

〈指導事例集〉

数 学 科

数学科の研究の概要	85
数学的活動の充実と評価について	86
指導事例 1 2 次関数「2 次関数とそのグラフ」における指導と評価	91
指導事例 2 2 次関数「2 次関数の値の変化」における指導と評価	100
指導事例 3 図形と計量「三角比と図形」における指導と評価	109

数学科の研究の概要

高等学校数学科の教科指導の質的向上を図るためには、「数学的活動を充実させること」と「評価を生かすこと」が重要である。

授業の中に数学的活動を取り入れることによって、生徒に数学への興味や関心を喚起しつつ、数学的に考えることの意味や大切さを理解させることが可能となる。そして、その数学的活動を充実させるためには、活動のねらいや生徒に身に付けさせたい能力を教師自身がはっきり認識しておくことが必要である。さらに、数学的活動の様子を教師が的確に捉えることによって、指導の改善に生かすことができる。

また、生徒の数学を学ぼうとする意欲を向上させ、態度を育てるためには、生徒自身が授業を振り返ることによって、数学的活動を通して習得した内容をきちんと認識することが大切である。

これらのことを踏まえて、以下のことに取り組んだ。

- 1 指導目標を明確にした単元の指導計画・評価計画の作成
- 2 指導目標を達成させるための数学的活動の取組とその評価
- 3 自己学習を促すための自己評価の活用

事例は、数学Ⅰにおける2次関数（2次関数とそのグラフ、2次関数の値の変化）、図形と計量（三角比と図形）について作成したものである。なお、各事例における単元の指導計画・評価計画（目標、評価規準等）、授業展開例、ワークシート、自己評価シート等は、実践した学校の生徒の実態に応じて作成したものである。

<研究協力員>

栃木県立宇都宮南高等学校	教 諭	池 邊 直 哉
栃木県立栗野高等学校	教 諭	大 橋 房 枝
栃木県立日光高等学校	教 諭	酒 徳 敦 子

<研究委員>

栃木県総合教育センター	研究調査部	指導主事	吉 川 孝 昭
栃木県総合教育センター	研 修 部	指導主事	植 木 淳

<参考文献>

高等学校学習指導要領解説編 数学編 理数編（平成11年12月 文部省）
中等教育資料 平成14年4月号～平成15年4月号（文部科学省教育課程課編集 ぎょうせい）
高等学校における評価規準、評価方法等の研究開発について（中間整理）
（平成15年9月 国立教育政策研究所）

数学的活動の充実と評価について

1 指導目標を明確にした単元の指導計画・評価計画の作成

(1) 単元の目標の設定

単元の目標は、学習指導要領やその解説に記述されている内容のまとまりごとの目標と指導内容をもとに、各学校の生徒の実態を考慮して設定することになる。例えば、下の図は、学習指導要領で示されている「2次関数」の目標をもとに設定した「2次関数とそのグラフ」の目標である。

＊内容のまとまり…多くの教科書では、章に該当するものであり、事例では、「2次関数」、「図形と計量」に相当する。

単 元 ……多くの教科書では、節に該当するものであり、事例では、「2次関数とそのグラフ」、「2次関数の値の変化」、「三角比と図形」に相当する。

単元の目標の例（指導事例1から）

「2次関数」の目標(学習指導要領から)

2次関数について理解し、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識するとともに、それを具体的な事象の考察や2次不等式を解くことなどに活用できるようにする。



「2次関数とそのグラフ」の目標

具体的な事象と関連付けて、関数概念の理解を深め、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できるようにする。

また、2次関数について、表、式、グラフなどを用いてその関係を考察させ、2次関数について理解を深めるとともに、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフをかくことができるようにする。

(2) 単元の評価規準の作成

目標に準拠した評価では、目標を分析し、それに照らして、評価の4観点ごとにそれぞれの具体的な内容について評価規準を作成し、評価することになる。評価規準とは、単元の目標の達成状況を示したものである。また、評価していく際には、一つの観点到に偏らないようにすることが大切である。

評価規準を作成するためには、数学科の4観点とその趣旨について十分理解する必要がある。数学科の目標は、「関心・意欲・態度」、「数学的な見方や考え方」、「表現・処理」、「知識・理解」の四つの部分からなっている。この四つの部分が評価の4観点となる。

以下に数学科の目標とその構造及び評価の4観点の趣旨を示す。

○数学科の目標とその構造

数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、…	知識・理解
事象を数学的に考察し処理する能力を高め、…	表現・処理
数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに、…	数学的な見方や考え方
数学的な見方や考え方のよさを認識し、…	数学的な見方や考え方
	関心・意欲・態度
それらを積極的に活用する態度を育てる。	関心・意欲・態度

○数学科の4観点の趣旨

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
数学的活動を通して、数学の論理や体系に関心をもつとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを事象の考察に積極的に活用しようとする。	数学的活動を通して、数学的な見方や考え方を身に付け、事象を数学的にとらえ、論理的に考えるとともに思考の過程を振り返り多面的・発展的に考える。	事象を数学的に考察し、表現し処理する仕方や推論の方法を身に付け、よりよく問題を解決する。	数学における基本的な概念、原理・法則、用語・記号などを理解し、知識を身に付けている。

各事例では、内容のまとまりごとの目標とその評価規準をもとに、国立教育政策研究所が平成15年9月に発表した「高等学校における評価規準、評価方法等の研究開発について（中間整理）」を参考にして、単元の目標から評価規準を作成した。

以下に、「2次関数」の評価規準、「2次関数とそのグラフ」の評価規準を示す。

○「2次関数」の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
2次関数とそのグラフや値の変化に関心をもつとともに、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識し、2次関数を活用しようとする。	関数的な見方や考え方を身に付け、具体的な事象について関数を用いて考察することができる。	関数を用いて数量の変化を表現し、関数の値の変化を調べることができる。	2次関数とそのグラフ及び関数の値の変化について理解し、基礎的な知識を身に付けている。



○「2次関数とそのグラフ」の評価規準（指導事例1から）

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
㉑ 具体的な事象の中にある2つの数量関係に関心をもち、関係を調べようとする。 ㉒ 2次関数のグラフの相違点に関心をもち、その違いを調べようとする。	㉑ 2つの数量関係を表、式、グラフを用いて考察することができる。 ㉒ 2次関数のグラフの特徴を考察することができる。	㉑ 2つの数量関係を表、式、グラフを用いて表現することができる。 ㉒ 2次関数のグラフの位置関係、グラフと式との関係を把握し、グラフをかくことができる。2次関数の式を一般形から標準形に変形することができる。	㉑ 関数の定義や関数のグラフの意味を理解している。 ㉒ グラフの平行移動について理解している。

(3) 単元の授業計画の作成

授業計画には、各時間の学習活動、単元の評価規準とのかかわり、評価方法を記載した。単元の評価規準とのかかわり、評価方法を示すことによって、各時間の指導目標が明確になり、学習活動で培いたい能力を焦点化することができる。

単元の授業計画の例（指導事例1から）

時間	学 習 活 動	評価規準とのかかわり	評価方法
第1時間	○通話時間と電話料金の関係を表、グラフを用いて表現する。 ○水槽に注ぐ水の量と時間の関係を表、式、グラフを用いて表現する。 ○具体的な事象の中にある2つの数量関係を表、式、グラフを用いて考察する。	㉑、㉒、㉓	関数関係にあるものについて、課題レポートを提出させ、取組の状況を確認する。
第2時間	○1次関数をグラフを用いて表現することによって、グラフと式の間を関係し、1次関数のグラフをかく。 ○具体的な関数の値($f(a)$)を求める。 ○正方形の1辺の長さとの面積の関係を表、式、グラフを用いて表現する。	㉑、㉒	表、式、グラフを対比させ、それぞれの表現のよさを発表させ、関心の状況を把握する。

(4) 評価方法の設定

評価方法については、観察、面接、質問紙、レポート、テストなどをどのように評価に取り入れ活用するかということが大きな課題である。事例作成の際に配慮したことは、どのように評価場面を設定するかである。数学的活動を授業に積極的に取り入れることによって、多彩な評価場面を設定することが可能となり、生徒の学習状況を的確に把握し、学力向上に役立てることができると考えた。

(5) 評価について

目標に準拠した評価では、4観点ごとに評価していくことになる。事例では、「数学的な見方や考え方」、「表現・処理」、「知識・理解」については、各時間において評価することとし、「関心・意欲・態度」については、単元全体を通して評価することとした。

数学的活動が中心となる時間における「数学的な見方や考え方」、「表現・処理」についての評価は、発問に対する反応、机間指導を中心とする観察とともに、ワークシートと自己評価シートによって、各生徒の状況の把握に努めた。各生徒のワークシートと自己評価シートを有機的に結び付けることによって、授業中における生徒の考え方や表現方法が読み取れると考えた。

(6) 評価問題の工夫

数学科におけるペーパーテストは、これまで「表現・処理」の観点に偏りがちであったといわれている。目標を分析し、それに照らして評価規準を作成し評価するためには、その評価規準をもとに、「知識・理解」、「数学的な見方や考え方」の観点にかかわる問題も出題するよう改善する必要がある。ところが、実際に、定期試験等で「数学的な見方や考え方」の問題を出題することは、すぐにできるものではない。「数学的な見方や考え方」にかかわる問題としては、以下のようなものが考えられる。

- ・定理などが構成されるときの中心的な考え方を問うこと
- ・定理の条件を変えてどのようなことが成り立つか問うこと
- ・問題の解法を示しその中心となる考えを問うこと
- ・解法の問題点を問うこと

ただし、「数学的な見方や考え方」の評価は、ペーパーテストだけでなく、日頃の授業での観察や面接、あるいはレポートなどを積極的に活用する必要がある。

各事例におけるペーパーテストは、授業後の小テストとして作成した。特に数学的活動を取り入れた授業後に行う小テストでは、「数学的な見方や考え方」にかかわる出題が比較的容易であるとともに、数学的活動を通して培われる力を評価し、数学的活動の改善にもつながると考えた。

2 指導目標を達成させるための数学的活動の取組とその評価

(1) 数学的活動

数学的活動を充実させるためには、生徒の疑問や意見（予想）、誤りを生かし、生徒一人一人が与えられた課題を解決すべきものとして自覚することが必要である。そうすることによって、生徒間あるいは生徒・教師間の対話や討論が活発になり、論理的な思考力や表現力が育まれ、生徒が楽しみながら授業に参加できるのではないだろうか。各事例では、このような視点に立って、数学的活動に取り組んだ。

(2) ワークシートの作成について

数学的活動を取り入れた授業では、発問に対する反応、机間指導等だけでは、十分に生徒の学習状況を把握することができない。そこで、自分で気付いたこと、考えたこと、友達が気付いたこと等が記入できるワークシートを配付し、回収することとした。その結果、学習の振り返りを行ったとき、自分がどこまで気付いたかが明確になり、学習内容の定着につながると考えた。

ワークシートの例（指導事例1から）

いろいろな 2 次関数のグラフと特徴	ワークシート No. 2	1年	組 名前 _____
①～④の 2 次関数について、ワークシート No.1 から気付いたことを書き出してみよう。			

自分が気付いたこと	友達が気付いたこと

3 自己学習を促すための自己評価の活用

生徒の学習意欲の低下、家庭学習時間の減少の原因の一つとして、「何を学んだのかが分からない」とか「何を自己学習で補えばいいの分からない」といったことがある。そこで、授業で学習した「数学的な見方や考え方」、「表現・処理」の観点について、自分に定着していることと不足していることを確認させるために自己評価を取り入れた。自己評価シートの評価項目は、「授業は面白かったか」、「授業に積極的に参加したか」等、授業についての情意的な項目を除き、学習内容の達成状況を確認することができる認知的な項目とした。この自己評価シートの蓄積は、学習の振り返りに役立つものにもなる。また、教師が、自己評価シートから生徒の学習状況を把握することは、目標に準拠した評価の信頼性を向上させるとともに、教師の生徒を見る目を鍛えることにもつながる。

生徒に自己評価をさせると、的確に評価する者もいるが、かなり甘い評価をする者、逆に厳しい評価をする者もいる。生徒がよりよく成長するためには、自分自身を的確に評価できるようになることが必要である。的確に評価できるようになるためには、以下の3点が大切である。

- ・教育活動の中に自己評価を行う場面をできるだけ多く設定すること
- ・十分に達成されていない内容に対して、何を学習すればよいか生徒に示すこと
- ・生徒の自己評価と教師の評価とを適宜つきあわせ、その都度、確認していくこと

この3点を繰り返すことは、生徒と教師の信頼関係を構築することにもつながる。今回の事例では、ワークシートと自己評価シートを有機的に結び付けることによって、生徒の自己評価能力・自己学習力の向上につながろうと考えた。このことは、教師による生徒の学習状況の的確な把握と指導の改善にもつながると考えられる。

2 次関数のグラフ 数学的活動の自己評価No.1		平成〇〇年〇月〇〇日（〇）
1 年 組 名前 _____		
学習課題	数学的な見方や考え方	表現・処理
【課題1】対応表を作成し、グラフをかこう。		☐ 対応表をつくることができた。 ☐ 点をプロットしてグラフをかくことができた。
【課題2】①～④のそれぞれのグラフについて、グラフの凸、頂点の座標、軸の方程式を読みとりまとめてみよう。		☐ グラフの凸、頂点の座標、軸の方程式をグラフから読みとることができた。
【課題3】①～④の2次関数について、気付いたことを書き出してみよう。	☐ グラフの概形が全て同じであることに気付いた。 ☐ ②～④のグラフが①のグラフを移動したものであることに気付いた。	☐ 気付いたことを自分の言葉で表現することができた。

4 今回の取組を通して

数学的活動を充実させるためには、単元の中のどの場面で、どのような活動をさせ、どのような力を育てるのかを明確にすることが大切である。各事例では、教師が評価規準、数学的活動のねらいを明確に設定することによって、生徒自身にもその時間の目標が明確になり、主体的に学習活動に取り組むことができた。単元の指導計画・評価計画の作成は、「教えすぎ」、「評価しすぎ」を改善し、数学的活動をより一層充実させるものとなった。また、数学的活動のねらいが明確になることによって、適切な課題が設定され、生徒間あるいは生徒・教師間の討論が活発になり、成果を得ることができた。

評価については、単元の評価規準、各時間の評価方法を明確にした。特に、ワークシートと自己評価シートを有機的に結び付けることによって、生徒の数学的活動の様子を教師が的確に捉えることができた。従来、「分かっていると思っているが実は分かっていない生徒」、「できているのに本質は分かっていない生徒」がいることを教師は実感してきた。各事例では、生徒ごとにつまずきの原因や程度が明確になり、個々の生徒への指導やその後の授業の改善に生かすことができた。

自己評価については、自己評価シートの項目を学習内容の達成状況を確認することができる認知的なものとしたことによって、生徒が自らの学習状況に気付き、自分を見つめ直すきっかけとなった。また、十分に達成されていない内容に対して、何を学習すればよいか生徒に示すことによって、その後の学習で補うポイントが把握できたようである。しかし、自己評価の頻度については問題が残る。毎時間、自己評価させ、その結果を教師がきちんと受け止め各生徒に返すことは、時間的に無理がある。どの場面で自己評価させることが有効であるかを考えていかなければならない。

各事例では、数学的活動の充実と評価を生かすことによって、指導と評価の一体化を図ることができた。しかし、さらに一歩進めるためには、以下のことが課題として残っている。今後、さらに研究・検討を重ねていく必要がある。

- ・指導目標の達成状況を適切に把握するための各時間における評価規準の作成
- ・個に応じた指導（習熟度別学習、少人数学習等）における評価
- ・定期試験のペーパーテストの改善

指導事例 1

2 次関数「2 次関数とそのグラフ」における指導と評価

I 単元の指導計画・評価計画

1 単元の目標

具体的な事象と関連付けて、関数概念の理解を深め、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できるようにする。

また、2 次関数について、表、式、グラフなどを用いてその関係を考察させ、2 次関数について理解を深めるとともに、2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフをかくことができるようにする。

2 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
㉑ 具体的な事象の中にある 2 つの数量関係に関心を持ち、関係を調べようとする。 ㉒ 2 次関数の表、式、グラフの相違点に関心を持ち、その違いを調べようとする。	㉑ 2 つの数量関係を表、式、グラフを用いて考察することができる。 ㉒ 2 次関数のグラフの特徴を考察することができる。	㉑ 2 つの数量関係を表、式、グラフを用いて表現することができる。 ㉒ 2 次関数のグラフの位置関係、グラフと式との関係を把握し、グラフをかくことができる。 ㉓ 2 次関数の式を一般形から標準形に変形することができる。	㉑ 関数の定義や関数のグラフの意味を理解している。 ㉒ グラフの平行移動について理解している。

* 2 つの数量関係には、具体的な事象、1 次関数、2 次関数を含む。

3 単元の授業計画（学習活動と評価規準のかかわり）

時間	学 習 活 動	評価規準とのかかわり	評価方法
第 1 時間	○通話時間と電話料金の関係を表、グラフを用いて表現する。 ○水槽に注ぐ水の量と時間の関係を表、式、グラフを用いて表現する。 ○具体的な事象の中にある 2 つの数量関係を表、式、グラフを用いて考察する。	㉑、㉒、㉓	関数関係にあるものについて、課題レポートを提出させ、取組の状況を確認する。
第 2 時間	○1 次関数をグラフを用いて表現することによって、グラフと式の間を関係し、1 次関数のグラフをかく。 ○具体的な関数の値 $f(a)$ を求める。 ○正方形の 1 辺の長さとの面積の関係を表、式、グラフを用いて表現する。	㉑、㉒	表、式、グラフを対比させ、それぞれの表現のよさを発表させ、関心の状況を把握する。
第 3 時間 第 4 時間	○関数 $y = ax^2$ ($a = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$) について、対応表を作成し、そのグラフを点をプロットすることによってかく。 ○グラフを観察し、2 次関数のグラフの特徴を考察する。	㉒、㉓	グラフの特徴について発表させ、理解の状況を把握する。

第5時間 第6時間 (実践例 の授業)	○ $y = 2x^2$ 、 $y = 2x^2 + 3$ 、 $y = 2(x - 4)^2$ 、 $y = 2(x - 3)^2 + 4$ について、対応表を作成し、グラフをかく。 ○ 四つの2次関数の表、式、グラフの相違点について考察する。 ○ 平行移動によってそれぞれのグラフの位置関係を考察する。	㉒、㉓、㉔	ワークシート、質問紙、机間指導、小テストにより、グラフへの関心の状況、考え方を把握する。
第7時間 第8時間	○ $y = ax^2 + q$ 、 $y = a(x - p)^2$ 、 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフの特徴を考察し、それぞれのグラフをかく。	㉔、㉕	机間指導、小テストにより定着の状況を把握する。
第9時間 第10時間	○ $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを $y = a(x - p)^2 + q$ の形に変形することによってグラフをかく。	㉔、㉖	机間指導、小テストにより定着の状況を把握する。

II 数学的活動の実践例

1 本時（第5、6時間目）の目標（評価規準）

- 2次関数の表、式、グラフの相違点に関心を持ち、その違いを調べようとする。(㉒)
- 2次関数のグラフの特徴を考察することができる。(㉓)
- 2次関数のグラフの位置関係、グラフと式との関係を把握し、グラフをかくことができる。(㉔)

2 本時の数学的活動とそのねらい

形式的に2次関数のグラフの特徴を捉えるのではなく、自ら課題意識を持って取り組めるように、 $y = ax^2$ 、 $y = ax^2 + q$ 、 $y = a(x - p)^2$ 、 $y = a(x - p)^2 + q$ の形の2次関数のグラフの相互の関係について、ワークシートを用いて発見・考察し、自分の言葉で表現する。また、自分では気付かないことを他の生徒から得ることによって、「与えられた知識」ではなく「自分たちで発見した性質」として捉えさせる。

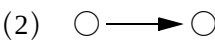
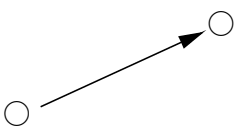
3 本時の評価

グラフの特徴を考察することについては、机間指導による観察、発言内容とともに、ワークシート、自己評価シートから、どのような考察を行っていたのかを把握する。また、他の生徒から聞いた意見をどのように把握しているのかを確認する。グラフの位置関係、グラフと式との関係を把握し、グラフをかくことについては、ワークシート、自己評価シートとともに、小テストによって習得の状況を把握する。

4 授業展開例

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・ 2次関数のグラフの作成と視覚的な特徴の把握	課題1 ————— 次の関数について対応表を作成し、グラフをかこう。 ① $y = 2x^2$ ② $y = 2x^2 + 3$ ③ $y = 2(x - 4)^2$ ④ $y = 2(x - 4)^2 + 3$	ワークシートNo.1の利用 ・ ②～④の2次関数については、事前に展開するなどして2次関数であることだけを確認しておく。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・それぞれの2次関数のグラフの特徴の把握 ・様々な視点からの2次関数の考察と相互関係の把握 ・特徴の一般化	○与えられた x の値を式に代入し対応表を完成させ、それを利用して①～④のグラフをかく。 ○①～④のグラフを色を変えてかかせることにより、グラフの違いを把握しやすいように工夫する。 対応表やグラフに何か特徴的なことはないだろうか。気付いたこと、気になること、何かあったら欄外に自分の言葉でメモしておこう。 ・②～④のグラフから、頂点の座標は(0, 0)とは限らないことを実感する。 課題2 ①～④のそれぞれのグラフについて、グラフの凸、頂点の座標、軸の方程式を読み取り表にまとめてみよう。 ○グラフを見て、グラフの形や頂点の座標を考えるとともに、グラフ上での頂点の位置関係を確認する。 課題3 ①～④の2次関数について、ワークシート No.1 から気付いたことを書き出してみよう。 グラフを見て気付いたこと、グラフと表を比べて気付いたこと、各式と頂点の座標の関係など、どんなことでもいいから見つけてみよう。 【予想される生徒の反応】 ・グラフの形が全て同じで、位置が異なる。 ・②の頂点は(0, 3)、③の頂点は(4, 0)、④の頂点は(4, 3)になっている。 ・頂点の座標の値と、式に表れている数値が一致している。 ・②は①を縦(上)に、③は①を横(右)に、④は①を斜め(斜め上)に移動したものである。 ○各自の意見の発表。 ・自由に発言することによって、議論を深める。 ・同じ内容でもいろいろな表現の方法があることを実感する。 ○グラフの概形について ①、②、③、④のグラフをそれぞれ比較し、形も大きさも変えずに移動していること確認する。 →グラフの概形は、a の値によって決定する。	・ y の値はグラフをかき始める前に確認する。 ・どんな小さな発見でもメモをとるよう指示する。 ワークシートNo.1の利用 ワークシートNo.2の利用 ・自分の言葉で表現することによって気付いたことを明確にさせる。 ・机間指導によって、生徒の状況を把握するとともに、表現できない生徒には助言を与える。 ・生徒から多くの意見が出ない場合には、「①と②のグラフの関係は？」などと比較するものを与えて再度考えさせる。 ・友達が発表したことを書き加えさせる。 ・考察した内容を一般化することにより2次関数の理解を深める。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・ 本時のまとめと自己評価	○グラフの平行移動について それぞれのグラフの位置関係はどのように表現することができるだろうか。 【予想される生徒の反応】 ・ ②は、①を縦に動かした。 ・ ③は、①を横に動かした。 ・ ④は、①を斜めに動かした。 ・ ④は、②を横に動かした。 ・ ④は、③を縦に動かした。 課題 3 次の移動は、どのように表現したらよいだろうか。 (1)  (2)  (3)  ・ 図形の移動の表現を一般化するために座標軸を用いて、表現を工夫する。 ・ 横への移動 → x 軸方向への平行移動 ・ 縦への移動 → y 軸方向への平行移動 ・ 斜めへの移動 → x 軸方向、y 軸方向への平行移動 ・ ②、③、④のグラフは、①のグラフをどのように平行移動したものであるか発表する。 ○グラフの移動と式、頂点の座標、軸の方程式との相互の関係を確認し、グラフの平行移動について理解する。 → $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは、$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動したもの。頂点の座標は (p, q)、軸の方程式は $x = p$ となる。 ○自己評価シートの記入	・ どのように表現すれば他の人に伝わるか考えさせ、発表させる。 ・ ①を基準にして考えることの有用性に気付かせる。 ・ 「斜め」という言葉では明確に移動を表現することができないことを体感させ、x 軸方向と y 軸方向への移動を組み合わせることに気付かせる。 ・ 相互の関係を確認することにより、これまでに考察した内容と関連付ける。 自己評価シートの利用

5 配付資料等（ワークシート、自己評価シート）

(1) ワークシート No.1

いろいろな2次関数のグラフと特徴
ワークシートNo.1
1年
組
名前

次の①～④の2次関数のグラフをかき、どのような関係があるか調べてみよう。

① $y = 2x^2$
② $y = 2x^2 + 3$
③ $y = 2(x - 4)^2$
④ $y = 2(x - 4)^2 + 3$

1. 対応表を作成し、グラフをかこう。

2次関数	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
① $y = 2x^2$											
② $y = 2x^2 + 3$											
③ $y = 2(x - 4)^2$											
④ $y = 2(x - 4)^2 + 3$											

2. それぞれのグラフについて、グラフの凸、頂点の座標、軸の方程式を読み取り表にまとめてみよう。

2次関数	グラフの凸	頂点の座標	軸の方程式
① $y = 2x^2$			
② $y = 2x^2 + 3$			
③ $y = 2(x - 4)^2$			
④ $y = 2(x - 4)^2 + 3$			

Point

(2) ワークシート No.2

いろいろな2次関数のグラフと特徴
ワークシートNo. 2
1年
組
名前

①～④の2次関数について、ワークシート No.1 から気付いたことを書き出してみよう。

自分が気付いたこと	友達が気付いたこと

(3) 自己評価シート

2次関数のグラフ 数学的活動の自己評価No.1		平成〇〇年〇月〇〇日 (〇)
		1年 組 名前
学習課題	数学的な見方や考え方	表現・処理
【課題1】対応表を作成し、グラフをかこう。		☐ 対応表をつくることができた。 ☐ 点をプロットしてグラフをかくことができた。
【課題2】①～④のそれぞれのグラフについて、グラフの凸、頂点の座標、軸の方程式を読みとりまとめてみよう。		☐ グラフの凸、頂点の座標、軸の方程式をグラフから読みとることができた。
【課題3】①～④の2次関数について、気付いたことを書き出してみよう。	☐ グラフの概形が全て同じであることに気付いた。 ☐ ②～④のグラフが①のグラフを移動したものであることに気付いた。	☐ 気付いたことを自分の言葉で表現することができた。
【課題4】図形の移動を表現してみよう。	☐ 斜めに平行移動することを横と縦の平行移動として表されることが分かった。	☐ 図形の平行移動を自分の言葉で表現することができた。 ☐ グラフの平行移動を表現することができた。
【まとめ】2次関数のグラフの特徴についてまとめてみよう。	☐ グラフの概形がaの値によって決定されることに気付いた。 ☐ ②～④のグラフが①のグラフを平行移動したものであることに気付いた。 ☐ グラフの平行移動、頂点の座標、軸の方程式と式との関係に気付いた。	☐ グラフの平行移動、頂点の座標、軸の方程式を式から求めることができた。

*今日の授業で印象に残っていることを書いてください。

III 指導と評価の改善

1 評価について

(1) 生徒のワークシートから

ワークシートを見ると、生徒が積極的に2次関数の表、式、グラフの共通点、相違点を探し出し、自らの言葉で表現しようとしていることが分かった。特に、学習が進むにつれて、表現が数学的になっていくことが読み取れる。

グラフの相違点について関心をもつことについては、多くの生徒が対応表とグラフから、① $y = 2x^2$ と ③ $y = 2(x-4)^2$ のグラフの概形が同じであり、② $y = 2x^2 + 3$ と ④ $y = 2(x-4)^2 + 3$ のグラフの概形が同じであることに気付いていた。しかし、その2つのグループ同士が同じであることに気付いた生徒は少なかった。これは、対応表に表れる数字によるものであると考えられる。一人の生徒から、「同じグラフである。」との発言があったときには、多くの生徒が納得し、その違いを懸命に表現しようとしていた。この場面では、適切な言葉が見つからず、苦労していたようである。

グラフの位置関係については、適切な表現方法を身に付けるにしたがって、考察にも深ま

りが見られた。特に、斜めに平行移動する場面では、座標平面上で考えることの利点に気付いたことは望ましいことである。また、グラフの特徴の一般化の場面では、自分たちで発見した性質として特徴の認識が深まり、知識を整理し明確にすることができていた。

以下に2名の生徒のワークシートに書かれていた表現を示す。

○生徒 A のワークシートから読み取れる表現の変化

課題 1 (第 5 時限)	課題 3 (第 6 時限)	まとめ (第 6 時限)
・①と③の式は答えが偶数で、②と④の式の答えは奇数になっている。(対応表から) ・4つの式には「$y = 2x^2$」が含まれている。(式から)	・①～④のグラフは全て下に凸で、全て幅が同じ。	・$y = ax^2$のaの値で、グラフの形が決まる。
・①と③のグラフは位置が違おうけど、同じグラフ。形が同じ。(グラフから) ・②と④のグラフは位置が違おうけど、同じグラフ。形が同じ。(グラフから)	・②は①を上3動かしたものの。式でも3足してあるし、表でも3増えている。 ・③は①を右に4動かしたものの。式でも4足してあるし、表でも横にずれている。 ・④は②を上3動かしたものの。式でも3足してあるし、表でも3増えている。	・②は①をy軸方向に3だけ平行移動したものの。 ・③は①をx軸方向に4だけ平行移動したものの。 ・④は①をx軸方向に4、y軸方向に3だけ平行移動したものの。
	・式と頂点の座標には、4、+3、0など関係がある。軸の方程式と頂点のx座標が同じ。	・$y = a(x-p)^2 + q$のグラフは、頂点が(p, q)で軸の方程式が$x = p$。
・式の答えが奇数だと、頂点が0じゃなくなる。(式、グラフから)		

○生徒 B のワークシートから読み取れる表現の変化

課題 1 (第 5 時限)	課題 3 (第 6 時限)	まとめ (第 6 時限)
・みんなグラフが下に凸である。 ・グラフの開き方が全て同じ。(グラフから) ・①と③、②と④の+の数字が同じ。(対応表から)	・①～④の放物線は、全て下に凸である。	・aの値がグラフの開き方を決める。(形を決めている)
・②は①に3が足されているが、軸は変わっていない。(グラフ、対応表から) ・④は③に3が足されている。(グラフから)	・グラフから②は①を縦に3動かしたものであることが分かる。表では、3足されている。 ・グラフから④は③を縦に3動かしたものであることが分かる。表でも、3足されている。	・$y = a(x-p)^2 + q$のグラフは、$y = ax^2$のグラフをx軸方向にp、y軸方向にqだけ平行移動したものの。
	・頂点の座標は式に表れている数字と同じ数字。	・$y = a(x-p)^2 + q$のグラフの頂点は(p, q)、軸の方程式は$x = p$である。

(2) 自己評価シートの活用

授業の中で身に付ける力を「数学的な見方や考え方」、「表現・処理」に分けて表記した

自己評価シートを配付し、確認させた。

自己評価シートから気付くことは、「表現・処理」については、多くの生徒が満足いく回答をしているが、「数学的な見方や考え方」については、十分でないと回答した生徒が目立った。しかし、これらの生徒の中には、ワークシートからは十分把握できていることが読み取れる生徒もいる。また、ワークシートを見ると達成状況が十分でないが、自己評価シートには達成できたとしている生徒がいた。これらの生徒に対しては、ワークシート、自己評価シートの双方から読み取れる状況を適切にコメントとして書き入れ、返却することによって、次への学習へとつなげた。

生徒にとっては、慣れないこともあるが、2つの観点の区別が付きにくい面があったようである。このことについては、繰り返し実施することによって、把握できるようになると考えられる。

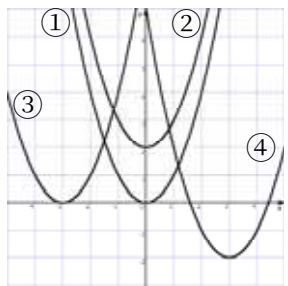
(3) 評価問題の工夫

目標の達成状況を把握するために、小テストを実施した。

【問題 1】 右の図の④のグラフの特徴を言葉で表現しなさい。

【問題 2】 問題 1 の①～④のグラフは同じ形である。
適当な二つのグラフを選び、その位置関係について、下の空欄を埋めなさい。

のグラフは のグラフを
 方向に 、 方向に だけ平行移動したものである。



【出題のねらい】

問題 1 は、2 次関数のグラフの特徴をどの程度、把握し、表現することが出来るかどうかを問う問題である。通常、「頂点は？軸は？…」と問うことが多いが、自由に書かせることによって、数学的に表現することの有用性をどの程度認識しているか確認することができる。また、問題 2 は、2 次関数のグラフの位置関係を平行移動を用いて考察し、表現することができるかどうかを問う問題である。

2 指導と評価の改善について

実践を通して、感じたことを箇条書きにした。

数学的活動を充実させることについて

○生徒にとって

- ・発表、議論の機会をもつことによって、自分の言葉で表現したものをできるだけ分かりやすく友達に説明しようと努力する姿が見られた。
- ・自分の考えを友達に伝えることの難しさを実感することによって、数学的な表現の有用性を実感することができたようである。
- ・発言の機会が増えたことによって、友達から認められることの喜びを実感し、また、他の友達の考え方のよさに気付くことができたようである。

○教師にとって

- ・ワークシートを工夫することによって、生徒の思考のプロセスを見ることができた。従来は、ペーパーテストによって解答のプロセスを見ることが中心であったが、性質を見つけ、まとめるときの過程を見ることができた。
- ・ペーパーテスト以外で生徒の学習状況を評価する場合、生徒が学習する過程を適切に見定める必要がある。そのためには、生徒自身が考察し、学んでいく場面を設定しないと評価することは難しい。
- ・数学の授業では、考えをまとめたり、演習する時間等を取ることはもちろん大切なことである。しかし、生徒に数学への興味や関心を喚起し、数学的に考えることの意味を実感させるためには、単元の中心的な場面において数学的活動を取り入れていく必要がある。

評価を生かすことについて

- ・生徒の思考のプロセスを知ることは、教材の選択、授業の進め方等において、非常に参考になる。生徒の考え方を生かした授業を構築していくことができる。
- ・生徒のワークシート、自己評価シートを有機的に結び付け、コメント等を返すことによって、生徒の学習に対する不安を解消し、意欲を喚起することにつながったようである。
- ・単元の目標、授業計画を立て、各時間の指導目標を明確にすることは、生徒自身にも、その時間に学ぶことが明確になり、効果的であった。

指導事例 2

2 次関数「2 次関数の値の変化」における指導と評価

I 単元の指導計画・評価計画

1 単元の目標

2 次関数のグラフを通して、関数の値の変化を考察し、関数の最大値・最小値を求めることができるようにするとともに、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できるようにし、それらを具体的な事象の考察に活用できるようにする。

また、2 次関数の式、グラフの関係を考察することを通して、与えられた条件を満たす放物線をグラフとする 2 次関数の式を求めることができるようにする。

2 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
㉑ 2 次関数の値の変化を、グラフを用いて捉えようとする。 ㉒ 具体的な事象の考察に 2 次関数の最大・最小の考えを活用しようとする。 ㉓ 与えられた条件を満たす放物線をグラフとする 2 次関数を決定するための条件を調べようとする。	㉑ 2 次関数の値の変化について、グラフを用いて考察することができる。 ㉒ 具体的な事象の考察に 2 次関数の考えを活用することができる。 ㉓ 与えられた条件を満たす放物線をグラフとする 2 次関数を決定するための条件を考察することができる。	㉑ 2 次関数の最大値・最小値をグラフを用いて求めることができる。 ㉒ 与えられた条件を満たす放物線をグラフとする 2 次関数の式を求めることができる。	㉑ 2 次関数の最大値・最小値の意味と、その求め方について理解している。 ㉒ 2 次関数を決定するための条件を理解している。

3 単元の授業計画（学習活動と評価規準のかかわり）

時間	学 習 活 動	評価規準とのかかわり	評価方法
第 1 時間	○関数 $y = x^2$ 、 $y = -x^2$ のグラフを利用し、値の変化の様子を考察する。 ○2 次関数のグラフをかき、その関数の最大値・最小値を求める。	㉑、㉒、㉓	机間指導により、最大値・最小値の意味を理解しているかを把握する。
第 2 時間 第 3 時間	○制限された定義域での 2 次関数の最大値・最小値を求める。	㉑、㉓	関数の値の増減について考えられることを発表させることによって、考察の状況を把握する。
第 4 時間 第 5 時間	○長さが一定である針金を折り曲げてできる長方形の面積の最大値を求める。	㉑、㉒、㉓	応用課題をレポートとして提出させ、取組状況を確認する。
第 6 時間 (実践例の授業)	○2 次関数 $y = (x - 1)^2 - 4$ のグラフの特徴を考察する。 ○グラフの特徴から 2 次関数の式を決定する。 ○2 次関数の式を決定するための条件を考察する。	㉑、㉒、㉓	ワークシート、質問紙、机間指導、小テストにより、2 次関数の決定条件の把握の状況を確認する。
第 7 時間	○様々な条件を満たす放物線をグラフとする 2 次関数の式を求める。	㉑、㉓	机間指導、小テストにより定着の状況を把握する。

II 数学的活動の実践例

1 本時（第6時間目）の目標（評価規準）

○与えられた条件を満たす放物線をグラフとする2次関数を決定するための条件を考察し、求めることができる。（A3、B3、C2）

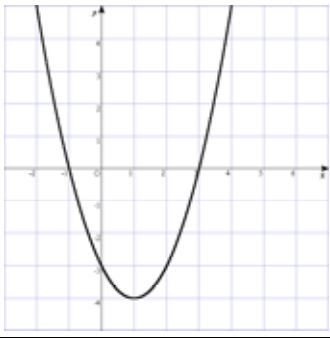
2 本時の数学的活動とそのねらい

具体的な2次関数のグラフの特徴を考察し、その特徴を数式化することによって、2次関数の式を求める。様々な特徴を取り上げることによって、2次関数を決定するためには多くの条件があることに気付かせる。

3 本時の評価

2次関数を決定するための条件の考察については、ワークシート、自己評価シートによってどのような条件に気が付き、課題に取り組んだかを把握する。また、2次関数を求めることについては、授業中の発言の内容、机間指導による観察、ワークシートとともに、小テストによって把握する。

4 授業展開例

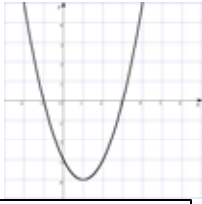
指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・2次関数のグラフの特徴の考察	今までは、2次関数の式からグラフをかいてきました。今度は、2次関数のグラフからそのグラフを表す2次関数の式を求めてみましょう。 課題1 右のグラフは、ある2次関数のグラフです。このグラフから読み取れることを言葉で表してみよう。  グラフをよく観察し、できるだけたくさんのことを見つけよう。今まで学習した内容もよく思い出して考えましょう。 【予想される生徒の反応】 ・下に凸のグラフである。 ・頂点が(1, -4)である。 ・$x = 1$に関して対称である。（軸が$x = 1$） ・y切片が-3である。 ・$x = 1$のとき、最小値-4である。 ・$y = x^2$のグラフと同じ形 ・(-1, 0)、(0, -3)、(2, -3)、(3, 0)を通る。 ・x軸と$x = -1$、$x = 3$で交わる。	ワークシートの利用 ・放物線を詳しく観察させ、できるだけ多く表現できるように促す。 ・表現することができない生徒には、前時までのノートを参考に考えさせる。 ・机間指導しながら生徒がどのような表現をしているか把握する。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・ 特徴の数式化	どのようなことが読み取れたか、発表してください。自分で見つけられなかったもの、表現の異なるものは、隣の欄に書き加えておきましょう。 課題 2 2 次関数を表す式は、$y = a(x - p)^2 + q$、$y = ax^2 + bx + c$ と表すことができました。グラフから読み取れた特徴を a、b、c、p、q の条件として表してみよう。 【予想される生徒の反応】 ・ 下に凸のグラフである。 $\rightarrow a > 0$ ・ 頂点が $(1, -4)$ である。 $\rightarrow p = 1, q = -4$ ・ $x = 1$ に関して対称である。 $\rightarrow p = 1$ ・ y 切片が -3 である。 $\rightarrow c = -3$ ・ $x = 1$ のとき、最小値 -4 である。 $\rightarrow p = 1, q = -4$ ・ $y = x^2$ のグラフと同じ概形 $\rightarrow a = 1$ ・ $(-1, 0)$、$(0, -3)$、$(2, -3)$、$(3, 0)$ を通る。 $\rightarrow x = -1$ のとき $y = 0$、$x = 0$ のとき $y = -3$ 等	・ 多くの生徒に発表させる。 ワークシートの利用 ・ 多くの生徒に発表させる。 ・ 机間指導をしながら生徒がどのように考えているかを把握する。
・ 式を求めるための条件の考察	課題 3 グラフから読み取った特徴から 2 次関数の式を求めることができるでしょうか。できなければ、他にどんなことが分かっているか式を求めることができるか考えてみよう。そして、その条件を付け加えて、式を求めてみよう。 例えば、頂点が $(1, -4)$ ということから、$p = 1$、$q = -4$ は分かったけど、これだけで式を求めることはできません。先ほど書き出したことを参考にして、他にどんな条件を付け加えると、式を求めることができるか考えてみよう。 【予想される生徒の反応】 $\left\{ \begin{array}{l} \text{頂点が } (1, -4) \text{ である。} \\ y = x^2 \text{ のグラフと同じ形。} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{頂点が } (1, -4) \text{ である。} \\ (-1, 0) \text{ を通る。} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \text{ のとき最小値 } -4 \text{。} \\ y = x^2 \text{ のグラフと同じ形。} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} y \text{ 切片が } -3 \text{ である。} \\ (-1, 0) \text{ を通る。} \\ y = x^2 \text{ のグラフと同じ形。} \end{array} \right.$	・ 生徒の状況に応じて、なぜ、式を求めることができないのかを具体例を用いて確認する。 ・ 机間指導をしながら生徒がどのように考えているかを把握する。 ワークシートの利用

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・ 条件の把握	使った特徴と付け加えた条件をもとに、求めた式を発表してください。表現の違うものは、異なるものとして、どんどん発表してください。また、発表されたもの以外で、求めることができないか考えてみましょう。 ○各自の意見を発表する。 ・ 同じ特徴でも条件が異なるものを発表する。 その際、違った条件を付け加えることによって違う問題になることを実感する。 ・ 異なる特徴のものを発表する。その際、前出のものとの違いを考える。	・ 特徴と条件の組み合わせが異なる意見、表現の異なる意見をできるだけ発表させる。
・ まとめ	どんな条件であれば、2次関数の式を求めることができるでしょうか。 ○2次関数の標準形 $y = a(x - p)^2 + q$ における、a、p、q の値が分かることが2次関数の式を求めることになる。 → a、p、q の値が分かるとはどのようなことだろう。 ○本日の授業内容以外の考え方はないだろうか。 例えば、直線の方程式を求める場合を考えてみよう。 ○自己評価シートの記入	ワークシートの利用 ・ 考察した内容を一般化することにより2次関数の理解を深める。 ・ 次時の予告とする。 自己評価シートの利用

5 配付資料等（ワークシート、自己評価シート）

(1) ワークシート

2次関数の決定No.1 ワークシート		1年 組 番 氏名 _____								
課題1 右のグラフは、ある2次関数のグラフです。このグラフから読み取れることを言葉で表してみよう。  放物線について <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <tr> <th style="width: 5%;"></th> <th style="width: 40%;">読み取れたこと（特徴）</th> <th style="width: 55%;">文字で表す</th> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">自分の意見</td> <td style="height: 40px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">他の人の意見</td> <td style="height: 40px;"></td> <td></td> </tr> </table> 課題2 2次関数を表す式は、$y = a(x - p)^2 + q$、$y = ax^2 + bx + c$ と表すことができました。グラフから読み取れた特徴を a、b、c、p、q の条件として表してみよう。		読み取れたこと（特徴）	文字で表す	自分の意見			他の人の意見			課題3 グラフから読み取った特徴から2次関数の式を求めることができますか。できなければ、他にどんなことが分かっていたら式を求めることができるか考えてみよう。そして、その条件を加えて、式を求めてみよう。 まとめ
	読み取れたこと（特徴）	文字で表す								
自分の意見										
他の人の意見										

(2) 自己評価シート

2 次関数の決定 数学的活動の自己評価No.1		平成〇〇年〇月〇〇日 (〇)
1 年 組 番 名前		
学習課題	数学的な見方や考え方	表現・処理
【課題 1】グラフから読み取れることを言葉で表してみよう。	☐ 2 次関数のグラフから様々な性質を読み取ることができた。 (自分で読み取れた性質)	
【課題 2】読み取った特徴を文字で表してみよう。		☐ 特徴を文字で表現することができた。
【課題 3】読み取った特徴に条件を付け加えて式を求めてみよう。	☐ 特徴と条件の組み合わせを考えることができた。 ☐ 頂点とグラフの概形 ☐ 頂点と通る 1 点 ☐ 頂点と y 切片 ☐ 軸と y 切片と通る 1 点 ☐ 最小値とグラフの概形 ☐ 最小値と通る 1 点 ☐ 最小値と y 切片 ☐ x 軸の交点と他の 1 点 ☐ その他()	☐ 条件を加えて、2 次関数の式を求めることができた。
【まとめ】どのような条件があれば 2 次関数を求めることができるだろうか。	☐ 2 次関数のグラフを表す式を求めるためには、どのような条件が必要か考えることができた。	☐ 2 次関数を求めることができる条件 ()

*今日の授業で印象に残っていることを書いてください。

III 指導と評価の改善

1 評価について

(1) 生徒のワークシートから

○ 2 次関数のグラフの理解について(ワークシート 課題 1 の記述から)

自分の意見として多く書かれていたもの	他の人の意見として多く書かれていたもの
・ 頂点が(1, - 4) ・ 下に凸のグラフである ・ 軸は $x = 1$	・ $x = 1$ のとき最小値 - 4 ・ x^2 の係数が「+」のグラフである ・ $y = x^2$ のグラフの形と同じ ・ 点(- 1, 0)、(3, 0)を通過している ・ 点(0, - 3)を通過している ・ $x = 2$ のとき $y = 0$ である ・ y 切片が - 3 である ・ 原点を通過していない

2 次関数のグラフから読み取れることとして、多くの生徒が、「頂点」、「グラフの凸」、「軸」等、2 次関数のグラフの特徴として学んだことを挙げていた。グラフを

かくことに重点を置いて指導した成果であると考えられる。反面、そのグラフの見方は一様であり、「 y 切片」、「最小値」、「通る点」等に気付いた生徒は数名であった。それらの生徒から発表があったとき、「そうか」との感想が聞かれ、改めてグラフから読み取れることには、多くのことがあることに気付き、グラフについての理解を深めることができた。

○ 2 次関数の式を求めるための条件の考察について(ワークシート課題 3、まとめの記述から)

特 徴	付け加えた条件
・ 頂点が $(1, -4)$ である	・ $y = x^2$ のグラフの形と同じ ・ 点 $(-1, 0)$ を通っている ・ 点 $(3, 0)$ を通っている ・ $x = 2$ のとき $y = -3$ である ・ y 切片が -3 である
・ $x = 1$ のとき最小値 -4	・ $y = x^2$ のグラフの形と同じ ・ 点 $(-1, 0)$ を通っている ・ 点 $(3, 0)$ を通っている
・ y 切片が -3 である	・ $y = x^2$ のグラフの形と同じ、点 $(3, 0)$ を通っている
・ 軸の方程式が $x = 1$ である	・ $y = x^2$ のグラフの形と同じ、点 $(3, 0)$ を通っている

多くの生徒が、最初に扱う特徴として「頂点」を取り上げていた。授業前の予想通り、生徒にとっては扱いやすい特徴であったようである。また、付け加えた条件として、「 $y = x^2$ のグラフの形と同じ」、「点 $(3, 0)$ を通っている」ことを利用する生徒が多かった。授業中に、「解答が得られたら、他の方法も考えるように」との指示を出したところ、多くの生徒が他の特徴、条件の組み合わせを考え取り組んでいた。しかし、特徴を変えることよりも、条件を変えて考える生徒が多く、「頂点」を中心に取り組んでいた。数名の生徒は、特徴を「最小値」、「 y 切片」、「軸の方程式」に変えて取り組んでいた。もう少し時間をかけて取り組ませたい場面であったので、扱えなかったものは、レポートとして提出させることとした。

また、いくつかの条件に取り組むことによって、2 次関数を決定するために必要な条件についてもいくつか気付いていたようである。最後のまとめの場面では、以下のような意見があった。

- ・ 「頂点が分かっていることと最小値が分かっていることは同じだ」
- ・ 「 y 切片が -3 であることが分かっているときや、軸が $x = 1$ であることが分かっているときは、他に 2 つの条件が必要だ」
- ・ 「使えない条件(「原点を通っていない」)もある」
- ・ 「条件が多すぎることもあった」

以上のような意見を出し合うことによって、2 次関数の標準形を利用する場合のポイントを生徒自らが気付いたようである。残念ながら、この 1 時間の中では、3 点を通る 2 次関数の決定、 x 軸との交点を利用した 2 次関数の決定については触れることができなかった。次時の扱いとし、最後にもう一度振り返らせることとした。

(2) 自己評価シートの活用

授業の最後に授業で身に付ける「数学的な見方や考え方」、「表現・処理」について、整理し確認させることによって、自らの学習を振り返ることができた。自己評価シートをみる

と、大部分の生徒が概ね身に付いたと自覚してた。しかし、それぞれの特徴、条件が相互に関連し合っていることを十分理解しているとは言えない生徒も若干見受けられた。そのような生徒については、自己評価シートとワークシートとを見比べて、コメントを書き入れ、返却した。ワークシートから読み取れることと自己評価シートとのギャップを教師が埋めることによって、自己学習力、自己評価能力の育成が図られると考える。

さらに、この自己評価シートを定期テスト等の復習の際にも活用させた。授業のとき分かっていたこと、復習のときに分かっていたこと、忘れてしまったこと等を確認させてからテストに臨ませた。多くの生徒にとって、有効な手段であった。

以下に、2人の生徒のワークシートと自己評価シートの記述内容を示す。

生徒 A のワークシートと自己評価シートの比較

ワークシート	自己評価シート
課題1 2次関数のグラフの理解について [自分の意見] ・ 頂点(1, -4) ・ 下に凸のグラフ ・ 軸が $x = 1$ ・ 切片が -3 ・ $y = x^2$ の形になっている ・ $x = 1$ のとき最小値 -4 ・ $x = 3$ のとき $y = 0$ [他の人の意見] ・ 点(-1, 0)を通る ・ 原点を通過していない 課題2 2次関数の式を求めるための条件の考察について ・ 頂点(1, -4) + $y = x^2$ の形になっている ・ $x = 1$ のとき最小値 -4 + 下に凸のグラフ + $x = 3$ のとき $y = 0$ ・ 軸が $x = 1$ + 切片が -3 + $y = x^2$ の形になっている ・ 切片が -3 + $x = 3$ のとき $y = 0$ + 点(-1, 0)を通る まとめ ・ 頂点、最小値が分かっているときは、他に一つの条件が分かれば2次関数の式を求めることができる。 ・ 軸や切片が分かっているときは、他に二つの条件が必要である。 ・ a, p, q が分かれば2次関数の式を求めることができる。 ・ 使えない条件(「下に凸のグラフ」など)もある。	☒ 2次関数のグラフから様々な性質を読み取ることができた。 自分で読み取れた性質 頂点、グラフの凸、軸 切片、グラフの形 最小値、x軸との交点 ☒ 特徴と条件の組み合わせを考えることができた。 ☒ 頂点とグラフの概形 ☐ 頂点と通る1点 ☐ 頂点とy切片 ☐ 軸とy切片と通る1点 ☐ 最小値とグラフの概形 ☒ 最小値と通る1点 ☐ 最小値とy切片 ☐ x軸の交点と他の1点 ☒ その他 () ☒ 条件を加えて、2次関数の式を求めることができた。 ☒ 2次関数のグラフを表す式を求めるためには、どのような条件が必要か考えることができた。 ☒ 2次関数を求めることができる条件 ・ 頂点、または、最小値と、他に一つの条件 ・ 軸、または、切片と他に二つの条件

生徒 A のワークシート、自己評価シートを見ると、本時の目標を十分達成できたと判断できる。特に課題2では4通りの解法に取り組み、2次関数を決定するための条件の考察も満足いくものであった。さらに理解を深めさせるために、他の条件についてレポートを作成するように指示した。

生徒 B のワークシートと自己評価シートの比較

ワークシート	自己評価シート
課題 1 2 次関数のグラフの理解について [自分の意見] ・ 頂点(1, -4) ・ 下に凸のグラフ ・ 軸が $x = 1$ [他の人の意見] ・ 切片が -3 ・ $y = x^2$ の形になっている ・ $x = 1$ のとき最小値 -4 ・ $x = 3$ のとき $y = 0$ ・ 点(-1, 0)を通る ・ 原点を通過していない 課題 2 2 次関数の式を求めるための条件の考察について ・ 頂点(1, -4) + $y = x^2$ の形になっている ・ 頂点(1, -4) + 点(-1, 0)を通る	☒ 2 次関数のグラフから様々な性質を読み取ることができた。 自分で読み取れた性質 { 頂点、下に凸、軸 } ☐ 特徴と条件の組み合わせを考えることができた。 ☒ 頂点とグラフの概形 ☒ 頂点と通る 1 点 ☐ 頂点と y 切片 ☐ 軸と y 切片と通る 1 点 ☐ 最小値とグラフの概形 ☐ 最小値と通る 1 点 ☐ 最小値と y 切片 ☐ x 軸の交点と他の 1 点 ☐ その他 () ☒ 条件を加えて、2 次関数の式を求めることができた。 ☒ 2 次関数のグラフを表す式を求めるためには、どのような条件が必要か考えることができた。 ☐ 2 次関数を求めることができる条件 ・ a、p、q が分かること
まとめ ・ 頂点分かっているとき、a の値か、通る点分かればよい。 ・ a、p、q が分かれば 2 次関数の式を求めることができる。	

生徒 B のワークシート、自己評価シートを見ると、本時の目標を概ね達成できたと判断できる。しかし、課題 2 では、頂点に関する条件しか考察していないことから、2 次関数を決定する条件が十分把握できたとは言い難い。自己評価シートを見ても、生徒自身も満足できていない状況が分かる。達成されているもの、達成されていないものを伝えとともに、達成されていないものについては、レポートの提出を促したり、教科書、問題集の問題を具体的に指示することによって補充を図った。

生徒の学習状況や数学的活動を取り入れたことの効果を把握するためには、個々の生徒のワークシート、自己評価シートを有機的に結び付けることが大切である。自己評価シートは、生徒にとって学習の振り返りとしても効果があった。また、目標を十分達成できていない生徒に対しては、不足しているものを補うように指示することによって、学習のつまずきを未然に防ぐことができた。

(3) 評価問題

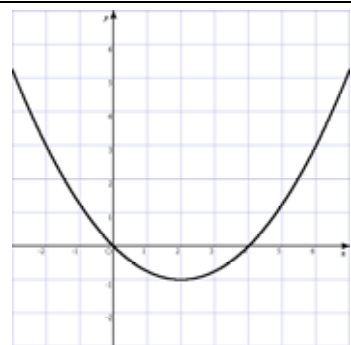
本時の目標の達成状況を適切に評価するために小テストを実施した。

【問題 1】右のグラフの式を求めなさい。

また、式を求めるために使ったグラフの特徴も書きなさい。

【問題 2】頂点が $(1, 2)$ の放物線がある。

このグラフの式を求めたいのだが、条件が足りないために求めることができない。自分で適切な条件を付け加え、その式を求めなさい。



【出題のねらい】

・【問題 1】について

頂点が $(2, -1)$ であること、原点を通ること等のグラフの特徴を自ら読みとらせ、このグラフを表す 2 次関数の式を求めるための条件をどのようにとらえるかを把握するとともに、その求め方の理解の状況をみる。

・【問題 2】について

頂点が $(1, 2)$ であることだけを与えることによって、2 次関数の式を求めるためにどんな条件を付け加えるかを把握するとともに、その条件を用いて 2 次関数の式を求めることができるかどうかをみる。

2 指導と評価の改善について

数学的活動を授業に取り入れることによって、生徒の主体的な学習を促すことができた。その際、ワークシート、自己評価シートを取り入れることによって、生徒の学習の状況を的確に把握し、事後の指導に生かすことができた。以下に、今回取り組んだこと、効果があったことをまとめる。

今回取り組んだこと	生徒への効果	指導・評価への効果
- 単元の目標の明確化 - 評価規準の作成	1 時間の授業の目標が明確になり、集中して学習に取り組むことができた。	単元を通して育てる力を意識することによって、各時間の目標が明確になった。
単元の授業計画の作成（学習活動、評価規準とのかかわり、評価方法の明確化）		数学的な見方や考え方、表現・処理、知識・理解を育てる場面を意識して授業することができた。
数学的活動への取組	自分なりに解法を模索するなど、主体的に課題を解決しようとする姿勢が見られた。	評価場面を意識して授業することができた。
ワークシート、自己評価シートによる評価	- 授業で身に付いたこと、身に付いていないことが明確になった。 - 授業後の学習の振り返り、定期テスト前の学習の振り返りに効果があった。	ワークシートと自己評価シートを有機的に結び付けることによって、生徒の学習状況がより明確になり、個々の生徒の指導、授業の改善に生かすことができた。
評価問題の工夫		評価の観点をより意識するようになった。

指導事例 3

図形と計量「三角比と図形」における指導と評価

I 単元の指導計画・評価計画

1 単元の目標

三角形の辺と角の間に成り立つ基本的な関係として、正弦定理、余弦定理を導き、平面図形や空間図形の計量に活用できるようにする。

2 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
㉑ 正弦定理・余弦定理が図形の計量の考察に有用であることに気づき、活用しようとする。	㉒ 正弦定理・余弦定理を導く過程を論理的に考察し、構成することができる。 ㉓ 正弦定理・余弦定理を活用して、辺の長さや角の大きさを求める方法を考えることができる。 ㉔ 三角形を決定する条件を考察することができる。	㉕ 三角形の与えられた辺の長さや角の大きさから、正弦定理・余弦定理を用いて、残りの辺の長さや角の大きさを求めることができる。	㉖ 正弦定理・余弦定理を三角形の決定条件と関連付けて理解している。

3 単元の授業計画（学習活動と評価規準のかかわり）

時間	学 習 活 動	評価規準とのかかわり	評価方法
第1時間 第2時間	○川幅を測定する方法を考察する。 ○1つの角とその対辺、および、他の1つの角がわかっているときに、他の辺の長さを求める解法を一般化し、正弦定理を導く。 ○与えられた条件から正弦定理を用いて、辺の長さや角の大きさ、外接円の半径を求める。	㉑、㉒、㉕	ワークシート、質問紙、机間指導、小テストにより、正弦定理を導く過程の考察の状況や正弦定理の活用の方法を確認する。
第3時間 (実践例の授業) 第4時間	○池の端から端までの距離を測定する方法を考察する。 ○2辺とその間の角が与えられたときに、他の辺の長さを求める解法を一般化し、余弦定理を導く。 ○与えられた条件から余弦定理を用いて、辺の長さや角の大きさを求める。	㉑、㉒、㉕	ワークシート、質問紙、机間指導、小テストにより、余弦定理を導く過程の考察の状況や余弦定理の活用の方法を確認する。
第4時間 第5時間 第6時間	○三角形の与えられた辺の長さや角の大きさから、正弦定理・余弦定理を用いて、残りの辺の長さや角の大きさを求める。 ○以下の場合を扱うことにより、正弦定理・余弦定理と三角形の決定条件を関連付ける。 ・1辺とその両端の角が与えられたとき ・2辺とその間の角が与えられたとき ・3辺が与えられたとき ・ $\sin A$ 、 $\sin B$ 、 $\sin C$ の比が与えられたとき	㉒、㉓、㉕、㉖	机間指導により、正弦定理・余弦定理を活用した問題解決の状況を把握する。また、いくつかの課題を通して、それぞれの定理が使える場面について発表させ、考察の状況を把握する。
第7時間 第8時間	○建物の高さを求める課題、正四面体の体積を求める課題に取り組む。	㉑、㉒、㉕	応用課題「問題作り」をレポートにして提出させ、取組の状況を確認する。

II 数学的活動の実践例

1 本時（第3時間目）の目標（評価規準）

- 余弦定理が図形の計量の考察に有用であることに気付き、活用しようとする。(A1)
- 余弦定理を導く過程を論理的に考察し、構成することができる。(B1)
- 三角形の与えられた辺の長さや角の大きさから、余弦定理を用いて、残りの辺の長さや角の大きさを求めることができる。(C1)

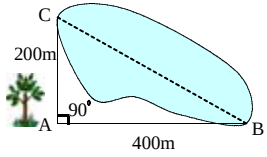
2 本時の数学的活動とそのねらい

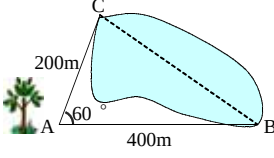
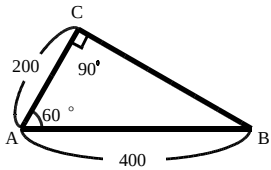
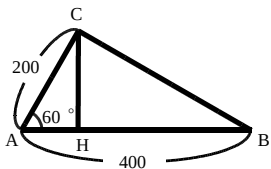
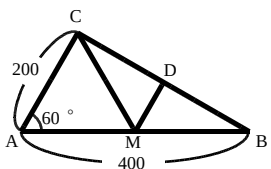
具体的な図形を既習事項を用いて考察することによって、2辺の長さとその間の角の大きさから残りの辺の長さを求めるための工夫をする。その際、一つの解法だけでなく、様々な解法に気付かせるとともに、その解法を一般化することにより、余弦定理を導く過程を論理的に考察させる。

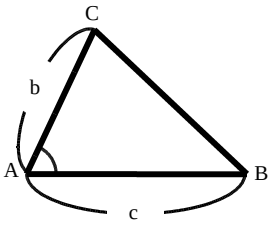
3 本時の評価

余弦定理を導く過程を論理的に考察することについては、授業中の発問に対する反応やワークシートの記述内容、自己評価シートをもとに、どのような解法をしているかを確認する。また、余弦定理を用いて残りの辺の長さを求めることについては、机間指導によって、図形の把握、定理の把握の状況を確認するとともに、小テストによって把握する。

4 授業展開例

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・ 前時の課題の確認	課題1 池の端から端までの長さ（最短距離）を測ろうと思います。 木（A地点）から両端（B地点、C地点）までの距離を測ってみると、$AB = 400\text{m}$、$AC = 200\text{m}$でした。そして、Aから見るとちょうど 90° の方向に B と C があります。B から C まで何 m でしょうか？  【予想される生徒の解答】 $\triangle ABC$ は $\angle BAC = 90^\circ$ の直角三角形だから 三平方の定理より $BC^2 = AB^2 + AC^2$ が成り立つ。 $BC^2 = 400^2 + 200^2$ $= 200000$ $BC > 0 \text{ より } BC = \sqrt{200000} = 200\sqrt{5}$	ワークシートの利用 ・ 前時にワークシートを配付し、課題1、課題2を解いてくるよう指示する。 ・ できるだけ複数の解法で解くよう指示する。 ・ 別の解法で考えた生徒に板書させる。同じ解法であっても、表現の異なるものについては、取り上げ、検討する。

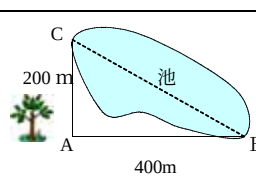
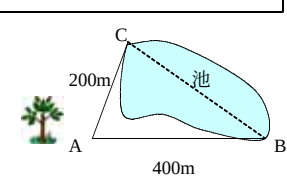
指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・ 前時の課題の確認	課題 2 1 ヶ月たって、その池を見に行くと、日照りが続き池が干上がって、A から B と C を見ると今度は 60° の方向になっていました。このとき、B から C まで何 m でしょうか？ 	ワークシートの利用 ・ 課題 1 と同様、できるだけ複数の解法で解くよう指示する。
・ 課題解決に向けての活動	課題 1 と条件が異なることは何でしょうか。 【予想される生徒の解法】 (解法 1) 60° を挟む 2 辺が 200m と 400m なので、辺の比が 1 : 2 である。 したがって、$\triangle ABC$ は $\angle ACB = 90^\circ$ の直角三角形である。 よって、$AC : BC = 1 : \sqrt{3}$ だから、 $BC = AC \sqrt{3} = 200\sqrt{3}$ (解法 2) 補助線を引いて直角三角形をつくれればよい。 点 C から辺 AB に垂線を下ろし、その交点を H とする。 $\triangle ACH$ において $CH = 200\sin 60^\circ = 100\sqrt{3}$ $AH = 200\cos 60^\circ = 100$ したがって $BH = AB - AH = 300$ $\triangle BCH$ は、$\angle BHC = 90^\circ$ の直角三角形だから三平方の定理より $BC^2 = BH^2 + CH^2$ が成り立つ。 $BC^2 = 300^2 + (100\sqrt{3})^2 = 120000$ $BC > 0$ より $BC = \sqrt{120000} = 200\sqrt{3}$ (解法 3) 点 C と辺 AB の中点 M を結ぶ。 $\angle MAC = 60^\circ$、$AM = 200$ であることから、$\triangle ACM$ は正三角形である。 また、$BM = CM = 200$ であるから、$\triangle BCM$ は、$\angle BMC = 120^\circ$ の二等辺三角形になる。 点 M から辺 BC に垂線を下ろし、その交点を D とすると、 $\triangle BMD$ は、$\angle BDM = 90^\circ$、$\angle BMD = 60^\circ$ の直角三角形であるから、$BD = 100\sqrt{3}$ となる。 したがって $BC = 2BD = 200\sqrt{3}$	・ 異なる点、同じである点を挙げさせることによって、2 辺とその間の角が分かっていることを確認する。 ・ 別の解法で考えた生徒に板書させる。 (解法 1 の図)  (解法 2 の図)  (解法 3 の図)  ・ 様々な解法を取り上げるとともに、それぞれの考え方のよさを実感させる。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・余弦定理の理解(一般化)	(解法1)から(解法3)の中で、$\angle BAC$の大きさが変わっても使える解法はどの解法だろうか。使えない解法の理由も考えてみよう。 【予想される生徒の反応】 ・(解法1)は、$\angle BAC = 60^\circ$であることを使って、$\triangle ABC$が直角三角形であることを導いているから、$\angle BAC$の大きさが変わると使えない。 ・(解法2)は、$\angle BAC$の正弦、余弦の値を使って求めている。正弦、余弦の値は、三角比の表を使えば求めることができるから、$\angle BAC$の大きさが変わっても使える。 ・(解法3)は、$\angle BAC = 60^\circ$であることを使って、$\triangle AMC$が正三角形であることを導いているから、$\angle BAC$の大きさが変わると使えない。 課題3 2辺とその間の角を使って、残りの辺の長さを表してみよう。$AC = b$、$AB = c$、$\angle BAC = A$のとき、$BC(a)$の長さを、b、c、Aを用いて表してみよう。  (解法2)を確認しながら、各自で取り組んでみよう。 ○点Cから辺ABに垂線を下ろし、その交点をHとする。 $\triangle ACH$において $CH = b \sin A, \quad AH = b \cos A$ したがって $BH = AB - AH = c - b \cos A$ $\triangle BCH$は、$\angle BHC = 90^\circ$の直角三角形だから三平方の定理より $BC^2 = BH^2 + CH^2$が成り立つ。 $\begin{aligned} a^2 &= (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$ 課題2をこの式にあてはめて、求めた式が正しいかどうか確かめてみよう。 $\begin{aligned} BC^2 &= 200^2 + 400^2 - 2 \cdot 200 \cdot 400 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 120000 \\ BC > 0 \text{ より } BC &= \sqrt{120000} = 200\sqrt{3} \end{aligned}$	・すぐに分からない場合は、$\angle BAC$に具体的な角度をあてはめて考えさせる。 ・それぞれの解法のよさを振り返りながら、なぜ使えるのか、なぜ使えないのかを考えさせ、多くの発言を求める。 ・課題2の解法2を確認させながら、時間を与えて、生徒自身に解決させ、その後、生徒の発言によって進めていく。 ・解決の途中で、それぞれの値は何のために求めるのかを確認しながら進める。 ・式だけでなく、図と関連させながらまとめる。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・ 本時のまとめ	余弦定理 △ ABC において、次のことが成り立つ。 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2cacosB$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$ 練習 次のような△ ABC において、指示されたものを求めなさい。 (1) $b = 4$、$c = 5$、$A = 60^\circ$ のとき、辺 BC の長さ a を求めなさい。 (2) $a = 3$、$c = 2\sqrt{2}$、$B = 45^\circ$ のとき、辺 AC の長さ b を求めなさい。 ○自己評価シートの記入	・ 式だけでなく、図と関連させることによって、第 2 式、第 3 式を生徒から導く。 ・ 必ず、図をかかせ、図上で確認させながら解答させる。 自己評価シートの利用

5 配付資料等（ワークシート、自己評価シート）

(1) ワークシート

課題プリント 【平成 15 年 月 日()】		1 年 組 番 / 氏名 _____
もんだい 池の端から端までの長さ（最長距離）を測ろうと思います。 課題 1 木(A 地点)から両端 (B 地点、C 地点) までの距離を測ってみると、$AB = 400\text{m}$、$AC = 200\text{m}$ でした。そして、A から見るとちょうど 90° の方向に B と C があります。B から C まで何 m でしょうか？ 	課題 2 1 ヶ月たって、その池を見に行くと、日照りが続き池が干上がって、A から B と C を見ると今度は 60° の方向になっていました。このとき、B から C まで何 m でしょうか？ 	

(2) 自己評価シート

余弦定理 数学的活動の自己評価No.1 平成〇〇年〇月〇〇日 (〇)		
1年 組 番 / 氏名		
学習課題	数学的な見方や考え方	表現・処理
【課題1】 $AB = 400$ 、 $AC = 200$ $\angle BAC = 90^\circ$ のとき、 BC の長さを求める。	☐ 三角形が直角三角形であることから、三平方の定理が使えることが分かった。	☐ 直角三角形において、三平方の定理を用いて辺の長さを求めることができた。
【課題2】 $AB = 400$ 、 $AC = 200$ $\angle BAC = 60^\circ$ のとき、 BC の長さを求める。	☐ 複数の解法を考えることができた。 ☐ (解法1) $\angle BAC$ の大きさと辺の比から、 $\triangle ABC$ が直角三角形であることに気付いた。 ☐ (解法2) 点 C から辺 AB に垂線を下ろし、三角比の性質、三平方の定理を利用して、辺の長さが求められることに気付いた。 ☐ (解法3) 点 C と辺 AB の中点 M を結ぶと、 $\triangle AMC$ は正三角形に、 $\triangle BCM$ は二等辺三角形になることに気付いた。	☐ (解法1) 三平方の定理を用いて、 BC の長さを求めることができた。 ☐ (解法2) 三角比の性質を使って、 AH 、 CH 、 BH の長さを求めることができた。 ☐ (解法2) 三平方の定理を使って、 BC の長さを求めることができた。 ☐ (解法3) 正三角形、二等辺三角形、直角三角形の性質を利用して、角の大きさ、辺の長さを求めることができた。
【解法の一般化】	☐ それぞれの解法において、一般化できる理由、一般化できない理由を考えることができた。	
【課題3】 $AC = b$ 、 $AB = c$ 、 $\angle BAC = A$ のとき、 $BC(a)$ の長さを、 b 、 c 、 A を用いて表す。	☐ 余弦定理は、 a 、 b 、 c の3通りの表し方があった。	☐ 解法2を参考にして、 $BC(a)$ の長さを、 b 、 c 、 A を用いて表すことができた。 ☐ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ を使って式を整理することができた。

*今日の授業で印象に残っていることを書いてください。

III 指導と評価の改善

1 評価について

(1) 生徒のワークシートから

○課題 1 について

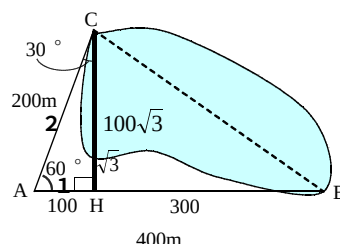
- ・課題 1 については、多くの生徒が直角三角形であることに気づき、三平方の定理を用いて、BC の長さを求めることができていた。ワークシート、自己評価シートを見ても三平方の定理の理解は十分である。

○課題 2 について

多くの生徒が、最初に解法 2（点 C から辺 AB に垂線を下ろす）によって解決を図っていた。しかし、垂線を下ろしてからの解法に違いが見られた。以下にその解法を示す。

生徒 A の解答

$$\begin{aligned} 200 : x &= 2 : \sqrt{3} \\ 2x &= 200\sqrt{3} \\ x &= 100\sqrt{3} \\ 300^2 + (100\sqrt{3})^2 &= 120000 \\ \text{よって } BC &= 200\sqrt{3} \end{aligned}$$

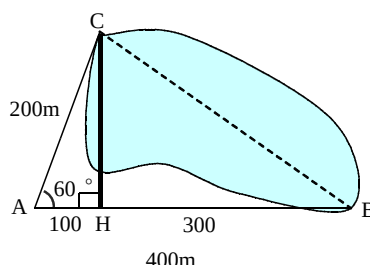


生徒 A は、点 C から辺 AB に垂線を下ろしたとき（その足を H とする）、△ACH が既知の三角形（30°、60°、90°の直角三角形）であることに気づき、辺の比を利用して、CH、AH を求め、三平方の定理を利用して BC を求めている。

生徒 B の解答

△ACH において

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ &= \frac{CH}{200} \\ CH &= 200 \sin 60^\circ = 100\sqrt{3} \\ \cos 60^\circ &= \frac{AH}{200} \\ AH &= 200 \cos 60^\circ = 100 \\ \text{したがって、} BH &= 400 - 100 = 300 \\ \text{三平方の定理より } BC^2 &= (100\sqrt{3})^2 + 300^2 = 120000 \\ BC > 0 \text{ より } BC &= 200\sqrt{3} \end{aligned}$$



生徒 B は、点 C から辺 AB に垂線を下ろしたとき（その足を H とする）、△ACH が直角三角形であることから、三角比の定義を用いて CH、AH を求め、三平方の定理を用いて BC を求めている。

以上のように、C から AB に垂線を下ろしても、解答としては 2 通りの方法があった。生徒 B のような解法で解いている生徒は少なかったが、生徒 A と同様の解答をした生徒よりも、解法 2 が一般化できることに気付けたようである。

また、解法 1 は、十数名の生徒が取り組んでいたが、解法 3 は、多くのヒントが与えられるまで思いつけなかったようである。

次に、解法 1、解法 3 に取り組んだ生徒の解法を示す。

生徒 C の解答(解法 1)

30° 、 60° 、 90° の直角三角形を $\triangle A'B'C'$ とすると、

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ であるから

$$200 : 1 = BC : \sqrt{3}$$

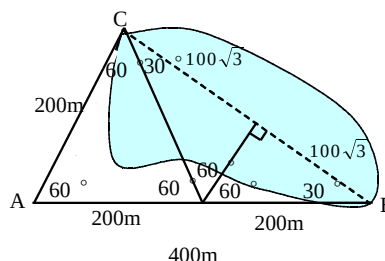
$$\text{したがって } BC = 200\sqrt{3}$$

生徒 D の解答(解法 3)

C と AB の中点を結ぶ。

右の図より

$$BC = 200\sqrt{3}$$



特に、解法 3 では、生徒 D の解答のように、図の中に分かった数値を書き込むことだけで、BC の長さを求めたようである。解答の書き方という点で見れば、不十分である。

生徒のワークシートを見ると、解法 2 に気付いた生徒は多かったが、解法 1、解法 3 については、満足いくものではなかった。この課題では、一つの解法だけでなく、様々な解法に気付かせることもねらいの一つであっただけに残念である。このことは、図形を多面的に観察する能力が十分養われていないことを示すものであり、数学 A の平面図形、数学 II の図形と方程式、数学 B のベクトル等と関連を図って、養っていかなければならない。

(2) 自己評価シートから

解法の一般化については、授業中に発言のあった生徒は、その時点で評価することができるが、他の多くの生徒については、机間指導（ノートの記載内容）、自己評価シートから、どのように考えていたか読み取った。自己評価シートの【解法の一般化】（□それぞれの解法において、一般化できる理由、一般化できない理由を考えることができた。）については、大多数の生徒ができていたとしていた。しかし、机間指導時における観察によると、それらの生徒のうち半数は、「一般化できそうである」ことに気付いただけであって、その理由までは気付かなかったようである。特に、生徒 A と同様の解答をした生徒には、生徒 B の解答を再度取り上げ、説明する必要がある。

また、余弦定理を導く過程については、解法 2 を参考にして、大多数の生徒がその過程を把握していた。しかし、自己評価シートのチェック項目にもある「 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ を使って、式を整理することができた。」ことについては、半数近くの生徒ができていなかった。三角比の相互関係についても、様々な場面で補充的な指導を加える必要がある。

普段の授業では、観点を決めずに生徒を観察していた場面が多い。しかも、「できているか」、「できていないか」の評価であり、十分に生徒の状況を把握することができていなかった。しかし、ワークシートと自己評価シートを関連付けて評価することによって、生徒の取組の状況を的確に把握することができた。あらかじめ観点を決め、その観点を評価できる準備をしておくことが大切であることを実感した。また、多くのことを望まない大切さにも気付いた。事前に、この場面では「数学的な見方や考え方」について評価するとしていれば、

「あれも」「これも」ということにならず、生徒にとっても取り組みやすかったのではないと思う。

(3) 評価問題

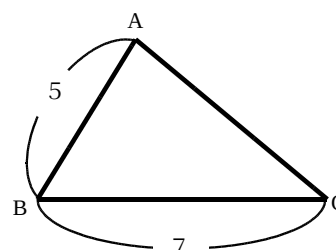
本時の目標の達成状況を把握するために、小テストを実施した。

【問題 1】△ABC において、余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ を使って、辺の長さを求める問題をつくりなさい。また、その問題を解きなさい。

【問題 2】右の図の三角形において以下の問いに答えなさい。

- (1) AC の長さを求めるためには、条件を加える必要がある。その条件を二つ示しなさい。
- (2) (1)で示した条件について、それぞれ AC の長さを求
なさい。

(1)解答例 $B = 60^\circ$ 、 $A = 60^\circ$ など



【出題のねらい】

・【問題 1】について

正弦定理・余弦定理を用いて辺の長さ、角の大きさを求める問題では、与えられた条件の把握ができていることが必要となる。そのため、本問では、自ら問題を作らせることによって、その状況を把握する。

・【問題 2】について

三角形の決定条件の認識の程度を判断するとともに、余弦定理を用いて残りの要素を求めることができるかどうかを評価する。

2 指導と評価の改善について

今回の取組を通して、次の 2 点について大いに考えさせられた。

- ・生徒が主体的に授業に取り組むための方策
- ・生徒の力を伸ばすための方策

まず、生徒が主体的に授業に取り組むためには、講義形式の授業の改善にある。生徒が主体的に授業に取り組む場面、取り組むことができる課題の設定が必要である。特に、今回感じたことは、課題設定の難しさである。生徒が考える場面を設定できる課題や、発展性のある課題を準備するためには、教師は十分な教材研究の時間を確保することが不可欠である。教科書、参考書等を書いてある例や例題だけでなく、教科に関する幅広い知識が教師には求められる。今回の課題は、複数の解法を取り扱うことによって図形の見方を豊にすることができるとともに、余弦定理の一般化に結び付くものとして設定した。今後とも、生徒が主体的に授業に取り組みたくなるような課題の設定を心掛けたい。数学的活動の充実させるためには、よりよい課題の設定が重要となる。課題の設定のためには、数学的活動のねらいを明確にしておくことが大切である。

また、生徒の力を伸ばす方策については、計画と評価が重要であることを改めて実感した。「単元の目標」、「単元の評価規準」、「単元の授業計画」等を定めることによって、従来の「教えすぎる」ことが改善された。また、各時間の目標、学習活動を評価規準と関連させて設定することによって、生徒にとって各時間で学ぶことが明確になるとともに、教師にとっても生徒

を観察する目を養うことができた。ただ漠然と、課題が「解決できたか」、「解決できなかったか」を評価するのではなく、「この生徒は、この課題に対して、このように考えて導き出している。」ということを見取り、その結果を生徒に返していくことによって、評価の信頼性、客観性が高まり、生徒の力を伸ばすことにつながる。そして、それは、指導の改善にも結び付いていく。評価についても、今後さらに研究が進み、よりよい方向性が示されることを期待する。

以上二つのことは、相互に作用し合って高められる。生徒が主体的に授業に取り組む場面を設定することによって、生徒の考えを評価することができる。その評価結果をもとに、課題の設定や、次の時間における補充のポイント等が見えてくる。この繰り返しで、生徒の主体的な授業への取り組み、そして、生徒の学力の向上につながっていくのではないかと考える。