

問題のタイトル一覧

指数関数・対数関数

[2015 センター試験 数ⅡB](#)

[2016 センター試験 数ⅡB](#)

[2017 センター試験 数ⅡB](#)

[2018 センター試験 数ⅡB](#)

[2019 センター試験 数ⅡB](#)

[2020 センター試験 数ⅡB](#)

[2021 共通テスト 数ⅡB](#)

[2022 共通テスト 数ⅡB](#)

問題532 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(15 センター試験 数ⅡB)

解答 [2] a, b を正の実数とする。連立方程式

$$(*) \begin{cases} x\sqrt{y^3} = a \\ \sqrt[3]{x} y = b \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y について考えよう。(1) 連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x, y は

$$x = a^{\boxed{2}} b^{\boxed{-3}}, y = a^p b^{\boxed{2}} \text{ となる。ただし,}$$

$$p = \frac{\boxed{-2}}{\boxed{3}} \text{ である。}$$

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする。 a が $a > 0$ の範囲を動くとき、連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x, y について、 $x + y$ の最小値を求めよう。 $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ であるから、 $(*)$ を満たす正の実数 x, y は、 a を用いて

$$x = 2^{\boxed{-3}} a^{\boxed{-2}}, y = 2^{\boxed{2}} a^{\boxed{2}} \text{ と表される。}$$

したがって、相加平均と相乗平均の関係を利用すると、

 $x + y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{2}}$ をとることがわかる。ただし

$$q = \frac{\boxed{-5}}{\boxed{4}} \text{ である。}$$

解説 (1) $xy^{\frac{3}{2}} = a \dots\dots\dots ①, \quad x^{\frac{1}{3}}y = b \dots\dots\dots ②$ とおくと、① の両辺を2乗して、 $x^2y^3 = a^2 \dots\dots\dots ①'$ ② の両辺を3乗して、 $xy^3 = b^3 \dots\dots\dots ②'$ ①'÷②' より、 $x = a^2b^{-3}$ ②' に代入して、 $y = bx^{-\frac{1}{3}} = b(a^2b^{-3})^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{2}{3}}b^2$ (2) $b = 2\sqrt[3]{a^4} = 2a^{\frac{4}{3}}$ のとき、

$$x = a^2b^{-3} = a^2(2^{-3}a^{-4}) = 2^{-3}a^{-2}, \quad y = a^{-\frac{2}{3}}b^2 = a^{-\frac{2}{3}}(2^2a^{\frac{8}{3}}) = 2^2a^2 \text{ より,}$$

$$x + y = \frac{1}{8a^2} + 4a^2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{8a^2} \cdot 4a^2} = \sqrt{2}$$

(等号は、 $\frac{1}{8a^2} = 4a^2$ より、 $a^4 = 2^{-5}$ つまり、 $a = 2^{-\frac{5}{4}}$ のとき)

問題532→

問題533 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(16 センター試験 数ⅡB)

解答 [1]

$$(1) 8^{\frac{5}{6}} = \boxed{4} \sqrt{\boxed{2}}, \log_{27} \frac{1}{9} = \frac{\boxed{-2}}{\boxed{3}} \text{ である。}$$

$$(2) y = 2^x \text{ のグラフと } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ のグラフは } \boxed{2} \text{ である。}$$

$$y = 2^x \text{ のグラフと } y = \log_2 x \text{ のグラフは } \boxed{3} \text{ である。}$$

$$y = \log_2 x \text{ のグラフと } y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ のグラフは } \boxed{1} \text{ である。}$$

$$y = \log_2 x \text{ のグラフと } y = \log_2 \frac{1}{x} \text{ のグラフは } \boxed{1} \text{ である。}$$

カ ～ **ケ** に当てはまるものを、次の ①～③ のうちから一つずつ選べ。

ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

- ① 同一のもの ① x 軸に関して対称
 ② y 軸に関して対称 ③ 直線 $y = x$ に関して対称

$$(3) x > 0 \text{ の範囲における関数 } y = \left(\log_2 \frac{x}{4}\right)^2 - 4\log_4 x + 3 \text{ の最小値を求めよう。}$$

$t = \log_2 x$ とおく。このとき、 $y = t^2 - \boxed{6}t + \boxed{7}$ である。また、
 また、 x が $x > 0$ の範囲を動くとき、 t のとり得る値の範囲は **3** である。

シ に当てはまるものを、次の ①～③ のうちから一つずつ選べ。

- ① $t > 0$ ① $t > 1$
 ② $t > 0$ かつ $t \neq 1$ ③ 実数全体

したがって、 y は $t = \boxed{3}$ のとき、すなわち $x = \boxed{8}$ のとき、
 最小値 **-2** をとる。

$$\text{解説 (1) } 8^{\frac{5}{6}} = (2^3)^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}, \quad \log_{27} \frac{1}{9} = \frac{\log_3 \frac{1}{9}}{\log_3 27} = -\frac{2}{3}$$

$$(2) y = 2^x \text{ のグラフと } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} \text{ のグラフは,} \quad \text{② } y \text{ 軸に関して対称}$$

$$y = 2^x \text{ のグラフと } y = \log_2 x \text{ のグラフは,} \quad \text{③ 直線 } y = x \text{ に関して対称}$$

$$y = \log_2 x \text{ のグラフと } y = \log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x \text{ のグラフは,} \quad \text{① } x \text{ 軸に関して対称}$$

$$y = \log_2 x \text{ のグラフと } y = \log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x \text{ のグラフは,} \quad \text{① } x \text{ 軸に関して対称}$$

解説 (3) $x > 0$ のとき,

$$y = \left(\log_2 \frac{x}{4} \right)^2 - 4 \log_4 x + 3 = (\log_2 x - 2)^2 - 4 \cdot \frac{\log_2 x}{2} + 3 = (\log_2 x)^2 - 6 \log_2 x + 7 \quad \text{より,}$$

$t = \log_2 x$ とおくと, $y = t^2 - 6t + 7 = (t - 3)^2 - 2$ である。

また, x が $x > 0$ の範囲を動くとき, t のとり得る値の範囲は, ③ 実数全体

したがって, y は $t = 3$ のとき, すなわち, $x = 8$ のとき,

最小値 -2 をとる。

[問題533](#) →

問題534 第1問（必答問題）の一部（配点 15）

（17 センター試験 数ⅡB）

解答〔2〕座標平面上に点 $A(0, \frac{3}{2})$ をとり、関数 $y = \log_2 x$ のグラフ上に2点 $B(p, \log_2 p)$,

$C(q, \log_2 q)$ をとる。線分 AB を1:2に内分する点が C であるとき、 p, q の値を求めよう。

真数の条件により、 $p > \boxed{0}$ ， $q > \boxed{0}$ である。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底といい、 b を真数という。

線分 AB を1:2に内分する点の座標は、 p を用いて

$$\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} p, \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} \log_2 p + \boxed{1} \right)$$

と表される。これが C の座標と一致するので

$$\begin{cases} \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} p = q & \dots\dots\dots \textcircled{4} \\ \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} \log_2 p + \boxed{1} = \log_2 q & \dots\dots\dots \textcircled{5} \end{cases}$$

が成り立つ。 $\textcircled{5}$ は

$$p = \frac{\boxed{1}}{\boxed{8}} q^{\boxed{3}} \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

と変形できる。 $\textcircled{4}$ と $\textcircled{6}$ を連立させた方程式を解いて、 $p > \boxed{0}$ ， $q > \boxed{0}$ に注意すると

$$p = \boxed{6} \sqrt{\boxed{6}}, \quad q = \boxed{2} \sqrt{\boxed{6}} \text{ である。}$$

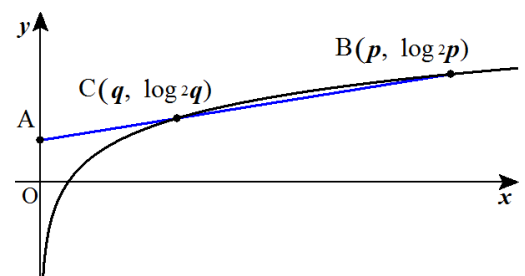
また、 C の y 座標 $\log_2 (\boxed{2} \sqrt{\boxed{6}})$ の値を、小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めると、 $\boxed{6}$ である。 $\boxed{\wedge}$ に当てはまるものを、次の①～⑥のうちから一つ選べ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ ， $\log_{10} 3 = 0.4771$ ， $\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

- | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ① 0.3 | ① 0.6 | ② 0.9 | ③ 1.3 | ④ 1.6 | ⑤ 1.9 |
| ⑥ 2.3 | ⑦ 2.6 | ⑧ 2.9 | ⑨ 3.3 | Ⓐ 3.6 | Ⓑ 3.9 |

解説〔2〕点 $A(0, \frac{3}{2})$ と、関数 $y = \log_2 x$ のグラフ上の

2点 $B(p, \log_2 p)$ ， $C(q, \log_2 q)$ について、 $p > 0$ ， $q > 0$ であり、線分 AB を1:2に内分する点の座標 (x, y) は、 $x = \frac{2 \times 0 + 1 \times p}{1 + 2} = \frac{p}{3}$ ，

$$y = \frac{2 \times \frac{3}{2} + 1 \times \log_2 p}{1 + 2} = \frac{1}{3} \log_2 p + 1$$



解説

これがCの座標と一致するので,

$$\frac{p}{3} = q \cdots \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad \frac{1}{3} \log_2 p + 1 = \log_2 q \cdots \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \text{ より, } \log_2 p = 3 \log_2 q - 3 \text{ であるから, } p = \frac{1}{8} q^3$$

また, $\textcircled{4}$ より, $p = 3q$ であるから,

$$\frac{1}{8} q^3 = 3q \text{ とおくと, } q^3 - 24q = q(q^2 - 24) = 0 \text{ であり, } q > 0 \text{ より, } q = 2\sqrt{6}$$

よって, $p = 6\sqrt{6}$ である。また,

$$\begin{aligned} \log_2(2\sqrt{6}) &= 1 + \frac{1}{2} \log_2 6 = 1 + \frac{1}{2} (1 + \log_2 3) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \\ &= 1.5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{0.4771}{0.3010} = 1.5 + \frac{0.4771}{0.6020} \doteq 2.3 \quad \text{より, } \textcircled{6} \quad 2.3 \end{aligned}$$

[問題534](#) →

(18 センター試験 数ⅡB)

問題 5 3 5 →

$$\log_3 c \geq \frac{3}{4} \quad \text{すなわち, } c \geq \sqrt[4]{27}$$

問題536 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(19 センター試験 数ⅡB)

解答 [2] 連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(x+2) - 2\log_4(y+3) = -1 & \dots\dots\dots ② \\ \left(\frac{1}{3}\right)^y - 11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0 & \dots\dots\dots ③ \end{cases}$$

を満たす実数 x, y を求めよう。

真数の条件により, x, y のとり得る値の範囲は $\boxed{2}$ である。 $\boxed{2}$ に当てはまるものを, 次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。ただし, 対数 $\log_a b$ に対し, a を底といい, b を真数という。

- ① $x > 0, y > 0$ ① $x > 2, y > 3$ ② $x > -2, y > -3$
 ③ $x < 0, y < 0$ ④ $x < 2, y < 3$ ⑤ $x < -2, y < -3$

底の変換公式により

$$\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{\boxed{2}}$$

である。よって, ② から

$$y = \boxed{2}x + \boxed{1} \quad \dots\dots\dots ④$$

が得られる。

次に, $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおき, ④ を用いて ③ を t の方程式に書き直すと

$$t^2 - \boxed{11}t + \boxed{18} = 0 \quad \dots\dots\dots ⑤$$

が得られる。また, x が $\boxed{\text{タ}}$ における x の範囲を動くとき, t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{0} < t < \boxed{9} \quad \dots\dots\dots ⑥$$

である。⑥ の範囲で方程式⑤ を解くと, $t = \boxed{2}$ になる。したがって, 連立方程式 ②, ③ を満たす実数 x, y の値は

$$x = \log_3 \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}, \quad y = \log_3 \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$

であることがわかる。

解説 [2] 真数の条件により, ② $x > -2, y > -3$ である。

底の変換公式により, $\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{2}$ であるから, ② は,

$$\log_2(x+2) - \log_2(y+3) = -1$$

$$\log_2(x+2) + 1 = \log_2(y+3)$$

$$\text{よって, } y+3 = 2(x+2) \text{ より, } y = 2x+1 \quad \dots\dots\dots ④$$

これを ③ に代入すると,

解説

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} - 11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0 \quad \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - \frac{11}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 6 = 0 \quad \text{より,}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 11\left(\frac{1}{3}\right)^x + 18 = 0 \quad \text{であり, } t = \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{ とおくと,}$$

$$t^2 - 11t + 18 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

また, x が, $x > -2$ の範囲を動くとき, t のとり得る値の範囲は

$$0 < t < 9 \quad \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

である。⑤ は $(t-2)(t-9)=0$ より, ⑥ の条件から, $t=2$ になる。

$$\text{よって, } \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2 \quad \text{の両辺の底が3の対数をとって, } x = -\log_3 2 = \log_3 \frac{1}{2}$$

$$y = 2x + 1 = 2\log_3 \frac{1}{2} + 1 = \log_3 \frac{3}{4}$$

[問題536](#) →

問題537 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(20 センター試験 数ⅡB)

解答 [2]

(1) t は正の実数であり, $t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ を満たすとする。このとき

$$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \boxed{11}$$

である。さらに,

$$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\boxed{13}}, \quad t - t^{-1} = \boxed{-36}$$

である。

(2) x, y は正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leq 5 & \dots\dots\dots ② \\ \log_{81} \frac{y}{x^3} \leq 1 & \dots\dots\dots ③ \end{cases}$$

について考える。

 $X = \log_3 x, Y = \log_3 y$ とおくと, ② は

$$\boxed{2} X + Y \leq \boxed{10} \quad \dots\dots\dots ④$$

と変形でき, ③ は

$$\boxed{3} X - Y \geq \boxed{-4} \quad \dots\dots\dots ⑤$$

と変形できる。

 X, Y が ④ と ⑤ を満たすとき, Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{7}$ である。また, x, y が ②, ③ と $\log_3 y = \boxed{7}$ を同時に満たすとき, x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{5}$ である。解説 (1) $t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ のとき, $t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \left(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}\right)^2 + 2 = 11$ である。さらに,

$$\left(t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}\right)^2 + 4 = 13 \quad \text{より, } t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{13}$$

$$t - t^{-1} = \left(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3\left(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}\right) = -27 - 9 = -36$$

$$t - t^{-1} = \left(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}\right)\left(t^{\frac{2}{3}} + 1 + t^{-\frac{2}{3}}\right) = -3 \times 12 = -36 \quad \text{としてもよい。}$$

(2) $X = \log_3 x, Y = \log_3 y$ とおくと,

$$\text{② は, } X + \frac{1}{2}Y \leq 5 \quad \text{より, } 2X + Y \leq 10 \quad \dots\dots\dots ④$$

$$\text{③ は, } \frac{1}{4}(Y - 3X) \leq 1 \quad \text{より, } 3X - Y \geq -4 \quad \dots\dots\dots ⑤$$

ここで, 連立方程式 $2X + Y = 10 \quad \dots\dots\dots ⑥, 3X - Y = -4 \quad \dots\dots\dots ⑦$ を解くと

$$\text{⑥} + \text{⑦} \quad \text{より, } 5X = 6 \quad \text{よって, } X = \frac{6}{5}$$

解説

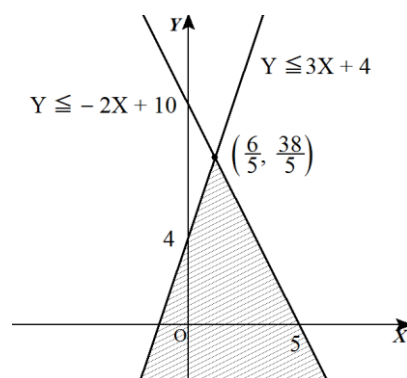
⑥ に代入して, $Y = 10 - 2X = \frac{38}{5}$

よって, X, Y が ④ と ⑤ を満たすとき,
 Y のとり得る最大の整数の値は, $Y = 7$ であり,
 このとき, ④ より, $X \leq \frac{3}{2}$, ⑤ より, $X \geq 1$

よって, $1 \leq \log_3 x \leq \frac{3}{2}$ であるから,

$3 \leq x \leq 3\sqrt{3}$ より, 最大の整数 x は, $x = 5$

[問題 5 3 7](#) →



問題538 第1問(必答問題)の一部 (配点 15)

(21 共通テスト 数ⅡB)

解答 [2] 二つの関数 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ について考える。

(1) $f(0) = \boxed{1}$, $g(0) = \boxed{0}$ である。また, $f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から, $x = \boxed{0}$ で最小値 $\boxed{1}$ をとる。

$g(x) = -2$ となる x の値は $\log_2(\sqrt{\boxed{5}} - \boxed{2})$ である。

(2) 次の ①～④ は, x にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$$f(-x) = \boxed{0} \dots\dots\dots \text{①}$$

$$g(-x) = \boxed{3} \dots\dots\dots \text{②}$$

$$\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = \boxed{1} \dots\dots\dots \text{③}$$

$$g(2x) = \boxed{2} f(x) g(x) \dots\dots\dots \text{④}$$

ト, **ナ** の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

① $f(x)$ ① $-f(x)$ ② $g(x)$ ③ $-g(x)$

(3) 花子さんと太郎さんは, $f(x)$ と $g(x)$ の性質について話している。

花子: ①～④ は三角関数の性質に似ているね。

太郎: 三角関数の加法定理に類似した式 (A) ～ (D) を考えてみたけど, つねに成り立つ式はあるだろうか。

花子: 成り立たない式を見つけるために, 式 (A) ～ (D) の β に何か具体的な値を代入して調べてみたらどうかな。

太郎さんが考えた式

$$f(\alpha - \beta) = f(\alpha) g(\beta) + g(\alpha) f(\beta) \dots\dots\dots \text{(A)}$$

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) f(\beta) + g(\alpha) g(\beta) \dots\dots\dots \text{(B)}$$

$$g(\alpha - \beta) = f(\alpha) f(\beta) + g(\alpha) g(\beta) \dots\dots\dots \text{(C)}$$

$$g(\alpha + \beta) = f(\alpha) g(\beta) - g(\alpha) f(\beta) \dots\dots\dots \text{(D)}$$

(1) (2) で示されたことのいくつかを利用すると, 式 (A) ～ (D) のうち, **1** 以外の三つは成り立たないことがわかる。**1** は左辺と右辺をそれぞれ計算することによって成り立つことが確かめられる。

ネ の解答群

① (A) ① (B) ② (C) ③ (D)

解説 [2] 二つの関数 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ について,

(1) $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ である。また,

$$f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 1 \quad \text{であり, 等号が成り立つのは,}$$

$2^x = 2^{-x}$ より, $2^x = 1$ つまり, $x = 0$ のとき。

よって, $f(x)$ は $x = 0$ で。最小値 1 をとる。

$$g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -2 \quad \text{のとき, } 2^x = t \ (t > 0) \text{ とおくと, } t - \frac{1}{t} = -4 \quad \text{より,}$$

$$t^2 + 4t - 1 = 0 \quad \text{よって, } t = 2^x = -2 + \sqrt{5} \quad \text{より, } x = \log_2(\sqrt{5} - 2)$$

(2) 次の関係式は, x にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$$f(-x) = f(x) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(-x) = -g(x) \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = \frac{2^{2x} + 2 + 2^{-2x}}{4} - \frac{2^{2x} - 2 + 2^{-2x}}{4} = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$g(2x) = \frac{2^{2x} - 2^{-2x}}{2} = 2 \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \cdot \frac{2^x - 2^{-x}}{2} = 2 f(x) g(x) \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

(3) (1) (2) で示されたことのいくつかを利用すると, 式 (A) ~ (D) のうち,

(A) は, $\alpha = \beta = 0$ を代入すると, 左辺 = 1, 右辺 = 0 となり成立しない。

(C) は, $\alpha = \beta = 0$ を代入すると, 左辺 = 0, 右辺 = 1 となり成立しない。

(D) は, $\alpha = \beta = x$ を代入すると, 左辺 = $g(2x)$, 右辺 = 0 となり成立しない。

よって, ① (B) 以外の三つは成り立たない。

[問題 5 3 8](#) →

問題539 第1問(必答問題)の一部 (配点 15)

(22 共通テスト 数ⅡB)

解答〔2〕 a, b は正の実数であり, $a \neq 1, b \neq 1$ を満たすとする。太郎さんは

$\log_a b$ と $\log_b a$ の大小関係を調べることにした。

(1) 太郎さんは次のような考察をした。

まず, $\log_3 9 = \boxed{2}$, $\log_9 3 = \frac{1}{\boxed{2}}$ である。この場合

$$\log_3 9 > \log_9 3$$

が成り立つ。

一方, $\log_{\frac{1}{4}} \boxed{8} = -\frac{3}{2}$, $\log_{\boxed{8}} \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$ である。この場合

$$\log_{\frac{1}{4}} \boxed{8} < \log_{\boxed{8}} \frac{1}{4}$$

が成り立つ。

(2) ここで,

$$\log_a b = t \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

とおく。

(1) の考察をもとにして, 太郎さんは次の式が成り立つと推測し, それが正しいことを確かめることにした。

$$\log_b a = \frac{1}{t} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

① により, $\boxed{1}$ である。このことにより $\boxed{1}$ が得られ, ② が成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

$$\textcircled{0} \quad a^b = t$$

$$\textcircled{1} \quad a^t = b$$

$$\textcircled{2} \quad b^a = t$$

$$\textcircled{3} \quad b^t = a$$

$$\textcircled{4} \quad t^a = b$$

$$\textcircled{5} \quad t^b = a$$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

$$\textcircled{0} \quad a = t^{\frac{1}{b}}$$

$$\textcircled{1} \quad a = b^{\frac{1}{t}}$$

$$\textcircled{2} \quad b = t^{\frac{1}{a}}$$

$$\textcircled{3} \quad b = a^{\frac{1}{t}}$$

$$\textcircled{4} \quad t = b^{\frac{1}{a}}$$

$$\textcircled{5} \quad t = a^{\frac{1}{b}}$$

(3) 次に, 太郎さんは (2) の考察をもとにして

$$t > \frac{1}{t} \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

を満たす実数 t ($t \neq 0$) の値の範囲を求めた。

太郎さんの考察

$t > 0$ ならば、③ の両辺に t を掛けることにより、 $t^2 > 1$ を得る。
 このような t ($t > 0$) の値の範囲は $1 < t$ である。

$t < 0$ ならば、③ の両辺に t を掛けることにより、 $t^2 < 1$ を得る。
 このような t ($t < 0$) の値の範囲は $-1 < t < 0$ である。

この考察により、③ を満たす t ($t \neq 0$) の値の範囲は

$$-1 < t < 0, 1 < t$$

であることがわかる。

ここで、 a の値を一つ定めたとき、不等式

$$\log_a b > \log_b a \quad \dots\dots\dots ④$$

を満たす実数 b ($b > 0, b \neq 1$) の値の範囲について考える。

④ を満たす b の値の範囲は、 $a > 1$ のときは であり、
 $0 < a < 1$ のときは である。

の解答群

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| ① $0 < b < \frac{1}{a}, 1 < b < a$ | ① $0 < b < \frac{1}{a}, a < b$ |
| ② $\frac{1}{a} < b < 1, 1 < b < a$ | ③ $\frac{1}{a} < b < 1, a < b$ |

の解答群

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| ① $0 < b < a, 1 < b < \frac{1}{a}$ | ① $0 < b < a, \frac{1}{a} < b$ |
| ② $a < b < 1, 1 < b < \frac{1}{a}$ | ③ $a < b < 1, \frac{1}{a} < b$ |

(4) $p = \frac{12}{13}, q = \frac{12}{11}, r = \frac{14}{13}$ とする。

次の ①～③ のうち、正しいものは である。

の解答群

- | |
|--|
| ① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$ |
| ① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$ |
| ② $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$ |
| ③ $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$ |

解説 (1) $\log_3 9 = 2$, $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ より, $\log_3 9 > \log_9 3$

一方, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$ であるから,

$$\log_{\frac{1}{4}} 8 = -\frac{3}{2}, \log_8 \frac{1}{4} = -\frac{2}{3} \quad \text{より, } \log_{\frac{1}{4}} 8 < \log_8 \frac{1}{4}$$

(2) $\log_a b = t$ ① のとき,

① $a^t = b$ である。このことから, ① $a = b^{\frac{1}{t}}$ が得られ,

$$\log_b a = \frac{1}{t} \quad \text{..... ② が導かれる。}$$

(3) $t > \frac{1}{t}$ ③ が成り立つのは, $-1 < t < 0$, $t > 1$ のときである。

$-1 < \log_a b < 0$, $\log_a b > 1$ とおくと,

$$\log_a \frac{1}{a} < \log_a b < \log_a 1, \log_a b > \log_a a \quad \text{より,}$$

・ $a > 1$ のとき, ③ $\frac{1}{a} < b < 1$, $a < b$

・ $0 < a < 1$ のとき, ④ $0 < b < a$, $1 < b < \frac{1}{a}$

(4) $p = \frac{12}{13}$, $q = \frac{12}{11}$ のとき,

$0 < p < 1$ であり, $\frac{12}{11} > \frac{12}{13}$, $\frac{12}{11} > \frac{13}{12}$ より, $q > p$, $q > \frac{1}{p}$ であるから,

$0 < q < p$, $1 < q < \frac{1}{p}$ のどちらも満たさない。よって, $\log_p q < \log_q p$ ④

$p = \frac{12}{13}$, $r = \frac{14}{13}$ のとき,

$0 < p < 1$ であり, $\frac{14}{13} > \frac{12}{13}$, $\frac{14}{13} < \frac{13}{12}$ より, $r > p$, $r < \frac{1}{p}$ であるから,

$1 < r < \frac{1}{p}$ を満たしている。よって, $\log_p r > \log_r p$ ⑤

よって, ④, ⑤ より, 正しいものは ② $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$

[問題539](#) →

問 題 編

問題532 第1問（必答問題）の一部（配点 15）

（15 センター試験 数ⅡB）

問題〔2〕 a, b を正の実数とする。連立方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x\sqrt{y^3} = a \\ \sqrt[3]{x}y = b \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y について考えよう。(1) 連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x, y は

$$x = a^{\boxed{\text{ス}}} b^{\boxed{\text{セソ}}}, y = a^p b^{\boxed{\text{タ}}}$$

$$p = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする。 a が $a > 0$ の範囲を動くとき、連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x, y について、 $x + y$ の最小値を求めよう。 $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ であるから、 $(*)$ を満たす正の実数 x, y は、 a を用いて

$$x = 2^{\boxed{\text{セソ}}} a^{\boxed{\text{トナ}}}, y = 2^{\boxed{\text{タ}}} a^{\boxed{\text{ニ}}}$$

したがって、相加平均と相乗平均の関係を利用すると、

 $x + y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ をとることがわかる。ただし

$$q = \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

問題533 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(16 センター試験 数ⅡB)

問題 [1]

$$(1) 8^{\frac{5}{6}} = \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}, \log_{27} \frac{1}{9} = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}} \text{である。}$$

$$(2) y = 2^x \text{ のグラフと } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ のグラフは } \boxed{\text{カ}} \text{ である。}$$

$$y = 2^x \text{ のグラフと } y = \log_2 x \text{ のグラフは } \boxed{\text{キ}} \text{ である。}$$

$$y = \log_2 x \text{ のグラフと } y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ のグラフは } \boxed{\text{ク}} \text{ である。}$$

$$y = \log_2 x \text{ のグラフと } y = \log_2 \frac{1}{x} \text{ のグラフは } \boxed{\text{ケ}} \text{ である。}$$

$\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを、次の ①～③ のうちから一つずつ選べ。

ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

- | | |
|---------------|---------------------|
| ① 同一のもの | ① x 軸に関して対称 |
| ② y 軸に関して対称 | ③ 直線 $y = x$ に関して対称 |

$$(3) x > 0 \text{ の範囲における関数 } y = \left(\log_2 \frac{x}{4}\right)^2 - 4\log_4 x + 3 \text{ の最小値を求めよう。}$$

$t = \log_2 x$ とおく。このとき、 $y = t^2 - \boxed{\text{コ}} t + \boxed{\text{サ}}$ である。また、
また、 x が $x > 0$ の範囲を動くとき、 t のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを、次の ①～③ のうちから一つずつ選べ。

- | | |
|-------------------------|-----------|
| ① $t > 0$ | ① $t > 1$ |
| ② $t > 0$ かつ $t \neq 1$ | ③ 実数全体 |

したがって、 y は $t = \boxed{\text{ス}}$ のとき、すなわち $x = \boxed{\text{セ}}$ のとき、
最小値 $\boxed{\text{ソタ}}$ をとる。

問題534 第1問（必答問題）の一部（配点 15）

（17 センター試験 数ⅡB）

問題〔2〕座標平面上に点 $A(0, \frac{3}{2})$ をとり、関数 $y = \log_2 x$ のグラフ上に2点 $B(p, \log_2 p)$,

$C(q, \log_2 q)$ をとる。線分 AB を1:2に内分する点が C であるとき、 p, q の値を求めよう。

真数の条件により、 $p > \boxed{\text{タ}}$ ， $q > \boxed{\text{タ}}$ である。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底といい、 b を真数という。

線分 AB を1:2に内分する点の座標は、 p を用いて

$$\left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} p, \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \log_2 p + \boxed{\text{ナ}} \right)$$

と表される。これが C の座標と一致するので

$$\begin{cases} \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} p = q & \dots\dots\dots \text{④} \\ \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \log_2 p + \boxed{\text{ナ}} = \log_2 q & \dots\dots\dots \text{⑤} \end{cases}$$

が成り立つ。⑤は

$$p = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} q^{\boxed{\text{ネ}}} \dots\dots\dots \text{⑥}$$

と変形できる。④と⑥を連立させた方程式を解いて、 $p > \boxed{\text{タ}}$ ， $q > \boxed{\text{タ}}$ に注意すると

$$p = \boxed{\text{ノ}} \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}, \quad q = \boxed{\text{ヒ}} \sqrt{\boxed{\text{フ}}} \text{である。}$$

また、 C の y 座標 $\log_2(\boxed{\text{ヒ}} \sqrt{\boxed{\text{フ}}})$ の値を、小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めると、 $\boxed{\text{ヘ}}$ である。 $\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを、次の①～⑥のうちから一つ選べ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ ， $\log_{10} 3 = 0.4771$ ， $\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

- | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ① 0.3 | ② 0.6 | ③ 0.9 | ④ 1.3 | ⑤ 1.6 | ⑥ 1.9 |
| ⑦ 2.3 | ⑧ 2.6 | ⑨ 2.9 | ⑩ 3.3 | ㉑ 3.6 | ㉒ 3.9 |

問題536 第1問(必答問題)の一部(配点 15)

(19 センター試験 数ⅡB)

問題〔2〕連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(x+2) - 2\log_4(y+3) = -1 & \dots\dots\dots ② \\ \left(\frac{1}{3}\right)^y - 11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0 & \dots\dots\dots ③ \end{cases}$$

を満たす実数 x, y を求めよう。

真数の条件により, x, y のとり得る値の範囲は である。 に当てはまるものを, 次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。ただし, 対数 $\log_a b$ に対し, a を底といい, b を真数という。

- ① $x > 0, y > 0$ ① $x > 2, y > 3$ ② $x > -2, y > -3$
 ③ $x < 0, y < 0$ ④ $x < 2, y < 3$ ⑤ $x < -2, y < -3$

底の変換公式により

$$\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{\text{チ}}$$

である。よって, ② から

$$y = \text{ツ} x + \text{テ} \dots\dots\dots ④$$

が得られる。

次に, $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおき, ④ を用いて ③ を t の方程式に書き直すと

$$t^2 - \text{トナ} t + \text{ニヌ} = 0 \dots\dots\dots ⑤$$

が得られる。また, x が における x の範囲を動くとき, t のとり得る値の範囲は

$$\text{ネ} < t < \text{ノ} \dots\dots\dots ⑥$$

である。⑥ の範囲で方程式⑤ を解くと, $t = \text{ハ}$ になる。したがって, 連立方程式 ②, ③ を満たす実数 x, y の値は

$$x = \log_3 \frac{\text{ヒ}}{\text{フ}}, \quad y = \log_3 \frac{\text{ヘ}}{\text{ホ}}$$

であることがわかる。

問題537 第1問（必答問題）の一部（配点 15）

（20 センター試験 数ⅡB）

問題〔2〕

- (1) t は正の実数であり、 $t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ を満たすとする。このとき

$$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \boxed{\text{タチ}}$$

である。さらに、

$$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}, \quad t - t^{-1} = \boxed{\text{トナニ}}$$

である。

- (2) x, y は正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leq 5 & \dots\dots\dots ② \\ \log_{81} \frac{y}{x^3} \leq 1 & \dots\dots\dots ③ \end{cases}$$

について考える。

$X = \log_3 x, Y = \log_3 y$ とおくと、② は

$$\boxed{\text{ヌ}} \quad X + Y \leq \boxed{\text{ネノ}} \quad \dots\dots\dots ④$$

と変形でき、③ は

$$\boxed{\text{ハ}} \quad X - Y \geq \boxed{\text{ヒフ}} \quad \dots\dots\dots ⑤$$

と変形できる。

X, Y が ④ と ⑤ を満たすとき、 Y のとり得る最大の整数の値は

$\boxed{\text{ヘ}}$ である。また、 x, y が ②、③ と $\log_3 y = \boxed{\text{ヘ}}$ を同時に満たすとき、

x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

問題538 第1問(必答問題)の一部 (配点 15)

(21 共通テスト 数ⅡB)

問題 [2] 二つの関数 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ について考える。

- (1) $f(0) = \boxed{\text{セ}}$, $g(0) = \boxed{\text{ソ}}$ である。また, $f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から, $x = \boxed{\text{タ}}$ で最小値 $\boxed{\text{チ}}$ をとる。

$g(x) = -2$ となる x の値は $\log_2(\sqrt{\boxed{\text{ツ}}} - \boxed{\text{テ}})$ である。

- (2) 次の ①～④ は, x にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$$f(-x) = \boxed{\text{ト}} \dots\dots\dots \text{①}$$

$$g(-x) = \boxed{\text{ナ}} \dots\dots\dots \text{②}$$

$$\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = \boxed{\text{ニ}} \dots\dots\dots \text{③}$$

$$g(2x) = \boxed{\text{ヌ}} f(x) g(x) \dots\dots\dots \text{④}$$

$\boxed{\text{ト}}$, $\boxed{\text{ナ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

① $f(x)$ ① $-f(x)$ ② $g(x)$ ③ $-g(x)$

- (3) 花子さんと太郎さんは, $f(x)$ と $g(x)$ の性質について話している。

花子: ①～④ は三角関数の性質に似ているね。

太郎: 三角関数の加法定理に類似した式 (A) ～ (D) を考えてみたけど, つねに成り立つ式はあるだろうか。

花子: 成り立たない式を見つけるために, 式 (A) ～ (D) の β に何か具体的な値を代入して調べてみたらどうかな。

太郎さんが考えた式

$$f(\alpha - \beta) = f(\alpha) g(\beta) + g(\alpha) f(\beta) \dots\dots\dots \text{(A)}$$

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) f(\beta) + g(\alpha) g(\beta) \dots\dots\dots \text{(B)}$$

$$g(\alpha - \beta) = f(\alpha) f(\beta) + g(\alpha) g(\beta) \dots\dots\dots \text{(C)}$$

$$g(\alpha + \beta) = f(\alpha) g(\beta) - g(\alpha) f(\beta) \dots\dots\dots \text{(D)}$$

- (1) (2) で示されたことのいくつかを利用すると, 式 (A) ～ (D) のうち, $\boxed{\text{ネ}}$ 以外の三つは成り立たないことがわかる。 $\boxed{\text{ネ}}$ は左辺と右辺をそれぞれ計算することによって成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

① (A) ① (B) ② (C) ③ (D)

問題539 第1問(必答問題)の一部 (配点 15)

(22 共通テスト 数ⅡB)

問題〔2〕 a, b は正の実数であり, $a \neq 1, b \neq 1$ を満たすとする。太郎さんは

$\log_a b$ と $\log_b a$ の大小関係を調べることにした。

(1) 太郎さんは次のような考察をした。

まず, $\log_3 9 = \boxed{\text{ス}}$, $\log_9 3 = \frac{1}{\boxed{\text{ス}}}$ である。この場合

$$\log_3 9 > \log_9 3$$

が成り立つ。

一方, $\log_{\frac{1}{4}} \boxed{\text{セ}} = -\frac{3}{2}$, $\log_{\boxed{\text{セ}}} \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$ である。この場合

$$\log_{\frac{1}{4}} \boxed{\text{セ}} < \log_{\boxed{\text{セ}}} \frac{1}{4}$$

が成り立つ。

(2) ここで,

$$\log_a b = t \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

とおく。

(1) の考察をもとにして, 太郎さんは次の式が成り立つと推測し, それが正しいことを確かめることにした。

$$\log_b a = \frac{1}{t} \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

① により, $\boxed{\text{ソ}}$ である。このことにより $\boxed{\text{タ}}$ が得られ, ② が成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

$$\text{① } a^b = t$$

$$\text{① } a^t = b$$

$$\text{② } b^a = t$$

$$\text{③ } b^t = a$$

$$\text{④ } t^a = b$$

$$\text{⑤ } t^b = a$$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

$$\text{① } a = t^{\frac{1}{b}}$$

$$\text{① } a = b^{\frac{1}{t}}$$

$$\text{② } b = t^{\frac{1}{a}}$$

$$\text{③ } b = a^{\frac{1}{t}}$$

$$\text{④ } t = b^{\frac{1}{a}}$$

$$\text{⑤ } t = a^{\frac{1}{b}}$$

(3) 次に, 太郎さんは (2) の考察をもとにして

$$t > \frac{1}{t} \quad \dots\dots\dots \text{③}$$

を満たす実数 t ($t \neq 0$) の値の範囲を求めた。

太郎さんの考察

$t > 0$ ならば、③ の両辺に t を掛けることにより、 $t^2 > 1$ を得る。
 このような t ($t > 0$) の値の範囲は $1 < t$ である。

$t < 0$ ならば、③ の両辺に t を掛けることにより、 $t^2 < 1$ を得る。
 このような t ($t < 0$) の値の範囲は $-1 < t < 0$ である。

この考察により、③ を満たす t ($t \neq 0$) の値の範囲は

$$-1 < t < 0, 1 < t$$

であることがわかる。

ここで、 a の値を一つ定めたとき、不等式

$$\log_a b > \log_b a \quad \dots\dots\dots ④$$

を満たす実数 b ($b > 0, b \neq 1$) の値の範囲について考える。

④ を満たす b の値の範囲は、 $a > 1$ のときは であり、
 $0 < a < 1$ のときは である。

の解答群

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| ① $0 < b < \frac{1}{a}, 1 < b < a$ | ① $0 < b < \frac{1}{a}, a < b$ |
| ② $\frac{1}{a} < b < 1, 1 < b < a$ | ③ $\frac{1}{a} < b < 1, a < b$ |

の解答群

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| ① $0 < b < a, 1 < b < \frac{1}{a}$ | ① $0 < b < a, \frac{1}{a} < b$ |
| ② $a < b < 1, 1 < b < \frac{1}{a}$ | ③ $a < b < 1, \frac{1}{a} < b$ |

(4) $p = \frac{12}{13}, q = \frac{12}{11}, r = \frac{14}{13}$ とする。

次の ①～③ のうち、正しいものは である。

の解答群

- | |
|--|
| ① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$ |
| ① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$ |
| ② $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$ |
| ③ $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$ |