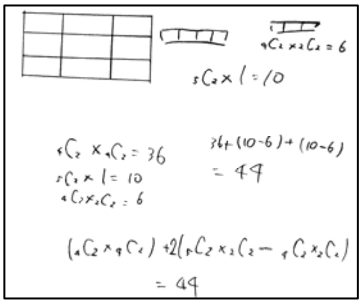



図１

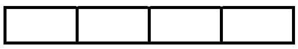
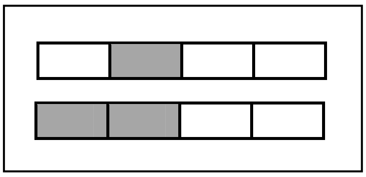


図２

S：さっきの３や４は、真ん中の太線があるものとして全体を考えてから、太線を使うものを引いて求めたけど、この人の解答は、最初に、１列目と３列目の真ん中の線をないものとして数えてから、それを使うものを加えて求めているんじゃないのかな。
T：そうですね。先ほどは、余分なものを引いて求めましたが、この解答は、足りないものを加えて求めているんですね。すばらしい考え方だと思います。
S：先生、この解答の図１の点線部分がない場合の長方形の数が 36 個になることは、わかりますが、その後何をやっているのかよくわからないですが。
T：そうですね。ここからが難しいですね。みんなも考えてみてください。わからないときは、周りの人と話しても結構ですから、この人は何を考えているのか探ってみてください。
＜５分程度の時間を与え、生徒に自由に討論をさせる。＞
T：さて、どうでしょうか。
S：図１では、真ん中の線がない場合の長方形の数を考えていて、図２では、真ん中の線がある場合の長方形の数を考えていて、それを引き算すれば、真ん中の線だけを使った長方形の数が求められるんだと思います。そして、それを２倍しているのは、１行目と３行目の２つあるからだと思います。

S：でも、わざわざそんなことしなくても、図１の１行目の真ん中の線だけを使った長方形の数は、単純に求められると思います。ここに１つとここに１つと、そして左右対称だから２倍して、全部で４個。それが、１行目と３行目だから、全部で８個、というふうにも求められるんじゃないですか。



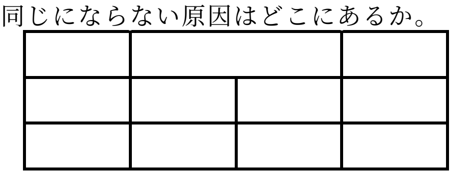
T：そうですね。そういう方法ももちろん正解です。今までにやってきたように、いろいろな解法があります。この場合も同じことが言えますね。
そうすると、今求めた８個と最初に求めた 36 個を加えると、求める長方形の数が 44 個となります。

ここまで進めた段階で、従来とは異なる授業展開にほとんどの生徒は慣れ、多様な思考をしようとする姿勢が見られるようになった。その様子から、数えたり、書き出したりする活動の重要性を認識し、取り組もうとする態度が育ってきたことがうかがえる。

④図形の分割や変形による解法（解答パターン８、９）の場面

T：では、次に、この図を見てください。（ワークシートの６の図を板書）見覚えのある人がいるでしょう。図形をずらして解決しようとした解法だと思います。では、これを見て、最初の問題の場合とこの場合では、長方形の数が同じになるでしょうか。予想してみましょう。

６①下の図の中に長方形はいくつあるか。
問題２の場合の長方形の数と比較せよ。
②同じにならない原因はどこにあるか。



T：同じになると思う人は手を挙げてください。
＜半数程度の者が手を挙げる。＞

では、違うと思う人は手を挙げてください。
＜同じく半数程度の者が手を挙げる。＞

はい、ありがとうございました。意見が分かれましたね。同じであれば、ずらして解決することができるし、違うのであれば、ずらすことはできないということですね。では、今までに考えてきた解法のいずれでもかまいませんので、この中に長方形はいくつあるか求めてみてください。

＜５分程度の時間を与え、各自取り組ませる。長方形の面積で分類し数えている生徒と補集合を除く解法で解決している生徒がそれぞれ半数程度いた。＞

T：では、いくつでしたか。
S：私は、面積で分類して数えてみました。そしたら、48 個になりました。
S：私は、全体から余分なものを引いて求めましたが、そしたら、やっぱり 48 個でした。
T：長方形の数は違いますね。と言うことは、ずらして求めることはできないということですが、どこに違いがあるのでしょうか。それをみんなで考えていきましょう。
S：端の１列ずつは同じだから、図形として違うのは、真ん中の２列だけですよね。
T：そうですね。では、この図１、図２を見てください（図１、図２を板書）。それぞれの真ん中の２列だけを抜き出したものですが、それぞれ長方形は何個あるでしょうか。

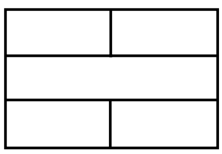


図１

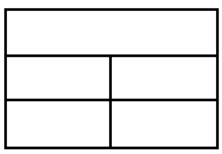
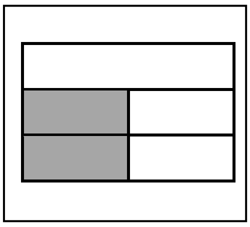


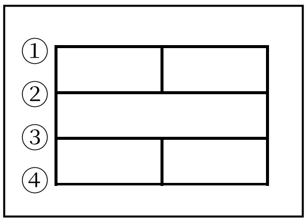
図２

Ｓ：図１の長方形は 10 個で、図２の長方形は 12 個だと思います。
Ｔ：そうですね、いろいろな解法があると思いますが、図１では 10 個、図２では 12 個になります。では、数が違うということは、図１にはないけど、図２にはある長方形があるはずです。それは、どんな長方形でしょうか。探してみましょう。
Ｓ：縦に２個並んだ長方形だ。
Ｔ：そうですね。ここにある縦に２個並んだ長方形の数だけ、図１と図２は違います。
では、どの線分のせいで、この長方形はできてしまったんでしょうか。周りの人と話し合ってみましょう。



＜５分程度時間を与え、生徒に自由に討論をさせる。＞

Ｔ：では、どうでしょうか。
Ｓ：図１にも、図２にも、縦の線は３本あるけれど、図１では、真ん中の縦の線が上手に使えていないと思います。
Ｓ：そうか、図２の真ん中の縦の線によって、６個の長方形を作っているけれど、図１の真ん中の縦の線は、４個の長方形しか作っていない。この違いがそのまま、個数の違いになっているんだ。
Ｔ：いいところに気が付きましたね。上の辺と下の辺が決まっても、場所によって、選べる縦の本数が変わってきてしまうんですね。たとえば、横の線を上から①、②、③、④とすると、①と②、①と③を選んだときには、有効な縦の線は、それぞれ何本あるでしょうか



Ｓ：そうか、①と②のときは３本から２本を選ぶことになるけど、①と③のときは、２本から２本を選ぶしかないんだ。
Ｔ：他の人もわかりましたか。横の線の選び方によって、縦の線として選ぶことのできる本数が変わっていますね。ということは、横の線の選び方に応じて縦の線の選び方を考えていけば、長方形の数を求めることができるのではないでしょうか。

この後、生徒とともに、解法パターン６（事前に予想した【解答例３】）を考えた。生徒は、１つ１つ納得しながら長方形の数を求めていた。誤った解答であったにもかかわらず、その考え方を使って、正答にたどり着けたことは、多くの生徒にとって意外だったようである。図形の分割や変形による解法を考えた生徒にとっては､「全く間違った考えをしたのではなく、そこからもう少し考えればよかったんだ。」という気持ちになったようである。

⑤確認問題への取組

最後に、ワークシートの７の確認問題に取り組ませた。面積で分類して数えていた生徒もいたが、ほとんどの生徒が、最後に考えた解法で問題に取り組んでいた。今まで学んだ様々な解法の中から、この図形に適した解法を選択できていた。前回の問題において、左右対称であることを使って、補集合を除く解法を考えた生徒も、「これは左右対称ではないし、計算が大変そうだったので、最後に考えた解法でやってみました。」と答えていた。最後に、「正答にたどり着く解法は決して１通りではないから、数えたり、書き出したり、樹形図を描くなどして、その状況を把握し、取り組むことが大切である。」ということを強調し、授業を終わりにした。

７　確認問題
下の図の中に長方形はいくつあるか。

３．今後の課題

従来、場合の数の授業では、授業が進むにつれて、「これは、順列なのか、組合せなのか」といった短絡的な思考を求めることが多かった。しかし、授業者自身がこのような意識で授業を進めれば、生徒は自ずとその意識に染まっていく。今回の問題に取り組ませたときも、最初は、「順列か、組合せか」と考える生徒が多かった。問題を見たときに、「どういう構造をしているんだろう」と考える生徒はごくわずかであった。

以上のことを改善するためには、数えたり、書き出したり、樹形図を描くなどの活動が重要であることを授業者が意識するとともに、普段の授業の中でも、問題の構造を考える習慣をつけさせる必要がある。そして、時には今回の取組のように、いろいろな考え方を検討する時間を設定することが大切である。もちろん、扱う問題を十分に吟味し、順列、組合せだけで解決できる問題ではなく、あまり複雑ではないが、多様な解法が考えられる問題であることが望ましい。

今回の取組では、次の２点について大きな効果があった。１つは、数えたり、書き出したり、樹形図を描くなどの活動の重要性を生徒が実感できたことである。もう１つは、多様な解法を授業者が一方的に紹介するのではなく、生徒の解法を生かして、全員で考えていくことによって、自分の考え方のよさ、他の考え方のよさが実感できたことである。最後の確認問題に取り組んでいた生徒は、最初に問題に取り組んでいた生徒とは明らかに違っていた。長方形を書き出して数えたり、一部分を抜き出してその状況の把握に努めたりと、問題の構造の把握に懸命に取り組んでいた。もちろん、この時間だけで十分であるとは思えない。これからの取組が、今回芽生えた力をさらに伸ばしていくこととなる。

一方、今回の取組では、生徒のすばらしさを実感することもできた。準備した解法以外の解法を思いついた生徒、地道に数えた生徒など、頭が下がる思いである。また、普段は、講義形式の授業が多く、意見を発表させる場面が少なかったが、機会を与えれば、十分に考えを述べることができることも、改めて認識することができた。これらの生徒の芽を摘むことなく、さらに伸ばしていくためにも、可能な限り多くの生徒の考え方、意見を有効に取り入れた授業づくりをしていく必要がある。

引用・参考文献

・国立教育政策研究所教育課程研究センター　　平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査報告書