

1 次の不等式を解け。

(1) $x^2 - 4|x| \geq 0$

・ $x \geq 0$ のとき

$$x^2 - 4x \geq 0 \text{ となり}$$

$$x(x-4) \geq 0 \text{ となり、条件より、} x=0, x \geq 4 \text{ --- ①}$$

・ $x < 0$ のとき

$$x^2 + 4x \geq 0 \text{ となり}$$

$$x(x+4) \geq 0 \text{ となり、条件より、} x \leq -4 \text{ --- ②}$$

①, ② より

$$x \leq -4, x=0, x \geq 4$$

(2) $|x^2 - 2x - 15| \leq x + 3$

$$x^2 - 2x - 15 \geq 0 \text{ とおける}$$

$$(x+3)(x-5) \geq 0 \text{ となり、} x \leq -3, x \geq 5$$

・ $x \leq -3, x \geq 5$ のとき

$$x^2 - 2x - 15 \leq x + 3 \text{ となり}$$

$$x^2 - 3x - 18 \leq 0$$

$$(x+3)(x-6) \leq 0 \text{ となり、}$$

$$\text{条件より } x = -3, 5 \leq x \leq 6 \text{ --- ①}$$

・ $-3 < x < 5$ のとき

$$-(x^2 - 2x - 15) \leq x + 3 \text{ となり}$$

$$x^2 - x - 12 \geq 0$$

$$(x+3)(x-4) \geq 0 \text{ となり、}$$

$$\text{条件より、} 4 \leq x < 5 \text{ --- ②}$$

①, ② より

$$x = -3, 4 \leq x \leq 6$$

2 連立不等式 $\begin{cases} x^2 + 7x + 6 \leq 0 \dots\dots\dots ① \\ x^2 - (a+1)x + a < 0 \dots\dots\dots ② \end{cases}$ を満たす整数 x

がちょうど3個存在するように、定数 a の値の範囲を定めよ。

① より $(x+1)(x+6) \leq 0$ となり、 $-6 \leq x \leq -1$ --- ③

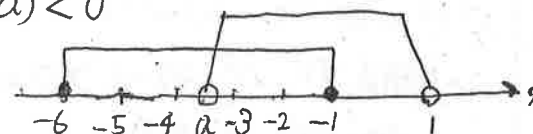
② より $(x-1)(x-a) < 0$

・ $a < 1$ のとき

右の図より

$$-4 \leq a < -3$$

・ $a > 1$ のときは不適。



3 次の各問いに答えよ。

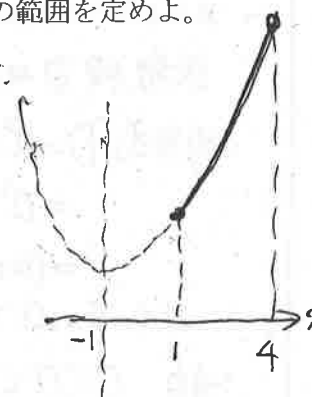
(1) 2次不等式 $x^2 + 2x + m(m-4) \geq 0$ が $1 \leq x \leq 4$ の範囲で常に成り立つように、定数 m の値の範囲を定めよ。

$$f(x) = x^2 + 2x + m(m-4) \text{ とおける}$$

$$f(1) = m^2 - 4m + 3 \geq 0$$

$$(m-1)(m-3) \geq 0 \text{ となり}$$

$$m \leq 1, m \geq 3$$

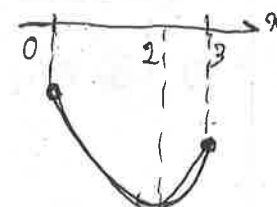


(2) $0 \leq x \leq 3$ の範囲で2次関数 $y = x^2 - 4x + m(m-3)$ の値が常に負になるように、定数 m の値の範囲を定めよ。

$$f(x) = x^2 - 4x + m(m-3) \text{ とおける}$$

$$f(0) = m(m-3) < 0 \text{ となり}$$

$$0 < m < 3$$



4 2次関数 $f(x) = x^2 - ax + 1$ (a は定数) がある。

(1) 放物線 $C: y = f(x)$ が x 軸から切り取る線分の長さが $2\sqrt{3}$ となる定数 a の値を求めよ。

$$x^2 - ax + 1 = 0 \text{ と解くと}$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} \text{ となり}$$

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \sqrt{a^2 - 4} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$$

$$a^2 - 4 = 12 \text{ となり、} a^2 = 16$$

$$\text{よって、} a = \pm 4$$

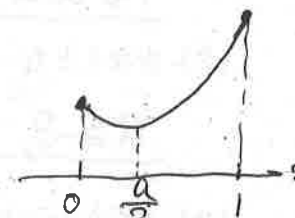
(2) $0 < a \leq 2$ とする。 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値を M 、最小値を m とするとき、 $M - m$ を次の各場合について、 a の式で表せ。

i) $0 < a \leq 1$ のとき

$$M = f(1) = 2 - a$$

$$m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + 1 \text{ となり}$$

$$M - m = \frac{a^2}{4} - a + 1$$

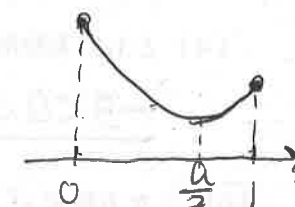


ii) $1 < a \leq 2$ のとき

$$M = f(0) = 1$$

$$m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + 1 \text{ となり}$$

$$M - m = \frac{a^2}{4}$$



(3) (2) のとき、 $M - m = \frac{1}{2}$ となる定数 a の値を求めよ。

・ $0 < a \leq 1$ のとき

$$\frac{a^2}{4} - a + 1 = \frac{1}{2} \text{ とおける。} a^2 - 4a + 2 = 0 \text{ となり}$$

$$\text{条件より、} a = 2 - \sqrt{2}$$

・ $1 < a \leq 2$ のとき

$$\frac{a^2}{4} = \frac{1}{2} \text{ とおける。} a^2 = 2 \text{ となり}$$

$$\text{条件より、} a = \sqrt{2}$$

- 5 2つの2次方程式 $x^2 + (a+3)x + a+3 = 0$ …… ①,
 $x^2 - 2ax + 2a^2 - 4 = 0$ …… ② について、次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ。

(1) ともに実数解をもつ。

①が実数解をもつ条件は、

$$\text{判別式 } D = (a+3)^2 - 4(a+3) = a^2 + 2a - 3 \geq 0$$

$$(a+3)(a-1) \geq 0 \text{ より } a \leq -3, a \geq 1 \text{ …… ③}$$

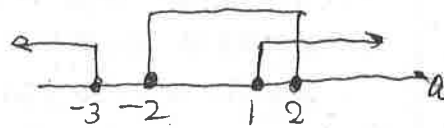
②が実数解をもつ条件は、

$$\text{判別式 } D' = a^2 - 2a^2 + 4 = 4 - a^2 \geq 0$$

$$a^2 \leq 4 \text{ より } -2 \leq a \leq 2 \text{ …… ④}$$

③, ④より、

$$1 \leq a \leq 2$$



(2) 少なくとも一方が実数解をもつ。

$$a \leq -3, a \geq -2$$

(3) どちらか一方だけが実数解をもつ。

$$a \leq -3, -2 \leq a < 1, a > 2$$

(4) ともに実数解をもたない。

$$-3 < a < -2$$

- 6 2次方程式 $x^2 - 2ax + 3a + 4 = 0$ が次のような異なる2つの解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

(1) ともに2より大きい

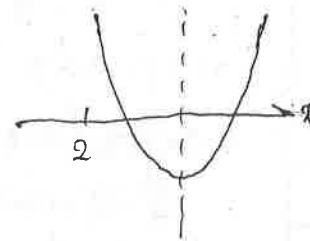
$$\text{判別式 } D' = a^2 - 3a - 4 > 0 \text{ より}$$

$$(a+1)(a-4) > 0$$

$$\text{よって } a < -1, a > 4 \text{ …… ①}$$

$$\text{放物線の軸 } x = a > 2 \text{ …… ②}$$

$$x=2 \text{ のとき } y = -a+8 > 0 \text{ より } a < 8 \text{ …… ③}$$

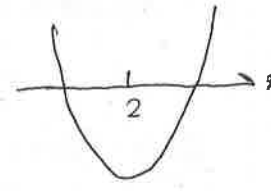


$$\text{①} \sim \text{③} \text{ より } 4 < a < 8$$

(2) 1つは2より大きく、もう1つは2より小さい

$$x=2 \text{ のとき } y = -a+8 < 0 \text{ より}$$

$$a > 8$$



(3) ともに2より小さい

$$\text{判別式 } D' = a^2 - 3a - 4 > 0 \text{ より}$$

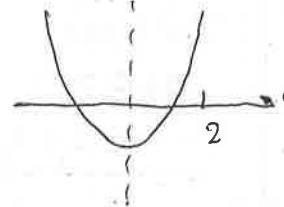
$$(a+1)(a-4) > 0$$

$$\text{よって } a < -1, a > 4 \text{ …… ①}$$

$$\text{軸 } x = a < 2 \text{ …… ②}$$

$$x=2 \text{ のとき } y = -a+8 > 0 \text{ より } a < 8 \text{ …… ③}$$

$$\text{①} \sim \text{③} \text{ より } a < -1$$



- 7 2次方程式 $x^2 - ax - a + 3 = 0$ が $0 < x < 4$ の範囲に異なる2つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

$$\text{放物線 } y = x^2 - ax - a + 3 \text{ を考える。}$$

$$\text{判別式 } D = a^2 - 4(-a+3)$$

$$= a^2 + 4a - 12$$

$$= (a+6)(a-2) > 0 \text{ より}$$

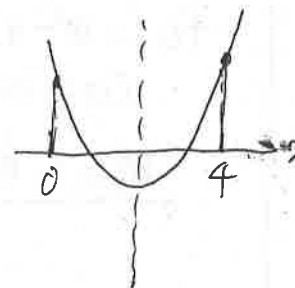
$$a < -6, a > 2 \text{ …… ①}$$

$$\text{軸 } 0 < a < 4 \text{ …… ②}$$

$$x=0 \text{ のとき } y = -a+3 > 0 \text{ より } a < 3 \text{ …… ③}$$

$$x=4 \text{ のとき } y = -5a+19 > 0 \text{ より } a < \frac{19}{5} \text{ …… ④}$$

$$\text{①} \sim \text{④} \text{ より } 2 < a < 3$$



- 8 2つの2次方程式 $x^2 + 2x + m = 0$, $x^2 + 3x + 2m = 0$ が共通な解をもつとき、定数 m の値を求めよ。また、そのときの共通解を求めよ。

共通解を x とすると、

$$\begin{cases} x^2 + 2x + m = 0 & \text{--- ①} \\ x^2 + 3x + 2m = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\text{①} \times 2 - \text{②} \text{ より } x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0 \text{ より } x = 0, -1$$

$$x = 0 \text{ のとき ① より } m = 0 \text{ であり共通解 } x = 0$$

$$x = -1 \text{ のとき ① より } m = 1 \text{ であり共通解 } x = -1$$

- 9 方程式 $|x^2 - 1| + x - m = 0$ が解を4個もつような定数 m の値の範囲を求めよ。

$$|x^2 - 1| + x = m \text{ より}$$

$$y = |x^2 - 1| + x \text{ のグラフを考える。}$$

$$x \geq 1, x \leq -1 \text{ のとき}$$

$$y = (x^2 - 1) + x$$

$$= x^2 + x - 1$$

$$-1 < x < 1 \text{ のとき}$$

$$y = -(x^2 - 1) + x$$

$$= -x^2 + x + 1$$

$$= -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$$

よって グラフより

$$1 < m < \frac{5}{4}$$

