指導事例３　図形と計量「三角比と図形」における指導と評価

Ⅰ　単元の指導計画・評価計画

1　単元の目標

三角形の辺と角の間に成り立つ基本的な関係として、正弦定理、余弦定理を導き、平面図形や空間図形の計量に活用できるようにする。

2　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
Ⓐ1正弦定理・余弦定理が図形の計量の考察に有用であることに気付き、活用しようとする。	Ⓑ1正弦定理・余弦定理を導く過程を論理的に考察し、構成することができる。 Ⓑ2正弦定理・余弦定理を活用して、辺の長さや角の大きさを求める方法を考えることができる。 Ⓑ3三角形を決定する条件を考察することができる。	Ⓒ1三角形の与えられた辺の長さや角の大きさから、正弦定理・余弦定理を用いて、残りの辺の長さや角の大きさを求めることができる。	Ⓓ1正弦定理・余弦定理を三角形の決定条件と関連付けて理解している。

3　単元の授業計画（学習活動と評価規準のかかわり）

時間	学　習　活　動	評価規準とのかかわり	評価方法
第１時間 第２時間	○川幅を測定する方法を考察する。 ○１つの角とその対辺、および、他の１つの角がわかっているときに、他の辺の長さを求める解法を一般化し、正弦定理を導く。 ○与えられた条件から正弦定理を用いて、辺の長さや角の大きさ、外接円の半径を求める。	Ⓐ1、Ⓑ1、Ⓒ1	ワークシート、質問紙、机間指導、小テストにより、正弦定理を導く過程の考察の状況や正弦定理の活用の方法を確認する。
第３時間 **(実践例の授業)** 第４時間	○池の端から端までの距離を測定する方法を考察する。 ○２辺とその間の角が与えられたときに、他の辺の長さを求める解法を一般化し、余弦定理を導く。 ○与えられた条件から余弦定理を用いて、辺の長さや角の大きさを求める。	Ⓐ1、Ⓑ1、Ⓒ1	ワークシート、質問紙、机間指導、小テストにより、余弦定理を導く過程の考察の状況や余弦定理の活用の方法を確認する。
第４時間 第５時間 第６時間	○三角形の与えられた辺の長さや角の大きさから、正弦定理・余弦定理を用いて、残りの辺の長さや角の大きさを求める。 ○以下の場合を扱うことにより、正弦定理・余弦定理と三角形の決定条件を関連付ける。 ・１辺とその両端の角が与えられたとき ・２辺とその間の角が与えられたとき ・３辺が与えられたとき ・sinA、sinB、sinC の比が与えられたとき	Ⓑ2、Ⓑ3、Ⓒ1、Ⓓ1	机間指導により、正弦定理・余弦定理を活用した問題解決の状況を把握する。また、いくつかの課題を通して、それぞれの定理が使える場面について発表させ、考察の状況を把握する。
第７時間 第８時間	○建物の高さを求める課題、正四面体の体積を求める課題に取り組む。	Ⓐ1、Ⓑ2、Ⓒ1	応用課題「問題作り」をレポートにして提出させ、取組の状況を確認する。

Ⅱ　数学的活動の実践例

1　本時（第３時間目）の目標（評価規準）

○余弦定理が図形の計量の考察に有用であることに気付き、活用しようとする。（Ⓐ1）
○余弦定理を導く過程を論理的に考察し、構成することができる。（Ⓑ1）
○三角形の与えられた辺の長さや角の大きさから、余弦定理を用いて、残りの辺の長さや角の大きさを求めることができる。（Ⓒ1）

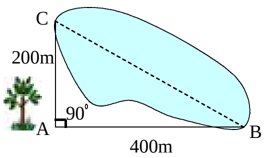
2　本時の数学的活動とそのねらい

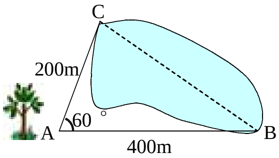
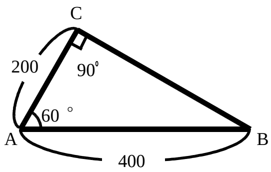
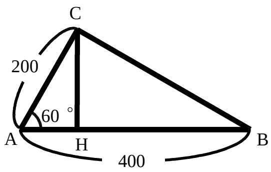
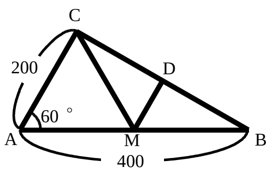
具体的な図形を既習事項を用いて考察することによって、２辺の長さとその間の角の大きさから残りの辺の長さを求めるための工夫をする。その際、一つの解法だけでなく、様々な解法に気付かせるとともに、その解法を一般化することにより、余弦定理を導く過程を論理的に考察させる。

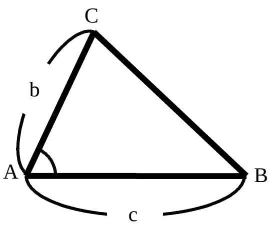
3　本時の評価

余弦定理を導く過程を論理的に考察することについては、授業中の発問に対する反応やワークシートの記述内容、自己評価シートをもとに、どのような解法をしているかを確認する。また、余弦定理を用いて残りの辺の長さを求めることについては、机間指導によって、図形の把握、定理の把握の状況を確認するとともに、小テストによって把握する。

4　授業展開例

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・前時の課題の確認	課題１ 池の端から端までの長さ（最短距離）を測ろうと思います。  木（A 地点）から両端（B 地点、C 地点）までの距離を測ってみると、AB ＝ 400m、AC ＝ 200m でした。そして、A から見るとちょうど 90°の方向に B と C があります。B から C まで何 m でしょうか？	**ワークシート**の利用 ・前時にワークシートを配付し、課題１、課題２を解いてくるよう指示する。 ・できるだけ複数の解法で解くよう指示する。
	【予想される生徒の解答】 △ ABC は∠ BAC ＝ 90°の直角三角形だから 三平方の定理より $BC^2 = AB^2 + AC^2$ が成り立つ。 $BC^2 = 400^2 + 200^2$ $= 200000$ $BC > 0$ より $BC = \sqrt{200000} = 200\sqrt{5}$	・別の解法で考えた生徒に板書させる。同じ解法であっても、表現の異なるものについては、取り上げ、検討する。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・前時の課題の確認	課題２ １ヶ月たって、その池を見に行くと、日照りが続き池が干上がって、A から B と C を見ると今度は 60 °の方向になっていました。このとき、B から C まで何 m でしょうか？  課題１と条件が異なることは何でしょうか。	**ワークシート**の利用 ・課題１と同様、できるだけ複数の解法で解くよう指示する。 ・異なる点、同じである点を挙げさせることによって、２辺とその間の角が分かっていることを確認する。
・課題解決に向けての活動	【予想される生徒の解法】 (解法１)60 °を挟む２辺が 200m と 400m なので、辺の比が 1：2 である。 したがって、△ ABC は∠ ACB ＝ 90 °の直角三角形である。 よって、AC：BC ＝ 1：$\sqrt{3}$　だから、 BC ＝ AC $\sqrt{3}$ ＝$200\sqrt{3}$ (解法２)補助線を引いて直角三角形をつくればよい。 点 C から辺 AB に垂線を下ろし、その交点を H とする。 △ ACH において CH ＝ 200sin60 °＝$100\sqrt{3}$ AH ＝ 200cos60 °＝ 100 したがって　BH ＝ AB － AH ＝ 300 △ BCH は、∠ BHC ＝ 90 °の直角三角形だから三平方の定理より BC ^{2}＝ BH ^{2}＋ CH ^{2}が成り立つ。 BC ^{2}＝ 300 ^{2}＋($100\sqrt{3}$) ^{2}＝ 120000 BC ＞ 0 より BC ＝$\sqrt{120000}$ ＝ $200\sqrt{3}$ (解法３)点 C と辺 AB の中点 M を結ぶ。 ∠ MAC ＝ 60 °、AM ＝ 200 であるかることから、△ ACM は正三角形である。 また、BM ＝ CM ＝ 200 であるから、△ BCM は、∠ BMC ＝ 120 °の二等辺三角形になる。 点 M から辺 BC に垂線を下ろし、その交点を D とすると、 △ BMD は、∠ BDM ＝ 90 °、∠ BMD ＝ 60 °の直角三角形であるから、BD ＝ $100\sqrt{3}$ となる。 したがって　BC ＝ 2BD ＝$200\sqrt{3}$	・別の解法で考えた生徒に板書させる。 (解法１の図)  (解法２の図)  (解法３の図)  ・様々な解法を取り上げるとともに、それぞれの考え方のよさを実感させる。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・余弦定理の理解(一般化)	(解法１)から(解法３)の中で、∠ BAC の大きさが変わっても使える解法はどの解法だろうか。使えない解法の理由も考えてみよう。 【予想される生徒の反応】 ・(解法１)は、∠ BAC ＝ 60 °であることを使って、△ ABC が直角三角形であることを導いているから、∠ BAC の大きさが変わると使えない。 ・(解法２)は、∠ BAC の正弦、余弦の値を使って求めている。正弦、余弦の値は、三角比の表を使えば求めることができるから、∠ BAC の大きさが変わっても使える。 ・(解法３)は、∠ BAC ＝ 60 °であることを使って、△ AMC が正三角形であることを導いているから、∠ BAC の大きさが変わると使えない。 課題３ ２辺とその間の角を使って、残りの辺の長さを表してみよう。AC ＝ b、AB ＝ c、∠ BAC ＝ A のとき、BC(a) の長さを、b、c、A を用いて表してみよう。  (解法２)を確認しながら、各自で取り組んでみよう。 ○点 C から辺 AB に垂線を下ろし、その交点を H とする。 △ ACH において CH ＝ $b$sinA　、AH ＝ $b$cosA したがって　BH ＝ AB － AH ＝ c － $b$cosA △ BCH は、∠ BHC ＝ 90 °の直角三角形だから 三平方の定理より $BC^2 = BH^2 + CH^2$ が成り立つ。 $a^2 = (c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2$ $= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 課題２をこの式にあてはめて、求めた式が正しいかどうか確かめてみよう。 $BC^2 = 200^2 + 400^2 - 2 \cdot 200 \cdot 400 \cdot \cos 60°$ $= 120000$ BC ＞ 0 より　$BC = \sqrt{120000} = 200\sqrt{3}$	・すぐに分からない場合は、∠ BAC に具体的な角度をあてはめて考えさせる。 ・それぞれの解法のよさを振り返りながら、なぜ使えるのか、なぜ使えないのかを考えさせ、多くの発言を求める。 ・課題２の解法２を確認させながら、時間を与えて、生徒自身に解決させ、その後、生徒の発言によって進めていく。 ・解決の途中で、それぞれの値は何のために求めるのかを確認しながら進める。 ・式だけでなく、図と関連させながらまとめる。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・本時のまとめ	余弦定理 △ ABC において、次のことが成り立つ。 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$	・式だけでなく、図と関連させることによって、第２式、第３式を生徒から導く。
	練　習 次のような△ ABC において、指示されたものを求めなさい。 (1)　$b = 4$、$c = 5$、$A = 60°$ のとき、辺 BC の長さ a を求めなさい。 (2)　$a = 3$、$c = 2\sqrt{2}$ 、$B = 45°$ のとき、辺 AC の長さ b を求めなさい。	・必ず、図をかかせ、図上で確認させながら解答させる。
	○自己評価シートの記入	**自己評価シート**の利用

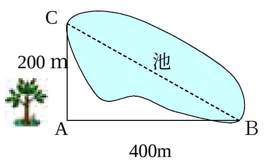
5　配付資料等（ワークシート、自己評価シート）

(1)　ワークシート

課題プリント　【平成 15 年　月　日(　)】　　　1 年　組　番／氏名

もんだい　池の端から端までの長さ（最長距離）を測ろうと思います。

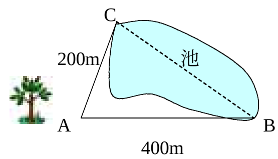
課題１
木(A 地点)から両端（B 地点、C 地点）までの距離を測ってみると、AB ＝ 400m、AC ＝ 200m でした。そして、A から見るとちょうど 90 °の方向に B と C があります。
B から C まで何 m でしょうか？



【自分の解法】

【他の人の解法】

課題２
１ヶ月たって、その池を見に行くと、日照りが続き池が干上がって、A から B と C を見ると今度は 60 °の方向になっていました。このとき、B から C まで何 m でしょうか？



【自分の解法】

【他の人の解法】

（2）自己評価シート

余弦定理　**数学的活動の自己評価No.1**　　平成○○年○月○○日（○）

1年　組　番／氏名＿＿＿＿＿＿

学習課題	数学的な見方や考え方	表現・処理
【課題１】AB ＝ 400、AC ＝ 200 ∠ BAC ＝ 90 °のとき、BC の長さを求める。	□三角形が直角三角形であることから、三平方の定理が使えることが分かった。	□直角三角形において、三平方の定理を用いて辺の長さを求めることができた。
【課題２】AB ＝ 400、AC ＝ 200 ∠ BAC ＝ 60 °のとき、BC の長さを求める。	□複数の解法を考えることができた。 □(解法１)∠ BAC の大きさと辺の比から、△ ABC が直角三角形であることに気付いた。 □(解法２)点 C から辺 AB に垂線を下ろし、三角比の性質、三平方の定理を利用して、辺の長さが求められることに気付いた。 □(解法３)点 C と辺 AB の中点 M を結ぶと、△ AMC は正三角形に、△ BCM は二等辺三角形になることに気付いた。	□(解法１)三平方の定理を用いて、BC の長さを求めることができた。 □(解法２)三角比の性質を使って、AH、CH、BH の長さを求めることができた。 □(解法２)三平方の定理を使って、BC の長さを求めることができた。 □(解法３)正三角形、二等辺三角形、直角三角形の性質を利用して、角の大きさ、辺の長さを求めることができた。
【解法の一般化】	□それぞれの解法において、一般化できる理由、一般化できない理由を考えることができた。	
【課題３】AC ＝ b、AB ＝ c、∠ BAC ＝ A のとき、BC(a) の長さを、b、c、A を用いて表す。	□余弦定理は、a、b、c の３通りの表し方があることが分かった。	□解法２を参考にして、BC(a) の長さを、b、c、A を用いて表すことができた。 □$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$を使って式を整理することができた。

＊今日の授業で印象に残っていることを書いてください。

Ⅲ　指導と評価の改善

1　評価について

（1）生徒のワークシートから

○課題１について

・課題１については、多くの生徒が直角三角形であることに気付き、三平方の定理を用いて、BC の長さを求めることができていた。ワークシート、自己評価シートを見ても三平方の定理の理解は十分である。

○課題２について

多くの生徒が、最初に解法２（点 C から辺 AB に垂線を下ろす）によって解決を図っていた。しかし、垂線を下ろしてからの解法に違いが見られた。以下にその解法を示す。

生徒 A の解答

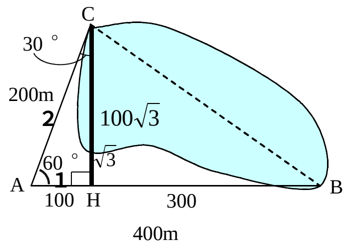
$200 : x = 2 : \sqrt{3}$

$2x = 200\sqrt{3}$

$x = 100\sqrt{3}$

$300^2 + (100\sqrt{3})^2 = 120000$

よって　$BC = 200\sqrt{3}$



生徒 A は、点 C から辺 AB に垂線を下ろしたとき（その足を H とする)、△ ACH が既知の三角形（30°、60°、90°の直角三角形）であることに気付き、辺の比を利用して、CH、AH を求め、三平方の定理を利用して BC を求めている。

生徒 B の解答

△ ACH において

$\sin 60° = \dfrac{CH}{200}$

$CH = 200\sin 60° = 100\sqrt{3}$

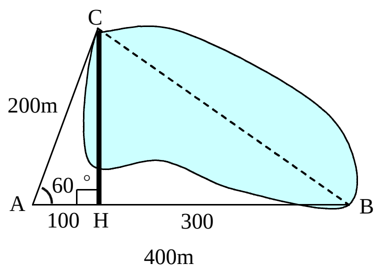
$\cos 60° = \dfrac{AH}{200}$

$AH = 200\cos 60° = 100$

したがって、$BH = 400 - 100 = 300$

三平方の定理より $BC^2 = (100\sqrt{3})^2 + 300^2 = 120000$

$BC > 0$ より $BC = 200\sqrt{3}$



生徒 B は、点 C から辺 AB に垂線を下ろしたとき（その足を H とする)、△ ACH が直角三角形であることから、三角比の定義を用いて CH、AH を求め、三平方の定理を用いて BC を求めている。

以上にように、C から AB に垂線を下ろしても、解答としては２通りの方法があった。生徒 B のような解法で解いている生徒は少なかったが、生徒 A と同様の解答をした生徒よりも、解法２が一般化できることに気付けたようである。

また、解法１は、十数名の生徒が取り組んでいたが、解法３は、多くのヒントが与えられるまで思いつかなかったようである。

次に、解法１、解法３に取り組んだ生徒の解法を示す。

生徒 C の解答(解法１)

30°、60°、90°の直角三角形を△ A'B'C'とすると、

△ ABC ∽△ A'B'C'であるから

$200：1 ＝ BC：\sqrt{3}$

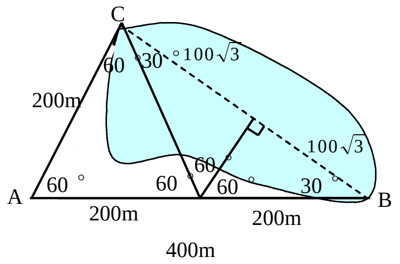
したがって　$BC ＝200\sqrt{3}$

生徒 D の解答(解法３)

C と AB の中点を結ぶ。

右の図より

$BC ＝ 200\sqrt{3}$



特に、解法３では、生徒 D の解答のように、図の中に分かった数値を書き込むことだけで、BC の長さを求めたようである。解答の書き方という点で見れば、不十分である。

生徒のワークシートを見ると、解法２に気付いた生徒は多かったが、解法１、解法３については、満足いくものではなかった。この課題では、一つの解法だけでなく、様々な解法に気付かせることもねらいの一つであっただけに残念である。このことは、図形を多面的に観察する能力が十分養われていないことを示すものであり、数学 A の平面図形、数学Ⅱの図形と方程式、数学 B のベクトル等と関連を図って、養っていかなければならない。

(2) 自己評価シートから

解法の一般化については、授業中に発言のあった生徒は、その時点で評価することができるが、他の多くの生徒については、机間指導（ノートの記載内容)、自己評価シートから、どのように考えていたか読み取った。自己評価シートの【解法の一般化】（□それぞれの解法において、一般化できる理由、一般化できない理由を考えることができた。）については、大多数の生徒ができていたとしていた。しかし、机間指導時における観察によると、それらの生徒のうち半数は、「一般化できそうである」ことに気付いただけであって、その理由までは気付かなかったようである。特に、生徒 A と同様の解答をした生徒には、生徒 B の解答を再度取り上げ、説明する必要がある。

また、余弦定理を導く過程については、解法２を参考にして、大多数の生徒がその過程を把握していた。しかし、自己評価シートのチェック項目にもある「$\sin^2 A＋\cos^2 A＝1$を使って、式を整理することができた。」ことについては、半数近くの生徒ができていなかった。三角比の相互関係についても、様々な場面で補充的な指導を加える必要がある。

普段の授業では、観点を決めずに生徒を観察していた場面が多い。しかも、「できているか」、「できていないか」の評価であり、十分に生徒の状況を把握することができていなかった。しかし、ワークシートと自己評価シートを関連付けて評価することによって、生徒の取組の状況を的確に把握することができた。あらかじめ観点を決め、その観点を評価できる準備をしておくことが大切であることを実感した。また、多くのことを望まない大切さにも気付いた。事前に、この場面では「数学的な見方や考え方」について評価するとしていれば、

「あれも」「これも」ということにならず、生徒にとっても取り組みやすかったのではないかと思う。

(3) 評価問題

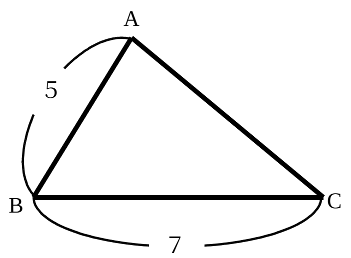
本時の目標の達成状況を把握するために、小テストを実施した。

【問題１】△ ABC において、余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を使って、辺の長さを求める問題をつくりなさい。また、その問題を解きなさい。

【問題２】右の図の三角形において以下の問いに答えなさい。

(1) AC の長さを求めるためには、条件を加える必要がある。その条件を二つ示しなさい。

(2) (1)で示した条件について、それぞれ AC の長さを求なさい。



(1)解答例　B ＝ 60°、A ＝ 60°など

【出題のねらい】

・【問題１】について

正弦定理・余弦定理を用いて辺の長さ、角の大きさを求める問題では、与えられた条件の把握ができていることが必要となる。そのため、本問では、自ら問題を作らせることによって、その状況を把握する。

・【問題２】について

三角形の決定条件の認識の程度を判断するとともに、余弦定理を用いて残りの要素を求めることができるどうかを評価する。

2　指導と評価の改善について

今回の取組を通して、次の２点について大いに考えさせられた。

・生徒が主体的に授業に取り組むための方策

・生徒の力を伸ばすための方策

まず、生徒が主体的に授業に取り組むためには、講義形式の授業の改善にある。生徒が主体的に授業に取り組む場面、取り組むことができる課題の設定が必要である。特に、今回感じたことは、課題設定の難しさである。生徒が考える場面を設定できる課題や、発展性のある課題を準備するためには、教師は十分な教材研究の時間を確保することが不可欠である。教科書、参考書等に書いてある例や例題だけでなく、教科に関する幅広い知識が教師には求められる。今回の課題は、複数の解法を取り扱うことによって図形の見方を豊にすることができるとともに、余弦定理の一般化に結び付くものとして設定した。今後とも、生徒が主体的に授業に取り組みたくなるような課題の設定を心掛けたい。数学的活動の充実させるためには、よりよい課題の設定が重要となる。課題の設定のためには、数学的活動のねらいを明確にしておくことが大切である。

また、生徒の力を伸ばす方策については、計画と評価が重要であることを改めて実感した。「単元の目標」、「単元の評価規準」、「単元の授業計画」等を定めることによって、従来の「教えすぎる」ことが改善された。また、各時間の目標、学習活動を評価規準と関連させて設定することによって、生徒にとって各時間で学ぶことが明確になるとともに、教師にとっても生徒

を観察する目を養うことができた。ただ漠然と、課題が「解決できたか」、「解決できなかったか」を評価するのではなく、「この生徒は、この課題に対して、このように考えて導き出している。」ということを見取り、その結果を生徒に返していくことによって、評価の信頼性、客観性が高まり、生徒の力を伸ばすことにつながる。そして、それは、指導の改善にも結び付いていく。評価についても、今後さらに研究が進み、よりよい方向性が示されることを期待する。

　以上二つのことは、相互に作用し合って高められる。生徒が主体的に授業に取り組む場面を設定することによって、生徒の考えを評価することができる。その評価結果をもとに、課題の設定や、次の時間における補充のポイント等が見えてくる。この繰り返しが、生徒の主体的な授業への取り組み、そして、生徒の学力の向上につながっていくのではないかと考える。