

問題のタイトル一覧

三角関数

[2015 センター試験 数ⅡB](#)

[2016 センター試験 数ⅡB](#)

[2017 センター試験 数ⅡB](#)

[2018 センター試験 数ⅡB](#)

[2019 センター試験 数ⅡB](#)

[2020 センター試験 数ⅡB](#)

[2021 共通テスト 数ⅡB](#)

問題431 第1問(必答問題)の一部 (配点 15)

(15 センター試験 数ⅡB)

解答 [1] Oを原点とする座標平面上の2点 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta+\cos7\theta, 2\sin\theta+\sin7\theta)$ を考える。ただし, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とする。

(1) $OP = \boxed{2}$, $PQ = \boxed{1}$ である。また

$$\begin{aligned} OQ^2 &= \boxed{5} + \boxed{4} (\cos7\theta \cos\theta + \sin7\theta \sin\theta) \\ &= \boxed{5} + \boxed{4} \cos(\boxed{6}\theta) \end{aligned} \quad \text{である。}$$

よって, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で, OQ は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{4}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{5}}$ をとる。

(2) 3点O, P, Qが一直線上にあるような θ の値を求めよう。

直線OPを表す方程式は $\boxed{3}$ である。 $\boxed{ク}$ に当てはまるものを, 次の①~③のうちから一つ選べ。

① $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 0$ ① $(\sin\theta)x + (\cos\theta)y = 0$

② $(\cos\theta)x - (\sin\theta)y = 0$ ③ $(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$

このことにより, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で, 3点O, P, Q が一直線上にあるのは

$\theta = \frac{\pi}{\boxed{6}}$ のときであることがわかる。

(3) $\angle OQP$ が直角となるのは $OQ = \sqrt{\boxed{3}}$ のときである。したがって,

$\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で, $\angle OQP$ が直角となるのは $\theta = \frac{\boxed{2}}{\boxed{9}}\pi$ のときである。

解説 [1]

(1) $OP = 2$, $PQ = 1$ である。また

$$\begin{aligned} OQ^2 &= (2\cos\theta + \cos7\theta)^2 + (2\sin\theta + \sin7\theta)^2 \\ &= 5 + 4(\cos7\theta \cos\theta + \sin7\theta \sin\theta) \\ &= 5 + 4\cos(7\theta - \theta) \\ &= 5 + 4\cos6\theta \end{aligned}$$

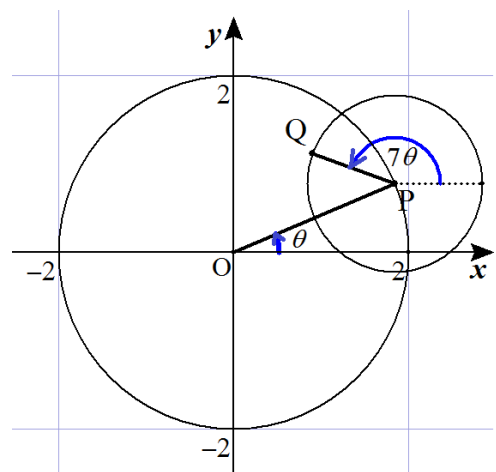
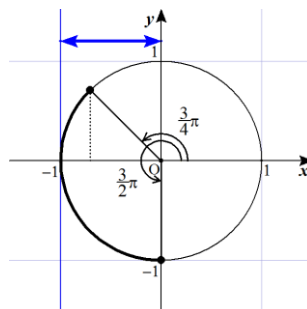
$$\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ より, } \frac{3}{4}\pi \leq 6\theta \leq \frac{3}{2}\pi$$

よって, $-1 \leq \cos6\theta \leq 0$ より,

$$6\theta = \frac{3}{2}\pi \quad \text{つまり,}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき,}$$

OQ は最大値 $\sqrt{5}$



解説 (2) 直線OPを表す方程式は $y = (\tan \theta)x$ つまり, $y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} x$ より,

③ $(\sin \theta)x - (\cos \theta)y = 0$ である。

3点O, P, Qが一直線上にあるとき, 点Q($2\cos \theta + \cos 7\theta$, $2\sin \theta + \sin 7\theta$) は直線 $(\sin \theta)x - (\cos \theta)y = 0$ 上にあるから,

$$(2\cos \theta + \cos 7\theta)\sin \theta - (2\sin \theta + \sin 7\theta)\cos \theta = 0$$

$$\sin 7\theta \cos \theta - \cos 7\theta \sin \theta = 0$$

$$\sin(7\theta - \theta) = 0$$

$$\sin 6\theta = 0$$

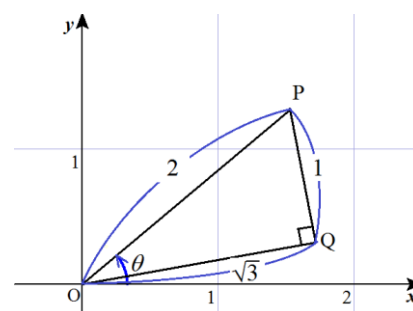
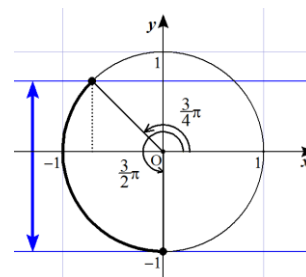
$$\frac{3}{4}\pi \leq 6\theta \leq \frac{3}{2}\pi \text{ であるから, } 6\theta = \pi \text{ よって, } \theta = \frac{\pi}{6}$$

(3) $\angle OQP$ が直角となるのは, 図より, $OQ = \sqrt{3}$ のときである。このとき,

$$OQ^2 = 5 + 4\cos 6\theta = 3 \text{ より, } \cos 6\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}\pi \leq 6\theta \leq \frac{3}{2}\pi \text{ であるから,}$$

$$6\theta = \frac{4}{3}\pi \text{ よって, } \theta = \frac{2}{9}\pi$$



[問題431](#) →

問題432 第1問(必答問題)の一部 (配点 15)

(16 センター試験 数ⅡB)

解答 [2] k を正の整数として

$$\cos^2 x - \sin^2 x + k \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots ①$$

を満たす x について考える。(1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で① を満たす x の個数について考えよう。① の両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけ、2倍角の公式を用いて変形すると

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{4} - k \right) \cos 2x = 0 \quad \dots\dots\dots ②$$

を得る。したがって、 k の値に関係なく、 $x = \frac{\pi}{4}$ のときはつねに① が成り立つ。また、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \sin^2 2x \leq 1$ であるから、 $k > \frac{1}{4}$ のとき、① を満たす x は $\frac{\pi}{4}$ のみである。一方、 $0 < k < \frac{1}{4}$ のとき、① を満たす x の個数は **3** 個であり、 $k = \frac{1}{4}$ のときは **1** 個である。(2) $k = \frac{4}{25}$ とし、 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で① を満たす x について考えよう。② により $\sin 2x = \frac{4}{5}$ であるから、 $\cos 2x = \frac{-3}{5}$ である。したがって、 $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ である。**解説** [2] $\cos^2 x - \sin^2 x + k \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots ①$ (1) ① の両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけると、

$$(\cos^2 x - \sin^2 x) \sin^2 x \cos^2 x + k (\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$$

$$\frac{1}{4} \sin^2 2x \cos 2x - k \cos 2x = 0 \quad \text{より、}$$

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{4} - k \right) \cos 2x = 0 \quad \dots\dots\dots ②$$

 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ より、 $0 < 2x < \pi$ であるから、② は $\cos 2x = 0$ $2x = \frac{\pi}{2}$ つまり、 $x = \frac{\pi}{4}$ のとき、常に成り立つ。また、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、 $0 < 2x < \pi$ より、 $0 < \sin^2 2x \leq 1$ であるから、

解説

・ $k > \frac{1}{4}$ のとき、① を満たすのは、 $x = \frac{\pi}{4}$ のみである。

・ $0 < k < \frac{1}{4}$ のとき、 $0 < 2x < \pi$ より、 $\sin^2 2x = 4k$ つまり、 $\sin 2x = 2\sqrt{k}$ の解は
2個あり、しかも $2x = \frac{\pi}{2}$ つまり、 $x = \frac{\pi}{4}$ とは異なるので、① を満たす x は、3個。

・ $k = \frac{1}{4}$ のとき、 $\sin 2x = 1$ 、 $\cos 2x = 0$ を満たすのは、 $x = \frac{\pi}{4}$ なので、1個。

(2) $k = \frac{4}{25}$ のとき、② は、 $\left(\sin^2 2x - \frac{16}{25}\right)\cos 2x = 0$ (ただし、 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$) より、

$$\sin 2x = \frac{4}{5} \quad \left(\frac{\pi}{2} < 2x < \pi \text{ より、}\cos 2x < 0 \text{ である。}\right)$$

$$\text{よって、}\cos 2x = -\frac{3}{5} \text{ より、} 2\cos^2 x - 1 = -\frac{3}{5}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5} \text{ で、}\cos x > 0 \text{ より、}\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ である。}$$

[問題432](#) →

問題433 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(17 センター試験 数ⅡB)

解答 [1] 連立方程式

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{4}{15} & \dots\dots\dots ① \\ \cos \alpha \cos \beta = -\frac{2\sqrt{15}}{15} & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

を考える。ただし、 $0 \leq \alpha \leq \pi$ 、 $0 \leq \beta \leq \pi$ であり、 $\alpha < \beta$ かつ

$$|\cos \alpha| \geq |\cos \beta| \quad \dots\dots\dots ③$$

とする。このとき、 $\cos \alpha$ と $\cos \beta$ の値を求めよう。

2倍角の公式を用いると、① から

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{17}{15}$$

が得られる。また、② から、 $\cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{4}{15}$ である。

したがって、条件③を用いると

$$\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos^2 \beta = \frac{1}{3} \quad \text{である。}$$

よって、② と条件 $0 \leq \alpha \leq \pi$ 、 $0 \leq \beta \leq \pi$ 、 $\alpha < \beta$ から

$$\cos \alpha = \frac{2}{5} \sqrt{5}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{3} \sqrt{3} \quad \text{である。}$$

解説 [1] ① より、 $(2\cos^2 \alpha - 1) + (2\cos^2 \beta - 1) = \frac{4}{15}$

$$2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = \frac{34}{15} \quad \text{よって、} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{17}{15}$$

$$\text{また、② より、} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{4}{15}$$

よって、 $\cos^2 \alpha$ 、 $\cos^2 \beta$ を解とする2次方程式を、 $x^2 - \frac{17}{15}x + \frac{4}{15} = 0$ とおくと、

$$15x^2 - 17x + 4 = (3x - 1)(5x - 4) = 0 \quad \text{より、} x = \frac{1}{3}, \frac{4}{5}$$

$$\text{よって、} \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos^2 \beta = \frac{1}{3}$$

また、② と条件 $0 \leq \alpha \leq \pi$ 、 $0 \leq \beta \leq \pi$ 、 $\alpha < \beta$ から、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ なので、

$$\cos \alpha > 0, \quad \cos \beta < 0 \quad \text{よって、} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

問題433→

問題434 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(18 センター試験 数ⅡB)

解答 [1]

(1) 1 ラジアンとは, $\boxed{2}$ のことである。 $\boxed{ア}$ に当てはまるものを, 次の ①～③ のうちから一つ選べ。

- ① 半径が1, 面積が1の扇形の中心角の大きさ
 ② 半径が π , 面積が1の扇形の中心角の大きさ
 ③ 半径が1, 弧の長さが1の扇形の中心角の大きさ
 ④ 半径が π , 弧の長さが1の扇形の中心角の大きさ

(2) 144° を弧度で表すと $\frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}\pi$ ラジアンである。また, $\frac{23}{12}\pi$ ラジアンを度で表すと $\boxed{345}^\circ$ である。

(3) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ の範囲で

$$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす θ の値の範囲を求めよう。

$x = \theta + \frac{\pi}{5}$ とおくと, ① は

$$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{\boxed{6}}\right) = 1$$

と表せる。加法定理を用いると, この式は

$$\sin x - \sqrt{\boxed{3}} \cos x = 1$$

となる。さらに, 三角関数の合成を用いると

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{\boxed{3}}\right) = \frac{1}{\boxed{2}}$$

と変形できる。 $x = \theta + \frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ だから, $\theta = \frac{\boxed{29}}{\boxed{30}}\pi$ である。

解説 [1]

(1) 1 ラジアンとは, ② 半径が1, 弧の長さが1の扇形の中心角の大きさ である。

(2) $144^\circ = \frac{144}{180}\pi = \frac{4}{5}\pi$ ラジアン, $\frac{23}{12}\pi$ ラジアン $= \frac{23}{12} \times 180^\circ = 345^\circ$

($\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ$ である。)

(3) $2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$ において,

$x = \theta + \frac{\pi}{5}$ とおくと, ① は, $2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

解説

加法定理を用いると、 $2\sin x - 2\left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right) = 1$ より、

$$2\sin x - (\sqrt{3}\cos x + \sin x) = 1$$

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$$

三角関数の合成を用いると、

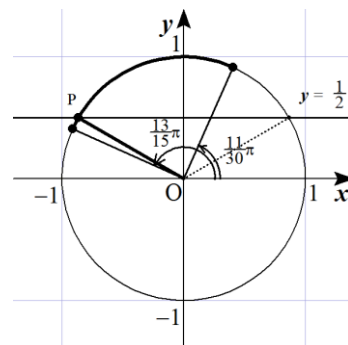
$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \text{より、} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x = \theta + \frac{\pi}{5} \text{ のとき、} \quad x - \frac{\pi}{3} = \left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - \frac{\pi}{3} = \theta - \frac{2}{15}\pi$$

であるから、

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ のとき、} \quad \frac{11}{30}\pi \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{13}{15}\pi$$

$$\text{よって、} \quad x - \frac{\pi}{3} = \theta - \frac{2}{15}\pi = \frac{5}{6}\pi \quad \text{より、} \quad \theta = \frac{29}{30}\pi$$



[問題434](#) →

問題435 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(19 センター試験 数ⅡB)

解答〔1〕関数 $f(\theta) = 3\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$ を考える。

$$(1) f(0) = \boxed{-1}, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{2} + \sqrt{\boxed{3}} \text{ である。}$$

$$(2) 2倍角の公式を用いて計算すると, $\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + \boxed{1}}{\boxed{2}}$ となる。$$

さらに, $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ を用いて $f(\theta)$ を表すと

$$f(\theta) = \boxed{2}\sin 2\theta - \boxed{2}\cos 2\theta + \boxed{1} \dots\dots\dots ①$$

となる。

- (3) θ が $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くとき, 関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m とそのときの θ の値を求めよう。三角関数の合成を用いると, ① は

$$f(\theta) = \boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{\boxed{4}}\right) + \boxed{1}$$

と変形できる。したがって, $m = \boxed{3}$ である。また, $0 \leq \theta \leq \pi$ において, $f(\theta) = \boxed{3}$ となる θ の値は, 小さい順に,

$$\frac{\pi}{\boxed{4}}, \frac{\pi}{\boxed{2}} \text{ である。}$$

解説〔1〕 $f(\theta) = 3\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$ のとき,

$$(1) f(0) = -1, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \sqrt{3} - \frac{1}{4} = 2 + \sqrt{3}$$

$$(2) 2倍角の公式を用いて計算すると, $\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$ であり,$$

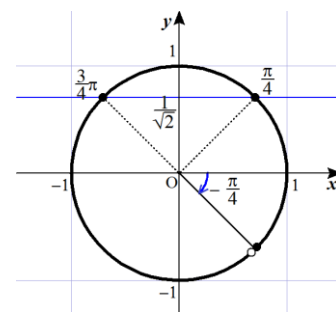
$$f(\theta) = 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 2\sin 2\theta - \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = 2\sin 2\theta - 2\cos 2\theta + 1$$

$$(3) 三角関数の合成を用いると, $f(\theta) = 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ より,$$

 $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, $1 - 2\sqrt{2} \leq f(\theta) \leq 1 + 2\sqrt{2}$ であるから, $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値は, $m = 3$ である。また, $2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 3$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とおくと,

$$\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ であり, } -\frac{\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi \text{ より,}$$

$$2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \text{ よって, } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$$



問題435→

問題436 第1問(必答問題)の一部 (配点 15)

(20 センター試験 数ⅡB)

解答 [1]

(1) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき,

$$\sin \theta > \sqrt{3} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる θ の値の範囲を求めよう。加法定理を用いると

$$\sqrt{3} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}} \cos \theta + \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} \sin \theta$$

である。よって、三角関数の合成を用いると、 $\textcircled{1}$ は

$$\sin \left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{3}} \right) < 0$$

と変形できる。したがって、求める範囲は

$$\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \pi < \theta < \frac{\boxed{5}}{\boxed{3}} \pi \quad \text{である。}$$

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とし、 k を実数とする。 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ は x の2次方程式 $25x^2 - 35x + k = 0$ の解であるとする。このとき、解と係数の関係により $\sin \theta + \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ の値を考えれば、 $k = \boxed{12}$ であることがわかる。

$$\text{さらに、} \theta \text{ が } \sin \theta \geq \cos \theta \text{ を満たすとする、} \sin \theta = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}, \cos \theta = \frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$$

である。このとき、 θ は $\boxed{3}$ を満たす。 $\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを、次の $\textcircled{0} \sim \textcircled{5}$ のうちから一つ選べ。

- $\textcircled{0} \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{12}$
 $\textcircled{1} \quad \frac{\pi}{12} \leq \theta < \frac{\pi}{6}$
 $\textcircled{2} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{4}$
- $\textcircled{3} \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{3}$
 $\textcircled{4} \quad \frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{5}{12}\pi$
 $\textcircled{5} \quad \frac{5}{12}\pi \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

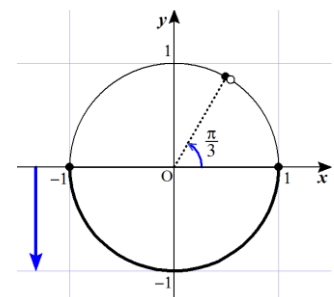
解説 (1) $\sqrt{3} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} \left(\cos \theta \cos \frac{\pi}{3} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{3}{2} \sin \theta$ より、 $\textcircled{1}$ は

$$\sin \theta > \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{3}{2} \sin \theta \quad \text{よって、} \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta < 0$$

三角関数の合成を用いて、 $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) < 0$ と変形できる。

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi \quad \text{であるから、図より、}$$

$$\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi \quad \text{よって、} \frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

(2) $25x^2 - 35x + k = 0$ の2つの解が $\sin \theta$ と $\cos \theta$ であるから、解と係数の関係により

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{k}{25}$$

解説

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$ に代入して,

$$\frac{49}{25} = 1 + \frac{2}{25}k \quad \text{より, } k = 12$$

このとき, $25x^2 - 35x + 12 = 0$ を解くと,

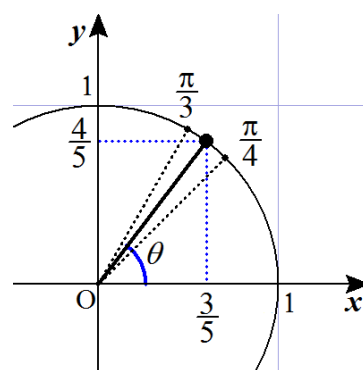
$$(5x - 3)(5x - 4) = 0 \quad \text{より, } x = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

よって, θ が $\sin\theta \geq \cos\theta$ を満たすとする,

$$\sin\theta = \frac{4}{5}, \quad \cos\theta = \frac{3}{5} \quad \text{であり,}$$

θ は $\sin\theta = \frac{4}{5} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ より, $\theta > \frac{\pi}{4}$, $\cos\theta = \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ より, $\theta < \frac{\pi}{3}$ であるから,

$$\textcircled{3} \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{3} \quad \text{を満たす。}$$



[問題436](#) →

問題437 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(21 共通テスト 数ⅡB)

解答 [1]

(1) 次の問題Aについて考えよう。

問題A 関数 $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値を求めよ。

$$\sin \frac{\pi}{\boxed{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{\boxed{3}} = \frac{1}{2}$$

であるから、三角関数の合成により

$$y = \boxed{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{3}} \right)$$

と変形できる。よって、 y は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{6}}$ で最大値 $\boxed{2}$ をとる。

(2) p を定数とし、次の問題Bについて考えよう。

問題B 関数 $y = \sin \theta + p \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値を求めよ。

(i) $p = 0$ のとき、 y は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{2}}$ で最大値 $\boxed{1}$ をとる。

(ii) $p > 0$ のときは、加法定理 $\cos(\theta - \alpha) = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$ を用いると

$$y = \sin \theta + p \cos \theta = \sqrt{\boxed{9}} \cos(\theta - \alpha)$$

と表すことができる。ただし、 α は

$$\sin \alpha = \frac{\boxed{1}}{\sqrt{\boxed{9}}}, \quad \cos \alpha = \frac{\boxed{3}}{\sqrt{\boxed{9}}}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。このとき、 y は $\theta = \boxed{1}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{9}}$ をとる。

(iii) $p < 0$ のとき、 y は $\theta = \boxed{2}$ で最大値 $\boxed{1}$ をとる。

キ ~ ケ , サ , ス の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | |
|-----------|-------------|-------------|
| ① -1 | ① 1 | ② $-p$ |
| ③ p | ④ $1-p$ | ⑤ $1+p$ |
| ⑥ $-p^2$ | ⑦ p^2 | ⑧ $1-p^2$ |
| ⑨ $1+p^2$ | ⑨ $(1-p)^2$ | ⑩ $(1+p)^2$ |

コ , シ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | |
|-------|------------|-------------------|
| ① 0 | ① α | ② $\frac{\pi}{2}$ |
|-------|------------|-------------------|

解説 (1) $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ であるから,

$$y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) = 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

よって, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, y は $\theta = \frac{\pi}{6}$ で最大値 2 をとる。

(2) 関数 $y = \sin \theta + p \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) について,

(i) $p = 0$ のとき, y は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で最大値 1 をとる。

(ii) $p > 0$ のとき, 加法定理を用いると

$$y = \sin \theta + p \cos \theta = \sqrt{1+p^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \sin \theta + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cos \theta \right) = \sqrt{1+p^2} \cos(\theta - \alpha)$$

$$(\text{ただし, } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

よって, $\theta - \alpha = 0$ つまり, $\theta = \alpha$ のとき, y は最大値 $\sqrt{1+p^2}$ をとる。

(iii) $p < 0$ のとき, $\sin \theta$, $p \cos \theta$ は, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲でともに増加関数になるので,

y は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で最大値 1 をとる。

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5} \quad \text{であり,}$$

$$\theta \text{ は } \sin \theta = \frac{4}{5} > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より, } \theta > \frac{\pi}{4}, \quad \cos \theta = \frac{3}{5} > \frac{1}{2} \text{ より, } \theta < \frac{\pi}{3} \text{ であるから,}$$

③ $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{3}$ を満たす。

[問題 4 3 7](#) →

問 題 編

問題431 第1問(必答問題)の一部 (配点 15)

(15 センター試験 数ⅡB)

問題 [1] Oを原点とする座標平面上の2点 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta+\cos7\theta, 2\sin\theta+\sin7\theta)$ を考える。ただし, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とする。

(1) $OP = \boxed{\text{ア}}$, $PQ = \boxed{\text{イ}}$ である。また

$$\begin{aligned} OQ^2 &= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} (\cos7\theta \cos\theta + \sin7\theta \sin\theta) \\ &= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} \cos(\boxed{\text{オ}} \theta) \quad \text{である。} \end{aligned}$$

よって, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で, OQ は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。

(2) 3点O, P, Qが一直線上にあるような θ の値を求めよう。

直線OPを表す方程式は $\boxed{\text{ク}}$ である。 $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを, 次の ①~③のうちから一つ選べ。

① $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 0$ ① $(\sin\theta)x + (\cos\theta)y = 0$

② $(\cos\theta)x - (\sin\theta)y = 0$ ③ $(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$

このことにより, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で, 3点O, P, Q が一直線上にあるのは

$\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであることがわかる。

(3) $\angle OQP$ が直角となるのは $OQ = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のときである。したがって,

$\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で, $\angle OQP$ が直角となるのは $\theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi$ のときである。

問題432 第1問(必答問題)の一部 (配点 15)

(16 センター試験 数ⅡB)

問題 [2] k を正の整数として

$$\cos^2 x - \sin^2 x + k \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots ①$$

を満たす x について考える。(1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で① を満たす x の個数について考えよう。① の両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけ、2倍角の公式を用いて変形すると

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{\boxed{\text{チ}}} - k \right) \cos 2x = 0 \quad \dots\dots\dots ②$$

を得る。したがって、 k の値に関係なく、 $x = \frac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときはつねに① が成り立つ。また、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \sin^2 2x \leq 1$ であるから、 $k > \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき、① を満たす x は $\frac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}$ のみである。一方、 $0 < k < \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき、① を満たす x の個数は $\boxed{\text{ナ}}$ 個であり、 $k = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のときは $\boxed{\text{ニ}}$ 個である。(2) $k = \frac{4}{25}$ とし、 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で① を満たす x について考えよう。② により $\sin 2x = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ であるから、 $\cos 2x = \frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。したがって、 $\cos x = \frac{\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ である。

問題433 第1問（必答問題）の一部（配点 15）

（17 センター試験 数ⅡB）

問題〔1〕連立方程式

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{4}{15} & \dots\dots\dots ① \\ \cos \alpha \cos \beta = -\frac{2\sqrt{15}}{15} & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

を考える。ただし、 $0 \leq \alpha \leq \pi$ ， $0 \leq \beta \leq \pi$ であり、 $\alpha < \beta$ かつ

$$|\cos \alpha| \geq |\cos \beta| \quad \dots\dots\dots ③$$

とする。このとき、 $\cos \alpha$ と $\cos \beta$ の値を求めよう。

2倍角の公式を用いると、① から

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$$

が得られる。また、② から、 $\cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{\boxed{\text{オ}}}{15}$ である。

したがって、条件③を用いると

$$\cos^2 \alpha = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \quad \cos^2 \beta = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \quad \text{である。}$$

よって、② と条件 $0 \leq \alpha \leq \pi$ ， $0 \leq \beta \leq \pi$ ， $\alpha < \beta$ から

$$\cos \alpha = \frac{\boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}, \quad \cos \beta = \frac{\boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}} \quad \text{である。}$$

問題434 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(18 センター試験 数ⅡB)

問題 [1]

(1) 1 ラジアンとは, $\boxed{\text{ア}}$ のことである。 $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを, 次の ①～③ のうちから一つ選べ。

- ① 半径が1, 面積が1の扇形の中心角の大きさ
- ② 半径が π , 面積が1の扇形の中心角の大きさ
- ③ 半径が1, 弧の長さが1の扇形の中心角の大きさ
- ④ 半径が π , 弧の長さが1の扇形の中心角の大きさ

(2) 144° を弧度で表すと $\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \pi$ ラジアンである。また, $\frac{23}{12} \pi$ ラジアンを度で表すと $\boxed{\text{エオカ}}^\circ$ である。

(3) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ の範囲で

$$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = 1 \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

を満たす θ の値の範囲を求めよう。

$x = \theta + \frac{\pi}{5}$ とおくと, ① は

$$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}\right) = 1$$

と表せる。加法定理を用いると, この式は

$$\sin x - \sqrt{\boxed{\text{ク}}} \cos x = 1$$

となる。さらに, 三角関数の合成を用いると

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right) = \frac{1}{\boxed{\text{コ}}}$$

と変形できる。 $x = \theta + \frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ だから, $\theta = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}} \pi$ である。

問題435 第1問（必答問題）の一部（配点 15）

（19 センター試験 数ⅡB）

問題〔1〕関数 $f(\theta) = 3\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$ を考える。

$$(1) \quad f(0) = \boxed{\text{アイ}}, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}} \quad \text{である。}$$

$$(2) \quad 2\text{倍角の公式を用いて計算すると, } \cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \quad \text{となる。}$$

さらに, $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ を用いて $f(\theta)$ を表すと

$$f(\theta) = \boxed{\text{キ}} \sin 2\theta - \boxed{\text{ク}} \cos 2\theta + \boxed{\text{ケ}} \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。

- (3) θ が $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くとき, 関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m とそのときの θ の値を求めよう。三角関数の合成を用いると, ① は

$$f(\theta) = \boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}} \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}\right) + \boxed{\text{ケ}}$$

と変形できる。したがって, $m = \boxed{\text{ス}}$ である。また, $0 \leq \theta \leq \pi$ において, $f(\theta) = \boxed{\text{ス}}$ となる θ の値は, 小さい順に,

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}, \quad \frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}} \quad \text{である。}$$

問題436 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(20 センター試験 数ⅡB)

問題 [1]

(1) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき,

$$\sin \theta > \sqrt{3} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる θ の値の範囲を求めよう。加法定理を用いると

$$\sqrt{3} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}} \cos \theta + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}} \sin \theta$$

である。よって、三角関数の合成を用いると、①は

$$\sin \left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}} \right) < 0$$

と変形できる。したがって、求める範囲は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \pi < \theta < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \pi \text{ である。}$$

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とし、 k を実数とする。 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ は x の2次方程式 $25x^2 - 35x + k = 0$ の解であるとする。このとき、解と係数の関係により $\sin \theta + \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ の値を考えれば、 $k = \boxed{\text{ケコ}}$ であることがわかる。さらに、 θ が $\sin \theta \geq \cos \theta$ を満たすとする、 $\sin \theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$, $\cos \theta = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。このとき、 θ は $\boxed{\text{ソ}}$ を満たす。 $\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

① $0 \leq \theta < \frac{\pi}{12}$

② $\frac{\pi}{12} \leq \theta < \frac{\pi}{6}$

③ $\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{4}$

④ $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{3}$

⑤ $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{5}{12}\pi$

⑥ $\frac{5}{12}\pi \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

問題437 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(21 共通テスト 数ⅡB)

問題 [1]

(1) 次の問題Aについて考えよう。

問題A 関数 $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値を求めよ。

$$\sin \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} = \frac{1}{2}$$

であるから、三角関数の合成により

$$y = \boxed{\text{イ}} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} \right)$$

と変形できる。よって、 y は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

(2) p を定数とし、次の問題Bについて考えよう。

問題B 関数 $y = \sin \theta + p \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値を求めよ。

(i) $p = 0$ のとき、 y は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

(ii) $p > 0$ のときは、加法定理 $\cos(\theta - \alpha) = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$ を用いると

$$y = \sin \theta + p \cos \theta = \sqrt{\boxed{\text{キ}}} \cos(\theta - \alpha)$$

と表すことができる。ただし、 α は

$$\sin \alpha = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}, \quad \cos \alpha = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。このとき、 y は $\theta = \boxed{\text{コ}}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

(iii) $p < 0$ のとき、 y は $\theta = \boxed{\text{シ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる。

$\boxed{\text{キ}} \sim \boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{ス}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | |
|-----------|-------------|-------------|
| ① -1 | ① 1 | ② $-p$ |
| ③ p | ④ $1-p$ | ⑤ $1+p$ |
| ⑥ $-p^2$ | ⑦ p^2 | ⑧ $1-p^2$ |
| ⑨ $1+p^2$ | ⑨ $(1-p)^2$ | ⑩ $(1+p)^2$ |

$\boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{シ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | |
|-------|------------|-------------------|
| ① 0 | ① α | ② $\frac{\pi}{2}$ |
|-------|------------|-------------------|