

問題のタイトル一覧

数列

2008	センター試験	数ⅡB
2009	センター試験	数ⅡB
2015	センター試験	数ⅡB
2016	センター試験	数ⅡB
2017	センター試験	数ⅡB
2018	センター試験	数ⅡB
2019	センター試験	数ⅡB
2020	センター試験	数ⅡB
2021	共通テスト	数ⅡB
2022	共通テスト	数ⅡB

問題850 第3問（選択問題）（配点 20）

（09 センター試験 数ⅡB）

解答

$\{a_n\}$ を初項 a_1 が 1 で公比が $\frac{1}{3}$ の等比数列とする。数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項を取り出して、数列

$\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。 $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$ とおく。

(1) $\{b_n\}$ も等比数列であり、その初項は $\frac{1}{3}$ 公比は $\frac{1}{9}$ である。したがって

$$T_n = \frac{3}{8} \left(1 - \frac{1}{9^n} \right)$$

である。また、積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を求めると

$$b_1 b_2 \cdots b_n = \frac{1}{3^{n^2}} \quad \text{となる。}$$

(2) 次に、数列 $\{c_n\}$ を $c_n = 2n \cdot b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定め、 $U_n = \sum_{k=1}^n c_k$ とおく。

$$9 c_{n+1} - c_n = 2 b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^n (9 c_{k+1} - c_k) = 2 T_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。また、この左辺の和をまとめ直すと、 U_n , c_{n+1} , c_1 を用いて

$$\sum_{k=1}^n (9 c_{k+1} - c_k) = 8 U_n + 9 c_{n+1} - 9 c_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と表される。 ① と ② より

$$U_n = \frac{27}{32} - \frac{24n + 27}{32} \cdot \frac{1}{9^n} \quad \text{となる。}$$

[問題850→](#)

問題851 第3問（選択問題）（配点 20）

（08 センター試験 数ⅡB）

解答

（1）数列 $\{a_n\}$ は初項が7，公差が -4 の等差数列とする。数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{-4}n + \boxed{11}$$

であり，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n a_k = \boxed{-2}n^2 + \boxed{9}n \quad \text{である。}$$

（2）数列 $\{b_n\}$ は，第 n 項が

$$b_n = pn^2 - qn - r$$

という n の2次式で表され

$$b_{n+1} - 2b_n = \boxed{-2}n^2 + \boxed{9}n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすとする。このとき

$$p = \boxed{2}, \quad q = \boxed{5}, \quad r = \boxed{3}$$

であり， $b_1 = \boxed{-6}$ である。

さらに，次の条件によって定まる数列 $\{c_n\}$ を考えよう。

$$c_1 = 1$$

$$c_{n+1} - 2c_n = \boxed{-2}n^2 + \boxed{9}n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

① と ② より， $d_n = c_n - b_n$ とおくと

$$d_{n+1} - \boxed{2}d_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。これより，数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = \boxed{7} \cdot \boxed{2}^{n-1} + \boxed{2}n^2 - \boxed{5}n - \boxed{3} \quad \text{である。}$$

数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $\sum_{k=1}^n c_k$ は

$$\boxed{7} \cdot \boxed{2}^n + \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}n^3 - \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}n^2 - \frac{\boxed{31}}{\boxed{6}}n - \boxed{7} \quad \text{となる。}$$

[問題851](#) →

問題853 第3問(選択問題) (配点 20)

(15 センター試験 数ⅡB)

解答 自然数 n に対し、 2^n の一の位の数 a_n とする。また、数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすとする。

(1) $a_1 = 2$, $a_2 = \boxed{4}$, $a_3 = \boxed{8}$, $a_4 = \boxed{6}$, $a_5 = \boxed{2}$ である。

このことから、すべての自然数 n に対して、 $a_{\boxed{3}} = a_n$ であることがわかる。

オ に当てはまるものを、次の ①～④ のうちから一つ選べ。

① $5n$ ② $4n+1$ ③ $n+3$ ④ $n+4$ ⑤ $n+5$

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。① を繰り返し用いることにより

$$b_{n+4} = \frac{a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n}{2^{\boxed{8}}} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことがわかる。ここで、 $a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n = 3 \cdot 2^{\boxed{7}}$ であることから、

$$b_{n+4} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} b_n \text{ が成り立つ。このことから、自然数 } k \text{ に対して}$$

$$b_{4k-3} = \left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} \right)^{k-1}, \quad b_{4k-2} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} \right)^{k-1}$$

$$b_{4k-1} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} \right)^{k-1}, \quad b_{4k} = \left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} \right)^{k-1} \quad \text{である。}$$

(3) $S_n = \sum_{j=1}^n b_j$ とおく。自然数 m に対して

$$S_{4m} = \boxed{6} \left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} \right)^m - \boxed{6} \quad \text{である。}$$

(4) 積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を T_n とおく。自然数 k に対して

$$b_{4k-3} b_{4k-2} b_{4k-1} b_{4k} = \frac{1}{\boxed{4}} \left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} \right)^{\boxed{4}(k-1)}$$

であることから、自然数 m に対して

$$T_{4m} = \frac{1}{\boxed{4}^m} \left(\frac{\boxed{\quad}}{\boxed{2}} \right)^{\boxed{2}m^2 - \boxed{2}m}$$

である。また、 T_{10} を計算すると、 $T_{10} = \frac{3^{\boxed{8}}}{2^{\boxed{13}}}$ である。

解説 (1) $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$ より,

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 6$, $a_5 = 2$ である。

このことから, すべての自然数 n に対して, $a_{n+4} = a_n$ である。

(2) $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \frac{a_n}{4} b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) より,

$$\begin{aligned} b_{n+4} &= \frac{a_{n+3}}{4} b_{n+3} = \frac{a_{n+3}}{4} \cdot \frac{a_{n+2}}{4} b_{n+2} = \frac{a_{n+3}}{4} \cdot \frac{a_{n+2}}{4} \cdot \frac{a_{n+1}}{4} b_{n+1} = \frac{a_{n+3}}{4} \cdot \frac{a_{n+2}}{4} \cdot \frac{a_{n+1}}{4} \cdot \frac{a_n}{4} b_n \\ &= \frac{a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n}{2^8} b_n \quad \text{である。} \end{aligned}$$

ここで, $a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 = 3 \cdot 2^7$ であるから, $b_{n+4} = \frac{3}{2} b_n$ である。

また, $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{a_1}{4} b_1 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{a_2}{4} b_2 = \frac{1}{2}$, $b_4 = \frac{a_3}{4} b_3 = 1$

このことから, 自然数 k に対して,

$$b_{4k-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}, \quad b_{4k-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}, \quad b_{4k-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}, \quad b_{4k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

$$(3) \quad S_{4m} = \sum_{k=1}^m \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^m 3 \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \frac{3 \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^m - 1 \right\}}{\frac{3}{2} - 1} = 6 \left(\frac{3}{2}\right)^m - 6$$

(4) 自然数 k に対して, $b_{4k-3} b_{4k-2} b_{4k-1} b_{4k} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{4(k-1)}$ である。

また, $\sum_{k=1}^m 4(k-1) = \sum_{k=0}^{m-1} 4k = 4 \cdot \frac{1}{2} m(m-1) = 2m^2 - 2m$ より,

$$T_{4m} = \prod_{k=1}^m \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{4(k-1)} = \frac{1}{4^m} \left(\frac{3}{2}\right)^{2m^2 - 2m} \quad \text{である。}$$

$$\text{このとき, } T_{10} = T_8 \cdot b_9 \cdot b_{10} = \frac{1}{4^2} \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^8}{2^{13}}$$

問題 853 →

問題854 第3問(選択問題)(配点 20)

(16 センター試験 数ⅡB)

解答

真分数の分母の小さい順に、分母が同じ場合には分子の小さい順に並べてできる数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

を $\{a_n\}$ とする。真分数とは、分子と分母がともに自然数で、分子は分母より小さい分数のことであり、上の数列では、約分できる形の分数も含めて並べている。以下の問題に分数形で解答する場合は、**解答上の注意**(省略)にあるように、それ以上約分できない形で答えよ。

(1) $a_{15} = \frac{\boxed{5}}{\boxed{6}}$ である。また、分母に初めて8が現れる項は、 $a_{\boxed{22}}$ である。

(2) k を2以上の自然数とする。数列 $\{a_n\}$ において、 $\frac{1}{k}$ が初めて現れる項を第 M_k 項とし、

$\frac{k-1}{k}$ が初めて現れる項を第 N_k 項とすると

$$M_k = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} k^2 - \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} k + \boxed{2}$$

$$N_k = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} k^2 - \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} k$$

である。よって、 $a_{104} = \frac{\boxed{13}}{\boxed{15}}$ である。

(3) k を2以上の自然数とする。数列 $\{a_n\}$ の第 M_k 項から第 N_k 項までの和は

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} k - \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

である。したがって、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 N_k 項までの和は

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} k^2 - \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} k$$

である。よって

$$\sum_{n=1}^{103} a_n = \frac{\boxed{507}}{\boxed{10}}$$

である。

解説 (1) 数列のうち、分母が同じものを、下のようにひとまとまりの群として考えると、

$$\frac{1}{2} \quad \left| \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} \quad \left| \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{4} \quad \left| \quad \frac{1}{5}, \quad \dots\dots\dots$$

第 n 群には n 個の項が含まれ、第 n 群に含まれる項の分母は $n+1$ である。

a_{15} は、第 5 群の 5 番目の項であるから、 $a_{15} = \frac{5}{6}$ である。また、分母に初めて 8 が現れる

のは、第 7 群の先頭の項だから、 $1+2+3+4+5+6+1=22$ より、 a_{22} である。

(2) $\frac{1}{k}$ が初めて現れるのは、第 $k-1$ 群の先頭の項であるから、

$$k \geq 3 \text{ のとき, } M_k = \sum_{j=1}^{k-2} j+1 = \frac{1}{2}(k-2)(k-1)+1 = \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + 2 \text{ であり,}$$

$M_2 = 1$ より、これは $k=2$ のときも成立する。また、

$$N_k = M_k + (k-2) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k \text{ である。}$$

また、 $\frac{1}{2}n(n+1) \geq 104$ とおくと、 $n(n+1) \geq 208$ よって、 $n \geq 14$ であるから、

a_{104} は第 14 群に含まれ、初項から第 13 群の最後までに含まれる項数は、 $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 = 91$

なので、 a_{104} は第 14 群の $104 - 91 = 13$ 番目。よって、 $a_{104} = \frac{13}{15}$

(3) k を 2 以上の自然数とする。数列 $\{a_n\}$ の第 M_k 項から第 N_k 項までの和は

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2}(k-1)k = \frac{1}{2}k - \frac{1}{2} \text{ である。}$$

したがって、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 N_k 項までの和は、

$$\sum_{j=2}^k \left(\frac{1}{2}j - \frac{1}{2} \right) = \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{2}j - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{2}k = \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{4}k \text{ である。}$$

また、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 103 項までの和は、初項から第 13 群の終わりまでのすべての項の和（つまり、初項から第 N_{14} 項までの和）と、第 14 群の最初から 12 番目までの項の和を足したものであるから、

$$\sum_{n=1}^{103} a_n = \left(\frac{1}{4} \cdot 14^2 - \frac{1}{4} \cdot 14 \right) + \left(\frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \dots + \frac{12}{15} \right) = \left(49 - \frac{7}{2} \right) + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 = \frac{507}{10}$$

問題 854 →

問題 855 第3問 (選択問題) (配点 20)

(17 センター試験 数ⅡB)

解答 以下において考察する数列の項は、すべて実数であるとする。(1) 等比数列 $\{s_n\}$ の初項が 1, 公比が 2 であるとき

$$s_1 s_2 s_3 = \boxed{8}, \quad s_1 + s_2 + s_3 = \boxed{7} \quad \text{である。}$$

(2) $\{s_n\}$ を初項 x , 公比 r の等比数列とする。 a, b を実数 (ただし $a \neq 0$) とし, $\{s_n\}$ の最初の 3 項が

$$s_1 s_2 s_3 = a^3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = b \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を満たすとする。このとき

$$xr = \boxed{a} \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

である。さらに、②, ③ を用いて r, a, b の満たす関係式を求めると

$$\boxed{a} r^2 + (\boxed{a} - \boxed{b}) r + \boxed{a} = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

を得る。④ を満たす実数 r が存在するので

$$\boxed{3} a^2 + \boxed{2} ab - b^2 \leq 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

である。

逆に、 a, b が⑤ を満たすとき、③, ④ を用いて r, x の値を求めることができる。(3) $a = 64, b = 336$ のとき、(2) の条件①, ② を満たし、公比が 1 より大きい等比列 $\{s_n\}$ を考える。③, ④ を用いて $\{s_n\}$ の公比 r と初項 x を求めると、

$$r = \boxed{4}, \quad x = \boxed{16} \quad \text{である。}$$

 $\{s_n\}$ を用いて、数列 $\{t_n\}$ を

$$t_n = s_n \log_{\boxed{4}} s_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。このとき、 $\{t_n\}$ の一般項は $t_n = (n + \boxed{1}) \cdot \boxed{4}^{n + \boxed{1}}$ である。 $\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和 U_n は、 $U_n - \boxed{4} U_n$ を計算することにより

$$U_n = \frac{\boxed{3}n + \boxed{2}}{\boxed{9}} \cdot \boxed{4}^{n + \boxed{2}} - \frac{\boxed{32}}{\boxed{9}}$$

であることがわかる。

解説 (1) 等比数列 $\{s_n\}$ の初項が 1, 公比が 2 であるとき,

$$s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 4 \text{ より,}$$

$$s_1 s_2 s_3 = 8, s_1 + s_2 + s_3 = 7 \text{ である。}$$

(2) $\{s_n\}$ を初項 x , 公比 r の等比数列とすると,

$$s_1 s_2 s_3 = x \cdot x r \cdot x r^2 = x^3 r^3 = a^3 \quad \dots\dots\dots ①$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = x(1+r+r^2) = b \quad \dots\dots\dots ②$$

$$① \text{ より, } x r = a \quad \dots\dots\dots ③$$

$$② \text{ より, } x r(1+r+r^2) = b r \text{ であり,}$$

$$③ \text{ を代入すると, } a(1+r+r^2) = b r \text{ より, } a r^2 + (a-b)r + a = 0 \quad \dots\dots\dots ④$$

④ を満たす実数 r が存在するので,

$$\text{判別式 } D = (a-b)^2 - 4a^2 \geq 0 \text{ より, } 3a^2 + 2ab - b^2 \leq 0 \quad \dots\dots\dots ⑤$$

(3) $a = 64, b = 336$ のとき, ④ より,

$$64r^2 - 272r + 64 = 0$$

$$4r^2 - 17r + 4 = (4r-1)(r-4) = 0 \text{ であり, } r > 1 \text{ より, } r = 4$$

$$③ \text{ より, } 4x = 64 \text{ よって, } x = 16$$

$$\text{このとき, } s_n = 16 \cdot 4^{n-1} = 4^{n+1} \text{ より,}$$

$$t_n = s_n \log_4 s_n = (n+1)4^{n+1} \text{ である。}$$

$\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和を U_n とすると,

$$U_n = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \dots + (n+1)4^{n+1} \quad \dots\dots\dots ⑥$$

$$4U_n = 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 + \dots + n4^{n+1} + (n+1)4^{n+2} \quad \dots\dots\dots ⑦$$

であり, ⑥-⑦ より,

$$\begin{aligned} -3U_n &= (4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{n+1}) + 4^2 - (n+1)4^{n+2} \\ &= \frac{4^2(4^n - 1)}{4-1} + 4^2 - (n+1)4^{n+2} = \frac{1}{3} \cdot 4^{n+2} + \frac{2}{3} \cdot 4^2 - (n+1)4^{n+2} \\ &= -\frac{3n+2}{3} \cdot 4^{n+2} + \frac{32}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } U_n = \frac{3n+2}{9} \cdot 4^{n+2} - \frac{32}{9}$$

[問題855](#) →

問題 856 第3問 (選択問題) (配点 20)

(18 センター試験 数ⅡB)

解答

第4項が30, 初項から第8項までの和が288である等差数列を $\{a_n\}$ とし, $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。また, 第2項が36, 初項から第3項までの和が156である等比数列で公比が1より大きいものを $\{b_n\}$ とし, $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする。

(1) $\{a_n\}$ の初項は $\boxed{-6}$, 公差は $\boxed{12}$ であり

$$S_n = \boxed{6}n^2 - \boxed{12}n \quad \text{である。}$$

(2) $\{b_n\}$ の初項は $\boxed{12}$, 公比は $\boxed{3}$ であり

$$T_n = \boxed{6}(\boxed{3}^n - \boxed{1}) \quad \text{である。}$$

(3) 数列 $\{c_n\}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^n (n-k+1)(a_k - b_k) \\ &= n(a_1 - b_1) + (n-1)(a_2 - b_2) + \cdots + 2(a_{n-1} - b_{n-1}) + (a_n - b_n) \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

たとえば

$$c_1 = a_1 - b_1, \quad c_2 = 2(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)$$

$$c_3 = 3(a_1 - b_1) + 2(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$$

である。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよう。

$\{c_n\}$ の階差数列を $\{d_n\}$ とする。 $d_n = c_{n+1} - c_n$ であるから, $d_n = \boxed{5}$ を満たす。

セ に当てはまるものを, 次の ①～⑦のうちから一つ選べ。

- | | | |
|------------------------|------------------------|-----------------------|
| ① $S_n + T_n$ | ① $S_n - T_n$ | ② $-S_n + T_n$ |
| ③ $-S_n - T_n$ | ④ $S_{n+1} + T_{n+1}$ | ⑤ $S_{n+1} - T_{n+1}$ |
| ⑥ $-S_{n+1} + T_{n+1}$ | ⑦ $-S_{n+1} - T_{n+1}$ | |

したがって, (1) と (2) により

$$d_n = \boxed{6}n^2 - 2 \cdot \boxed{3}^{n+\boxed{2}}$$

である。 $c_1 = \boxed{-18}$ であるから, $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = \boxed{2}n^3 - \boxed{3}n^2 + n + \boxed{9} - \boxed{3}^{n+\boxed{2}}$$

である。

解説 (1) $a_n = a + (n-1)d$ とおくと,

$$a_4 = a + 3d = 30 \cdots \cdots \textcircled{1}, S_8 = \frac{8}{2}(2a + 7d) = 288 \text{ より, } 2a + 7d = 72 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } a = -6, d = 12 \text{ であり, } a_n = 12n - 18$$

$$S_n = 12 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - 18n = 6n(n+1) - 18n = 6n^2 - 12n$$

(2) $b_n = br^{n-1}$ ($r > 1$) とおくと,

$$b_2 = br = 36 \cdots \cdots \textcircled{3}, T_3 = b(1+r+r^2) = 156 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \text{ より, } br(1+r+r^2) = 156r$$

$$\textcircled{3} \text{ を代入して, } 36(1+r+r^2) = 156r \text{ より, } 3(1+r+r^2) = 13r$$

$$3r^2 - 10r + 3 = (3r-1)(r-3) = 0 \text{ であり, } r > 1 \text{ より, } r = 3$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } 3b = 36 \text{ よって, } b = 12 \text{ であり,}$$

$$T_n = \frac{12(3^n - 1)}{3-1} = 6(3^n - 1)$$

(3) $c_n = n(a_1 - b_1) + (n-1)(a_2 - b_2) + \cdots + 2(a_{n-1} - b_{n-1}) + (a_n - b_n)$

$$c_{n+1} = (n+1)(a_1 - b_1) + n(a_2 - b_2) + \cdots + 3(a_{n-1} - b_{n-1}) + 2(a_n - b_n) + (a_{n+1} - b_{n+1})$$

$$\text{であるから, } d_n = c_{n+1} - c_n = \sum_{k=1}^{n+1} (a_k - b_k) = S_{n+1} - T_{n+1}$$

したがって, (1) と (2) により,

$$d_n = 6(n+1)^2 - 12(n+1) - 6(3^{n+1} - 1) = 6n^2 - 2 \cdot 3^{n+2}$$

$$c_1 = a_1 - b_1 = -6 - 12 = -18 \text{ であるから,}$$

$$n \geq 2 \text{ のとき, } c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k = -18 + 6 \cdot \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) - \frac{54(3^{n-1} - 1)}{3-1}$$

$$= -18 + (2n^3 - 3n^2 + n) - (3^{n+2} - 27)$$

$$= 2n^3 - 3n^2 + n + 9 - 3^{n+2} \text{ であり,}$$

$$c_1 = -18 \text{ より, これは } n = 1 \text{ でも成り立つ。}$$

[問題856](#) →

問題857 第3問(選択問題) (配点 20)

(19 センター試験 数ⅡB)

解答 初項が3, 公比が4の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。また, 数列 $\{T_n\}$ は, 初項が -1 であり, $\{T_n\}$ の階差数列が数列 $\{S_n\}$ であるような数列とする。

(1) $S_2 = \boxed{15}$, $T_2 = \boxed{2}$ である。

(2) $\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ の一般項は, それぞれ

$$S_n = \boxed{4}^{\boxed{1}} - \boxed{1}$$

$$T_n = \frac{\boxed{4}^{\boxed{1}}}{\boxed{3}} - n - \frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$$

である。ただし, $\boxed{\text{オ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ については, 当てはまるものを, 次の ①～④ のうちから一つ選べ。同じものを選んでもよい。

① $n-1$ ② n ③ $n+1$ ④ $n+2$ ⑤ $n+3$

(3) 数列 $\{a_n\}$ は, 初項が -3 であり, 漸化式

$$na_{n+1} = 4(n+1)a_n + 8T_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

そのために, $b_n = \frac{a_n + 2T_n}{n}$ により定められる数列 $\{b_n\}$ を考える。 $\{b_n\}$ の初項は $\boxed{-5}$

である。 $\{T_n\}$ は漸化式

$$T_{n+1} = \boxed{4} T_n + \boxed{3} n + \boxed{3} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすから, $\{b_n\}$ は漸化式

$$b_{n+1} = \boxed{4} b_n + \boxed{6} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすことがわかる。よって, $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{-3} \cdot \boxed{4}^{\boxed{0}} - \boxed{2}$$

である。ただし, $\boxed{\text{ナ}}$ については, 当てはまるものを, 次の ①～④ のうちから一つ選べ。

① $n-1$ ② n ③ $n+1$ ④ $n+2$ ⑤ $n+3$

したがって, $\{T_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項から $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$a_n = \frac{\boxed{-} (\boxed{9} n + \boxed{8}) \boxed{4}^{\boxed{0}} + \boxed{8}}{\boxed{3}} \quad \text{である。}$$

解説 (1) $S_2 = 3 + 1 \cdot 2 = 1 \cdot 5$

$$T_2 - T_1 = S_1 \quad \text{より,} \quad T_2 = S_1 + T_1 = 3 - 1 = 2$$

$$(2) \quad S_n = \frac{3(4^n - 1)}{4 - 1} = 4^n - 1$$

$n \geq 2$ のとき,

$$T_n = T_1 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k = -1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4^k - 1) = -1 + \frac{4(4^{n-1} - 1)}{4 - 1} - (n - 1) = \frac{4^n}{3} - n - \frac{4}{3} \quad \text{であり,}$$

$T_1 = -1$ より, これは $n = 1$ でも成り立つ。

$$(3) \quad a_1 = -3, \quad n a_{n+1} = 4(n+1)a_n + 8T_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{とする。}$$

$$b_n = \frac{a_n + 2T_n}{n} \quad \text{とおくと,} \quad b_1 = a_1 + 2T_1 = -3 - 2 = -5$$

$$\text{また,} \quad T_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{3} - (n+1) - \frac{4}{3} = 4 \left(\frac{4^n}{3} - n - \frac{4}{3} \right) + 3n + 3 = 4T_n + 3n + 3$$

ここで, 数列 $\{a_n\}$ の漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割り, 上の漸化式を用いると,

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = 4 \cdot \frac{a_n}{n} + 8 \frac{T_n}{n(n+1)} = 4 \cdot \frac{a_n}{n} + 8 \left(\frac{T_n}{n} - \frac{T_n}{n+1} \right) = 4 \cdot \frac{a_n}{n} + 8 \cdot \frac{T_n}{n} - \left(2 \cdot \frac{T_{n+1}}{n+1} - 6 \right) \quad \text{より,}$$

$$\frac{a_{n+1} + 2T_{n+1}}{n+1} = 4 \cdot \frac{a_n + 2T_n}{n} + 6 \quad \text{つまり,} \quad b_{n+1} = 4b_n + 6$$

$$\text{よって,} \quad b_1 + 2 = -3, \quad b_{n+1} + 2 = 4(b_n + 2) \quad \text{より,}$$

$$b_n + 2 = -3 \cdot 4^{n-1} \quad \text{であるから,} \quad b_n = -3 \cdot 4^{n-1} - 2$$

$$\text{したがって,} \quad a_n = n b_n - 2T_n = -3n \cdot 4^{n-1} - 2n - 2 \left(\frac{4^n}{3} - n - \frac{4}{3} \right)$$

$$= \frac{-(9n+8)4^{n-1} + 8}{3}$$

[問題 8 5 7](#) →

問題 858 第3問 (選択問題) (配点 20)

(20 センター試験 数ⅡB)

解答 数列 $\{a_n\}$ は、初項 a_1 が 0 であり、 $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき次の漸化式を満たすものとする。

$$a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1} \{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\} \dots\dots\dots ①$$

(1) $a_2 = \boxed{6}$ である。

(2) $b_n = \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおき、 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。

$\{b_n\}$ の初項 b_1 は $\boxed{0}$ である。① の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{1}}{(n+\boxed{1})(n+\boxed{2})} - \left(\frac{1}{\boxed{3}}\right)^{n+1}$$

を得る。ただし、 $\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$ とする。したがって、

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{\boxed{1}}{n+\boxed{1}} - \frac{\boxed{1}}{n+\boxed{2}}\right) - \left(\frac{1}{\boxed{3}}\right)^{n+1} \text{ である。}$$

n を 2 以上の自然数とすると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\boxed{1}}{k+\boxed{1}} - \frac{\boxed{1}}{k+\boxed{2}} \right) &= \frac{1}{\boxed{2}} \left(\frac{n-\boxed{1}}{n+\boxed{1}} \right) \\ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\boxed{3}} \right)^{k+1} &= \frac{\boxed{1}}{\boxed{6}} - \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \left(\frac{1}{\boxed{3}} \right)^n \end{aligned}$$

が成り立つことを利用すると

$$b_n = \frac{n-\boxed{2}}{\boxed{3}(n+\boxed{1})} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \left(\frac{1}{\boxed{3}} \right)^n$$

が得られる。これは $n = 1$ のときも成り立つ。

(3) (2) により、 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{3}^{n-\boxed{1}} (n^2 - \boxed{4}) + \frac{(n+\boxed{1})(n+\boxed{2})}{\boxed{2}}$$

で与えられる。ただし、 $\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$ とする。

このことから、すべての自然数 n について、 a_n は整数となることがわかる。

(4) k を自然数とする。 a_{3k} , a_{3k+1} , a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ $\boxed{1}$, $\boxed{0}$,

$\boxed{0}$ である。また、 $\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは

$\boxed{1}$ である。

解説 (1) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1} \{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき,

$$a_2 = 2(3a_1 + 3^2 - 2 \cdot 3) = 6$$

(2) $b_n = \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおくと, $b_1 = 0$ であり,

数列 $\{a_n\}$ の漸化式の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)} = \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \text{ より,}$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \text{ したがって,}$$

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \text{ である.}$$

n を 2 以上の自然数とすると,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

が成り立つことを利用すると,

$$b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{6} = \frac{n-2}{3(n+1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

が得られる。これは $n = 1$ のときも成り立つ。

(3) (2) により, $\{a_n\}$ の一般項は,

$$a_n = 3^n(n+1)(n+2) \frac{n-2}{3(n+1)} + 3^n(n+1)(n+2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{n-1}(n^2-4) + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(4) (3) により, すべての自然数 n について, a_n は整数となるが, a_n のうち,

$3^{n-1}(n^2-4)$ の部分は, すべての自然数 n について整数となるので, a_n を 3 で割った余りは, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ を 3 で割った余りである。

$$\cdot n = 3k \text{ のとき, } \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2} = \frac{9k^2+9k+2}{2} = 9 \cdot \frac{k(k+1)}{2} + 1$$

$$\cdot n = 3k+1 \text{ のとき, } \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(3k+2)(3k+3)}{2} = 3 \cdot \frac{(3k+2)(k+1)}{2}$$

$$\cdot n = 3k+2 \text{ のとき, } \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(3k+3)(3k+4)}{2} = 3 \cdot \frac{(3k+4)(k+1)}{2} \text{ より,}$$

a_{3k} , a_{3k+1} , a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ 1, 0, 0 である。

また, $\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは 1 である。

問題 858 →

問題859 第4問(選択問題) (配点 20)

(21 共通テスト 数ⅡB)

解答

初項3, 公差 p の等差数列を $\{a_n\}$ とし, 初項3, 公比 r の等比数列を $\{b_n\}$ とする。ただし, $p \neq 0$ かつ $r \neq 0$ とする。さらに, これらの数列が次を満たすとする。

$$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1} b_n + 3b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{..... ①}$$

(1) p と r を求めよう。自然数 n について, a_n , a_{n+1} , b_n はそれぞれ

$$a_n = \boxed{3} + (n-1)p \quad \text{..... ②}$$

$$a_{n+1} = \boxed{3} + np \quad \text{..... ③}$$

$$b_n = \boxed{3} r^{n-1}$$

と表される。 $r \neq 0$ により, すべての自然数 n について, $b_n \neq 0$ となる。 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = r$ であることから, ① の両辺を b_n で割ることにより

$$\boxed{2} a_{n+1} = r(a_n + \boxed{3}) \quad \text{..... ④}$$

が成り立つことがわかる。④ に② と③ を代入すると

$$(r - \boxed{2})pn = r(p - \boxed{6}) + \boxed{6} \quad \text{..... ⑤}$$

となる。⑤ がすべての n について成り立つことおよび $p \neq 0$ により, $r = \boxed{2}$ を得る。さらに, このことから, $p = \boxed{3}$ を得る。以上から, すべての自然数 n について, a_n と b_n が正であることもわかる。(2) $p = \boxed{3}$, $r = \boxed{2}$ であることから, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和は,

それぞれ次の式で与えられる。

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} n(n + \boxed{1})$$

$$\sum_{k=1}^n b_k = \boxed{3} (\boxed{2}^n - \boxed{1})$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ に対して, 初項3の数列 $\{c_n\}$ が次を満たすとする。

$$a_n c_{n+1} - 4a_{n+1} c_n + 3c_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{..... ⑥}$$

 a_n が正であることから, ⑥ を変形して, $c_{n+1} = \frac{\boxed{4}a_{n+1}}{a_n + \boxed{3}} c_n$ を得る。さらに, $p = \boxed{3}$ であることから, 数列 $\{c_n\}$ は $\boxed{2}$ ことがわかる。

タ の解答群

① すべての項が同じ値をとる数列である

② 公差が0でない等差数列である

③ 公比が1より大きい等比数列である

解答

③ 公比が1より小さい等比数列である

④ 等差数列でも等比数列でもない

(4) q, u は定数で, $q \neq 0$ とする。数列 $\{b_n\}$ に対して, 初項3の数列 $\{d_n\}$ が次を満たすとする。

$$d_n b_{n+1} - q d_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots ⑦$$

 $r = \boxed{2}$ であることから, ⑦ を変形して, $d_{n+1} = \frac{\boxed{2}}{q} (d_n + u)$ を得る。

したがって, 数列 $\{d_n\}$ が, 公比が0より大きく1より小さい等比数列となるための必要十分条件は, $q > \boxed{2}$ かつ $u = \boxed{0}$ である。

解説

(1) $a_n = 3 + (n-1)p \quad \dots\dots\dots ②, \quad a_{n+1} = 3 + np \quad \dots\dots\dots ③, \quad b_n = 3r^{n-1}$ $a_n b_{n+1} - 2a_{n+1} b_n + 3b_{n+1} = 0 \quad \dots\dots\dots ①$ の両辺を b_n で割ると,

$$a_n \frac{b_{n+1}}{b_n} - 2a_{n+1} + 3 \frac{b_{n+1}}{b_n} = 0 \quad \text{より,} \quad r a_n - 2a_{n+1} + 3r = 0 \quad \text{よって,}$$

$$2a_{n+1} = r(a_n + 3) \quad \dots\dots\dots ④$$

が成り立つことがわかる。④ に② と③ を代入すると

$$6 + 2np = r\{6 + (n-1)p\} \quad \text{より,} \quad (r-2)pn = r(p-6) + 6 \quad \dots\dots\dots ⑤$$

これがすべての n について成り立つこと, および $p \neq 0$ により, $r = 2$ このとき⑤ は, $2(p-6) + 6 = 0$ より, $p = 3$ (2) (1) より, $a_n = 3n, \quad b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ であるから,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 3k = \frac{3}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1} = 3(2^n - 1)$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ に対して, 初項3の数列 $\{c_n\}$ が次を満たすとする。

$$a_n c_{n+1} - 4a_{n+1} c_n + 3c_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots ⑥$$

$$\text{これと, } a_n = 3n \text{ を用いると, } c_{n+1} = \frac{4a_{n+1}}{a_n + 3} c_n = \frac{12(n+1)}{3(n+1)} c_n = 4c_n$$

よって, 数列 $\{c_n\}$ は, ② 公比が1より大きい等比数列である。(4) q, u は定数で, $q \neq 0$ とする。数列 $\{b_n\}$ に対して, 初項3の数列 $\{d_n\}$ が次を満たすとする。

$$d_n b_{n+1} - q d_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots ⑦$$

$$\text{これと, } b_n = 3 \cdot 2^{n-1} \text{ を用いると, } d_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{q b_n} (d_n + u) = \frac{2}{q} (d_n + u)$$

したがって, 数列 $\{d_n\}$ が, 公比が0より大きく1より小さい等比数列となるための必要十分は, $q > 2$ かつ $u = 0$ である。

[問題859→](#)

問題860 第4問(選択問題) (配点 20)

(22 共通テスト 数ⅡB)

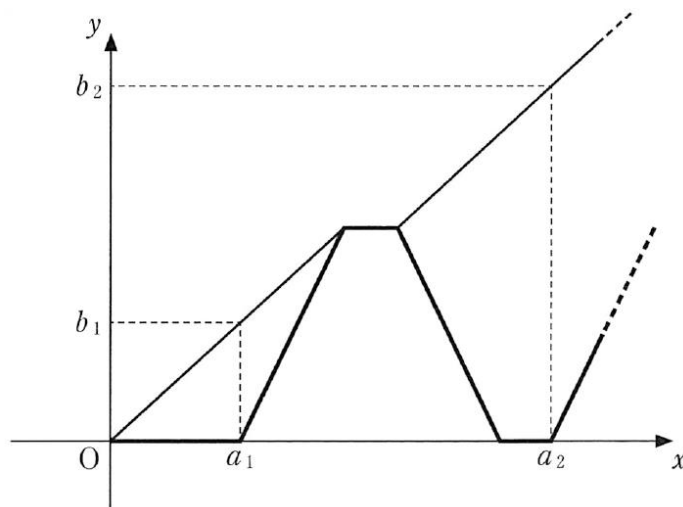
解答

以下のように、歩行者と自転車が自宅を出発して移動と停止を繰り返している。歩行者と自転車の動きについて、数学的に考えてみよう。

自宅を原点とする数直線を考え、歩行者と自転車をその数直線上を動く点とみなす。数直線上の点の座標が y であるとき、その点は位置 y にあるということにする。また、歩行者が自宅を出発してから x 分経過した時点時刻 x と表す。歩行者は時刻 0 に自宅を出発し、正の向きに毎分 1 の速さで歩き始める。自転車は時刻 2 に自宅を出発し、毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。自転車が歩行者に追いつくと、歩行者は自転車とともに 1 分だけ停止する。その後、歩行者は再び正の向きに毎分 1 の速さで歩き出し、自転車は毎分 2 の速さで自宅に戻る。自転車は自宅に到着すると、1 分だけ停止した後、再び毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。これを繰り返し、自転車は自宅と歩行者の間を往復する。

$x = a_n$ を自転車が n 回目に自宅を出発する時刻とし、 $y = b_n$ をそのときの歩行者の位置とする。

- (1) 花子さんと太郎さんは、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めるために、歩行者と自転車について、時刻 x において位置 y にいることを O を原点とする座標平面上の点 (x, y) で表すことにした。



$a_1 = 2$, $b_1 = 2$ により、自転車が最初に自宅を出発するときの時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(2, 0)$ であり、そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は $(2, 2)$ である。また、自転車が最初に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は $(\boxed{4}, \boxed{4})$ である。よって

$$a_2 = \boxed{8}, b_2 = \boxed{7}$$

である。

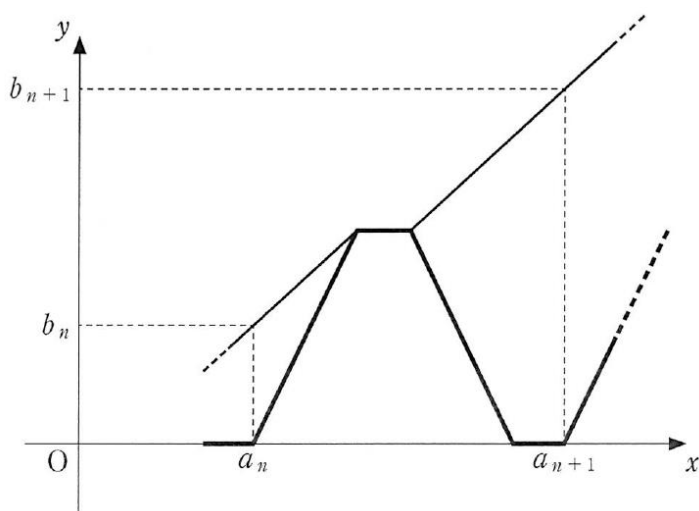
花子：数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項について考える前に $(\boxed{4}, \boxed{4})$ の求め方について整理してみようか。

太郎：花子さんはどうやって求めたの？

花子：自転車か歩行者を追いかけるときに、間隔が1分間に1ずつ縮まっていくことを利用したよ。

太郎：歩行者と自転車の動きをそれぞれ直線の方程式で表して、交点を計算して求めることもできるね。

自転車が n 回目に自宅を出発する時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(a_n, 0)$ であり、そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は (a_n, b_n) である。よって、 n 回目に自宅を出発した自転車が次に歩行者に追いつくときの位置を表す点の座標は、 a_n, b_n を用いて(,) と表せる。



, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | |
|----------------|----------------|----------|
| ① a_n | ① b_n | ② $2a_n$ |
| ③ $a_n + b_n$ | ④ $2b_n$ | ⑤ $3a_n$ |
| ⑥ $2a_n + b_n$ | ⑦ $a_n + 2b_n$ | ⑧ $3b_n$ |

以上から、数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ について、自然数 n に対して、関係式

$$a_{n+1} = a_n + \text{} b_n + \text{} \dots\dots\dots ①$$

$$b_{n+1} = 3b_n + \text{} \dots\dots\dots ②$$

が成り立つことがわかる。まず、 $b_1 = 2$ と②から

$$b_n = \text{} \quad (n = 1, 2, 3, \dots\dots)$$

を得る。この結果と、 $a_1 = 2$ および①から

$$a_n = \text{} \quad (n = 1, 2, 3, \dots\dots)$$

がわかる。

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | |
|-----------------|---|
| ① $3^{n+1} + 1$ | ① $\frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2}$ |
|-----------------|---|

② $3^{n+1} + n$	③ $\frac{1}{2} \cdot 3^n + n - \frac{1}{2}$
④ $3^{n+1} + n^2$	⑤ $\frac{1}{2} \cdot 3^n + n^2 - \frac{1}{2}$
⑥ $2 \cdot 3^{n-1}$	⑦ $\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}$
⑧ $2 \cdot 3^{n-1} + n - 1$	⑨ $\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + n - \frac{3}{2}$
㉑ $2 \cdot 3^{n-1} + n^2 - 1$	㉒ $\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + n^2 - \frac{3}{2}$

(2) 歩行者が $y = 300$ の位置に到着するときまでに、自転車が歩行者に追いつく回数は

4

回である。また、

4

回目に自転車が歩行者に追いつく時刻は、 $x =$

137

である。

解説 (1) 自転車が最初に自宅を出発してから、歩行者に追いつくまでの時間を t とすると、

$$2 + t = 2t \quad \text{より, } t = 2$$

$$\text{よって, } a_2 = 2 + 2 + 1 + 2 + 1 = 8, \quad b_2 = 8 - 1 = 7$$

n 回目に自宅を出発した自転車が次に歩行者に追いつくときの位置を表す点の座標は、

$$x = a_n + b_n, \quad y = 2b_n$$

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について、自然数 n に対して、

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n + 2 \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

$$b_{n+1} = 3b_n + 1 \quad \cdots \cdots \cdots \text{②}$$

が成り立つことがわかる。まず、 $b_1 = 2$ と② から、

$$b_1 = 2, \quad b_{n+1} = 3b_n + 1 \quad \leftarrow \alpha = 3\alpha + 1 \text{ とおくと, } \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$b_1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right) \quad \text{より,}$$

$$b_n + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} \quad \text{よって, } b_n = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}$$

を得る。この結果と、 $a_1 = 2$ および① から

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 5 \cdot 3^{n-1} + 1$$

よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (5 \cdot 3^{k-1} + 1) = 2 + \frac{5(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} + (n - 1) = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + n - \frac{3}{2}$$

$a_1 = 2$ より、これは $n = 1$ のときも成立する。

(2) n 回目に自宅を出発した自転車が次に歩行者に追いついたときの歩行者の位置について、

$$2b_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 2 \leq 300 \quad \text{とおくと, } n \leq 4 \quad \text{であり,}$$

$$n = 4 \quad \text{のとき, } a_4 + b_4 = 5 \cdot 3^3 + 4 - 2 = 137$$

よって、4回目に追いつく時刻は、 $x = 137$

問題860 →

問 題 編

問題850 第3問（選択問題）（配点 20）

（09 センター試験 数ⅡB）

問題

$\{a_n\}$ を初項 a_1 が 1 で公比が $\frac{1}{3}$ の等比数列とする。数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項を取り出して、数列

$\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。 $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$ とおく。

(1) $\{b_n\}$ も等比数列であり、その初項は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ 公比は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。したがって

$$T_n = \frac{\text{オ}}{\text{カ}} \left(1 - \frac{\text{キ}}{\text{ク}}^n \right)$$

である。また、積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を求めると

$$b_1 b_2 \cdots b_n = \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} n^2 \quad \text{となる。}$$

(2) 次に、数列 $\{c_n\}$ を $c_n = 2n \cdot b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定め、 $U_n = \sum_{k=1}^n c_k$ とおく。

$$\text{サ} \quad c_{n+1} - c_n = \text{シ} \quad b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^n (\text{サ} \quad c_{k+1} - c_k) = \text{シ} \quad T_n \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

である。また、この左辺の和をまとめ直すと、 U_n , c_{n+1} , c_1 を用いて

$$\sum_{k=1}^n (\text{サ} \quad c_{k+1} - c_k) = \text{ス} \quad U_n + \text{セ} \quad c_{n+1} - \text{ソ} \quad c_1 \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

と表される。 ① と ② より

$$U_n = \frac{\text{タチ}}{\text{ツテ}} - \frac{\text{トナ} \quad n + \text{ニヌ}}{\text{ツテ}} \cdot \frac{1}{\text{ネ}^n} \quad \text{となる。}$$

問題851 第3問（選択問題）（配点 20）

（08 センター試験 数ⅡB）

問題

（1）数列 $\{a_n\}$ は初項が7，公差が -4 の等差数列とする。数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{アイ}}n + \boxed{\text{ウエ}}$$

であり，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n a_k = \boxed{\text{オカ}}n^2 + \boxed{\text{キ}}n \quad \text{である。}$$

（2）数列 $\{b_n\}$ は，第 n 項が

$$b_n = pn^2 - qn - r$$

という n の2次式で表され

$$b_{n+1} - 2b_n = \boxed{\text{オカ}}n^2 + \boxed{\text{キ}}n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすとする。このとき

$$p = \boxed{\text{ク}}, \quad q = \boxed{\text{ケ}}, \quad r = \boxed{\text{コ}}$$

であり， $b_1 = \boxed{\text{サシ}}$ である。

さらに，次の条件によって定まる数列 $\{c_n\}$ を考えよう。

$$c_1 = 1$$

$$c_{n+1} - 2c_n = \boxed{\text{オカ}}n^2 + \boxed{\text{キ}}n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

① と ② より， $d_n = c_n - b_n$ とおくと

$$d_{n+1} - \boxed{\text{ス}}d_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。これより，数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = \boxed{\text{セ}} \cdot \boxed{\text{ソ}}^{n-1} + \boxed{\text{ク}}n^2 - \boxed{\text{ケ}}n - \boxed{\text{コ}} \quad \text{である。}$$

数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $\sum_{k=1}^n c_k$ は

$$\boxed{\text{タ}} \cdot \boxed{\text{チ}}^n + \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}n^3 - \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}n^2 - \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}n - \boxed{\text{ノ}} \quad \text{となる。}$$

問題 853 第3問 (選択問題) (配点 20)

(15 センター試験 数ⅡB)

問題 自然数 n に対し、 2^n の一の位の数 a_n とする。また、数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすとする。

(1) $a_1 = 2$, $a_2 = \boxed{\text{ア}}$, $a_3 = \boxed{\text{イ}}$, $a_4 = \boxed{\text{ウ}}$, $a_5 = \boxed{\text{エ}}$ である。

このことから、すべての自然数 n に対して、 $a_{\boxed{\text{オ}}} = a_n$ であることがわかる。

$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを、次の ①～④ のうちから一つ選べ。

- ① $5n$ ② $4n+1$ ③ $n+3$ ④ $n+4$ ⑤ $n+5$

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。① を繰り返し用いることにより

$$b_{n+4} = \frac{a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n}{2^{\boxed{\text{カ}}}} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことがわかる。ここで、 $a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n = 3 \cdot 2^{\boxed{\text{キ}}}$ であることから、

$$b_{n+4} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} b_n \text{ が成り立つ。このことから、自然数 } k \text{ に対して}$$

$$b_{4k-3} = \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}, \quad b_{4k-2} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}$$

$$b_{4k-1} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}, \quad b_{4k} = \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1} \text{ である。}$$

(3) $S_n = \sum_{j=1}^n b_j$ とおく。自然数 m に対して

$$S_{4m} = \boxed{\text{タ}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^m - \boxed{\text{チ}} \text{ である。}$$

(4) 積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を T_n とおく。自然数 k に対して

$$b_{4k-3} b_{4k-2} b_{4k-1} b_{4k} = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{\boxed{\text{テ}}(k-1)}$$

であることから、自然数 m に対して

$$T_{4m} = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}^m} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{\boxed{\text{ト}}m^2 - \boxed{\text{ナ}}m}$$

である。また、 T_{10} を計算すると、 $T_{10} = \frac{3^{\boxed{\text{ニ}}}}{2^{\boxed{\text{ヌネ}}}}$ である。

問題 854 第3問 (選択問題) (配点 20)

(16 センター試験 数ⅡB)

問題 真分数の分母の小さい順に、分母が同じ場合には分子の小さい順に並べてできる数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

を $\{a_n\}$ とする。真分数とは、分子と分母がともに自然数で、分子は分母より小さい分数のことであり、上の数列では、約分できる形の分数も含めて並べている。以下の問題に分数形で解答する場合は、**解答上の注意** (省略) にあるように、それ以上約分できない形で答えよ。

(1) $a_{15} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。また、分母に初めて8が現れる項は、 $a_{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(2) k を2以上の自然数とする。数列 $\{a_n\}$ において、 $\frac{1}{k}$ が初めて現れる項を第 M_k 項とし、

$\frac{k-1}{k}$ が初めて現れる項を第 N_k 項とすると

$$M_k = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} k^2 - \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} k + \boxed{\text{ケ}}$$

$$N_k = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} k^2 - \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} k$$

である。よって、 $a_{104} = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

(3) k を2以上の自然数とする。数列 $\{a_n\}$ の第 M_k 項から第 N_k 項までの和は

$$\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} k - \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。したがって、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 N_k 項までの和は

$$\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} k^2 - \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} k$$

である。よって

$$\sum_{n=1}^{103} a_n = \frac{\boxed{\text{ハヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}} \text{ である。}$$

問題855 第3問(選択問題) (配点 20)

(17 センター試験 数ⅡB)

問題 以下において考察する数列の項は、すべて実数であるとする。(1) 等比数列 $\{s_n\}$ の初項が1, 公比が2であるとき

$$s_1 s_2 s_3 = \boxed{\text{ア}}, \quad s_1 + s_2 + s_3 = \boxed{\text{イ}} \quad \text{である。}$$

(2) $\{s_n\}$ を初項 x , 公比 r の等比数列とする。 a, b を実数(ただし $a \neq 0$)とし, $\{s_n\}$ の最初の3項が

$$s_1 s_2 s_3 = a^3 \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = b \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

を満たすとする。このとき

$$xr = \boxed{\text{ウ}} \quad \dots\dots\dots \text{③}$$

である。さらに、②, ③を用いて r, a, b の満たす関係式を求めると

$$\boxed{\text{エ}} r^2 + (\boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}) r + \boxed{\text{キ}} = 0 \quad \dots\dots\dots \text{④}$$

を得る。④を満たす実数 r が存在するので

$$\boxed{\text{ク}} a^2 + \boxed{\text{ケ}} ab - b^2 \leq 0 \quad \dots\dots\dots \text{⑤}$$

である。

逆に、 a, b が⑤を満たすとき、③, ④を用いて r, x の値を求めることができる。(3) $a = 64, b = 336$ のとき、(2)の条件①, ②を満たし、公比が1より大きい等比列 $\{s_n\}$ を考える。③, ④を用いて $\{s_n\}$ の公比 r と初項 x を求めると、

$$r = \boxed{\text{コ}}, \quad x = \boxed{\text{サシ}} \quad \text{である。}$$

 $\{s_n\}$ を用いて、数列 $\{t_n\}$ を

$$t_n = s_n \log \boxed{\text{ク}} s_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。このとき、 $\{t_n\}$ の一般項は $t_n = (n + \boxed{\text{ス}}) \cdot \boxed{\text{コ}}^{n + \boxed{\text{セ}}}$ である。 $\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和 U_n は、 $U_n - \boxed{\text{コ}} U_n$ を計算することにより

$$U_n = \frac{\boxed{\text{ソ}} n + \boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \cdot \boxed{\text{コ}}^{n + \boxed{\text{ツ}}} - \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

であることがわかる。

問題 856 第3問 (選択問題) (配点 20)

(18 センター試験 数ⅡB)

問題

第4項が30, 初項から第8項までの和が288である等差数列を $\{a_n\}$ とし, $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。また, 第2項が36, 初項から第3項までの和が156である等比数列で公比が1より大きいものを $\{b_n\}$ とし, $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする。

(1) $\{a_n\}$ の初項は , 公差は であり

$$S_n = \text{オ} n^2 - \text{カキ} n \quad \text{である。}$$

(2) $\{b_n\}$ の初項は , 公比は であり

$$T_n = \text{サ} (\text{シ}^n - \text{ス}) \quad \text{である。}$$

(3) 数列 $\{c_n\}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^n (n-k+1)(a_k - b_k) \\ &= n(a_1 - b_1) + (n-1)(a_2 - b_2) + \cdots + 2(a_{n-1} - b_{n-1}) + (a_n - b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

たとえば

$$c_1 = a_1 - b_1, \quad c_2 = 2(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)$$

$$c_3 = 3(a_1 - b_1) + 2(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$$

である。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよう。

$\{c_n\}$ の階差数列を $\{d_n\}$ とする。 $d_n = c_{n+1} - c_n$ であるから, $d_n = \text{セ}$ を満たす。

に当てはまるものを, 次の ①～⑦ のうちから一つ選べ。

- | | | |
|------------------------|------------------------|-----------------------|
| ① $S_n + T_n$ | ① $S_n - T_n$ | ② $-S_n + T_n$ |
| ③ $-S_n - T_n$ | ④ $S_{n+1} + T_{n+1}$ | ⑤ $S_{n+1} - T_{n+1}$ |
| ⑥ $-S_{n+1} + T_{n+1}$ | ⑦ $-S_{n+1} - T_{n+1}$ | |

したがって, (1) と (2) により

$$d_n = \text{ソ} n^2 - 2 \cdot \text{タ} n + \text{チ}$$

である。 $c_1 = \text{ツテト}$ であるから, $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = \text{ナ} n^3 - \text{ニ} n^2 + n + \text{ヌ} - \text{タ} n + \text{ネ}$$

である。

問題 857 第3問 (選択問題) (配点 20)

(19 センター試験 数ⅡB)

問題 初項が3、公比が4の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。また、数列 $\{T_n\}$ は、初項が -1 であり、 $\{T_n\}$ の階差数列が数列 $\{S_n\}$ であるような数列とする。

(1) $S_2 =$, $T_2 =$ である。

(2) $\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ の一般項は、それぞれ

$$S_n = \text{}^{\text{} - \text{}$$

$$T_n = \frac{\text{^{\text{}}{\text{} - n - \frac{\text{}{\text{}$$

である。ただし、 と については、当てはまるものを、次の ①～④ のうちから一つ選べ。同じものを選んでもよい。

① $n-1$ ① n ② $n+1$ ③ $n+2$ ④ $n+3$

(3) 数列 $\{a_n\}$ は、初項が -3 であり、漸化式

$$na_{n+1} = 4(n+1)a_n + 8T_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

そのために、 $b_n = \frac{a_n + 2T_n}{n}$ により定められる数列 $\{b_n\}$ を考える。 $\{b_n\}$ の初項は

である。 $\{T_n\}$ は漸化式

$$T_{n+1} = \text{ } T_n + \text{ } n + \text{ \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすから、 $\{b_n\}$ は漸化式

$$b_{n+1} = \text{ } b_n + \text{ \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすことがわかる。よって、 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \text{ } \cdot \text{ }^{\text{} - \text{}$$

である。ただし、 については、当てはまるものを、次の ①～④ のうちから一つ選べ。

① $n-1$ ① n ② $n+1$ ③ $n+2$ ④ $n+3$

したがって、 $\{T_n\}$ 、 $\{b_n\}$ の一般項から $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$a_n = \frac{\text{ (\text{ } n + \text{) \text{ }^{\text{} + \text{}}{\text{}} \quad \text{である。}$$

問題 858 第3問 (選択問題) (配点 20)

(20 センター試験 数ⅡB)

問題 数列 $\{a_n\}$ は、初項 a_1 が 0 であり、 $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき次の漸化式を満たすものとする。

$$a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1} \{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\} \dots\dots\dots ①$$

(1) $a_2 = \boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $b_n = \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおき、 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。

$\{b_n\}$ の初項 b_1 は $\boxed{\text{イ}}$ である。① の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{(n + \boxed{\text{エ}})(n + \boxed{\text{オ}})} - \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^{n+1}$$

を得る。ただし、 $\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$ とする。したがって、

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{n + \boxed{\text{エ}}} - \frac{\boxed{\text{キ}}}{n + \boxed{\text{オ}}} \right) - \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^{n+1} \text{ である。}$$

n を 2 以上の自然数とすると

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{k + \boxed{\text{エ}}} - \frac{\boxed{\text{キ}}}{k + \boxed{\text{オ}}} \right) = \frac{1}{\boxed{\text{ク}}} \left(\frac{n - \boxed{\text{ケ}}}{n + \boxed{\text{コ}}} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^{k+1} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} - \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^n$$

が成り立つことを利用すると

$$b_n = \frac{n - \boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}(n + \boxed{\text{チ}})} + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^n$$

が得られる。これは $n = 1$ のときも成り立つ。

(3) (2) により、 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{ツ}}^{n - \boxed{\text{テ}}} (n^2 - \boxed{\text{ト}}) + \frac{(n + \boxed{\text{ナ}})(n + \boxed{\text{ニ}})}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

で与えられる。ただし、 $\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$ とする。

このことから、すべての自然数 n について、 a_n は整数となることがわかる。

(4) k を自然数とする。 a_{3k} , a_{3k+1} , a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ $\boxed{\text{ネ}}$, $\boxed{\text{ノ}}$,

$\boxed{\text{ハ}}$ である。また、 $\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは

$\boxed{\text{ヒ}}$ である。

問題859 第4問(選択問題) (配点 20)

(21 共通テスト 数ⅡB)

問題 初項3、公差 p の等差数列を $\{a_n\}$ とし、初項3、公比 r の等比数列を $\{b_n\}$ とする。

ただし、 $p \neq 0$ かつ $r \neq 0$ とする。さらに、これらの数列が次を満たすとする。

$$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1} b_n + 3b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{..... ①}$$

(1) p と r を求めよう。自然数 n について、 a_n 、 a_{n+1} 、 b_n はそれぞれ

$$a_n = \boxed{\text{ア}} + (n-1)p \quad \text{..... ②}$$

$$a_{n+1} = \boxed{\text{ア}} + np \quad \text{..... ③}$$

$$b_n = \boxed{\text{イ}} r^{n-1}$$

と表される。 $r \neq 0$ により、すべての自然数 n について、 $b_n \neq 0$ となる。

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = r$ であることから、①の両辺を b_n で割ることにより

$$\boxed{\text{ウ}} a_{n+1} = r(a_n + \boxed{\text{エ}}) \quad \text{..... ④}$$

が成り立つことがわかる。④に②と③を代入すると

$$(r - \boxed{\text{オ}})pn = r(p - \boxed{\text{カ}}) + \boxed{\text{キ}} \quad \text{..... ⑤}$$

となる。⑤がすべての n について成り立つことおよび $p \neq 0$ により、 $r = \boxed{\text{オ}}$

を得る。さらに、このことから、 $p = \boxed{\text{ク}}$ を得る。

以上から、すべての自然数 n について、 a_n と b_n が正であることもわかる。

(2) $p = \boxed{\text{ク}}$ 、 $r = \boxed{\text{オ}}$ であることから、 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和は、それぞれ次の式で与えられる。

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} n(n + \boxed{\text{サ}})$$

$$\sum_{k=1}^n b_k = \boxed{\text{シ}} (\boxed{\text{オ}}^n - \boxed{\text{ス}})$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ に対して、初項3の数列 $\{c_n\}$ が次を満たすとする。

$$a_n c_{n+1} - 4a_{n+1} c_n + 3c_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{..... ⑥}$$

a_n が正であることから、⑥を変形して、 $c_{n+1} = \frac{\boxed{\text{セ}} a_{n+1}}{a_n + \boxed{\text{ソ}}} c_n$ を得る。

さらに、 $p = \boxed{\text{ク}}$ であることから、数列 $\{c_n\}$ は $\boxed{\text{タ}}$ ことがわかる。

タの解答群

- ① すべての項が同じ値をとる数列である
- ① 公差が0でない等差数列である
- ② 公比が1より大きい等比数列である

問題

- ③ 公比が1より小さい等比数列である
 ④ 等差数列でも等比数列でもない

(4) q, u は定数で, $q \neq 0$ とする。数列 $\{b_n\}$ に対して, 初項3の数列 $\{d_n\}$ が次を満たすとする。

$$d_n b_{n+1} - q d_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

$r = \boxed{\text{オ}}$ であることから, ⑦ を変形して, $d_{n+1} = \frac{\boxed{\text{チ}}}{q} (d_n + u)$ を得る。

したがって, 数列 $\{d_n\}$ が, 公比が0より大きく1より小さい等比数列となるための必要十分

問題 860 第4問 (選択問題) (配点 20)

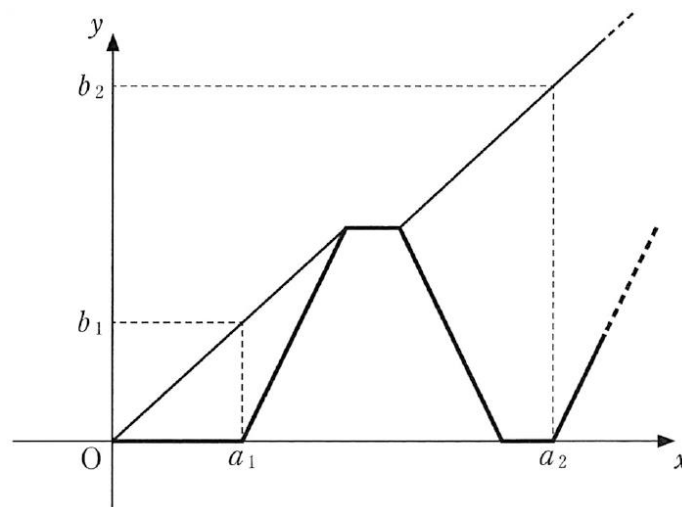
(22 共通テスト 数ⅡB)

問題 以下のように、歩行者と自転車が自宅を出発して移動と停止を繰り返している。歩行者と自転車の動きについて、数学的に考えてみよう。

自宅を原点とする数直線を考え、歩行者と自転車をその数直線上を動く点とみなす。数直線上の点の座標が y であるとき、その点は位置 y にあるということにする。また、歩行者が自宅を出発してから x 分経過した時点時刻 x と表す。歩行者は時刻 0 に自宅を出発し、正の向きに毎分 1 の速さで歩き始める。自転車は時刻 2 に自宅を出発し、毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。自転車が歩行者に追いつくと、歩行者は自転車とともに 1 分だけ停止する。その後、歩行者は再び正の向きに毎分 1 の速さで歩き出し、自転車は毎分 2 の速さで自宅に戻る。自転車は自宅に到着すると、1 分だけ停止した後、再び毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。これを繰り返し、自転車は自宅と歩行者の間を往復する。

$x = a_n$ を自転車が n 回目に自宅を出発する時刻とし、 $y = b_n$ をそのときの歩行者の位置とする。

- (1) 花子さんと太郎さんは、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めるために、歩行者と自転車について、時刻 x において位置 y にいることを O を原点とする座標平面上の点 (x, y) で表すことにした。



$a_1 = 2$, $b_1 = 2$ により、自転車が最初に自宅を出発するときの時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(2, 0)$ であり、そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は $(2, 2)$ である。また、自転車が最初に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{ア}})$ である。よって

$$a_2 = \boxed{\text{イ}}, b_2 = \boxed{\text{ウ}}$$

である。

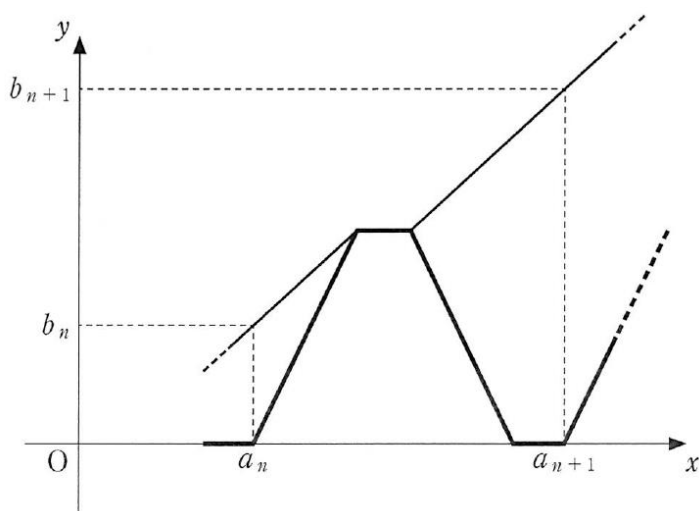
花子：数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項について考える前に $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{ア}})$ の求め方について整理してみようか。

太郎：花子さんはどうやって求めたの？

花子：自転車が行者を追いかけるときに、間隔が1分間に1ずつ縮まっていくことを利用したよ。

太郎：歩行者と自転車の動きをそれぞれ直線の方程式で表して、交点を計算して求めることもできるね。

自転車が n 回目に自宅を出発する時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(a_n, 0)$ であり、そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は (a_n, b_n) である。よって、 n 回目に自宅を出発した自転車が次に歩行者に追いつくときの位置を表す点の座標は、 a_n, b_n を用いて(エ , オ) と表せる。



エ , オ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | |
|----------------|----------------|----------|
| ① a_n | ① b_n | ② $2a_n$ |
| ③ $a_n + b_n$ | ④ $2b_n$ | ⑤ $3a_n$ |
| ⑥ $2a_n + b_n$ | ⑦ $a_n + 2b_n$ | ⑧ $3b_n$ |

以上から、数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ について、自然数 n に対して、関係式

$$a_{n+1} = a_n + \text{カ} b_n + \text{キ} \dots\dots\dots ①$$

$$b_{n+1} = 3b_n + \text{ク} \dots\dots\dots ②$$

が成り立つことがわかる。まず、 $b_1 = 2$ と②から

$$b_n = \text{ケ} \quad (n = 1, 2, 3, \dots\dots)$$

を得る。この結果と、 $a_1 = 2$ および①から

$$a_n = \text{コ} \quad (n = 1, 2, 3, \dots\dots)$$

がわかる。

ケ , コ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | |
|-----------------|---|
| ① $3^{n+1} + 1$ | ① $\frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2}$ |
|-----------------|---|

② $3^{n+1} + n$

③ $\frac{1}{2} \cdot 3^n + n - \frac{1}{2}$

④ $3^{n+1} + n^2$

⑤ $\frac{1}{2} \cdot 3^n + n^2 - \frac{1}{2}$

⑥ $2 \cdot 3^{n-1}$

⑦ $\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}$

⑧ $2 \cdot 3^{n-1} + n - 1$

⑨ $\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + n - \frac{3}{2}$

㉑ $2 \cdot 3^{n-1} + n^2 - 1$

㉒ $\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + n^2 - \frac{3}{2}$

(2) 歩行者が $y = 300$ の位置に到着するときまでに、自転車が歩行者に追いつく回数は

サ

回である。また、

サ

回目に自転車が歩行者に追いつく時刻は、 $x =$

シスセ

である。