

数学 I 第 2 章 集合と命題

1 限目	P 5 0 ～ P 5 2	集合 (1)
2 限目	P 5 3 ～ P 5 5	集合 (2) ド・モルガンの法則
3 限目	P 5 6 ～ P 5 8	命題と条件
4 限目	P 5 9 ～ P 6 1	必要条件と十分条件
5 限目	P 6 2 ～ P 6 3	命題の逆・対偶・裏
6 限目	P 6 4 ～ P 6 5	命題と証明
7 限目	P 6 6	$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明
8 限目	P 6 7	補充問題
9 限目	P 6 8	章末問題 A・B

第2章 集合と命題 練習問題 解答

練習1 正の奇数全体の集合をAとすると、

- (1) $5 \in A$ (2) $6 \notin A$ (3) $-3 \notin A$

練習2

- (1) 12の正の約数全体の集合Aは

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

- (2) 30以下の正の奇数全体の集合Bは

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$$

練習3

- (1) $A = \{x \mid x \text{ は } 20 \text{ 以下の } 3 \text{ の正の倍数}\}$

$$= \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

- (2) $B = \{2n+1 \mid n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$= \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

練習4

- (1) $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ のとき、

$$A \subset B$$

- (2) $C = \{1, 2, 5, 10\}$, 10の正の約数全体の集合D のとき、

$$C = D$$

- (3) $P = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ 以下の自然数}\}$, $Q = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$ のとき、

$$P \supset Q$$

練習5

- (1) $\{1, 2\}$ の部分集合は、 ϕ , $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$

- (2) $\{a, b, c\}$ の部分集合は、 ϕ , $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$

練習6 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3\}$ のとき、

- (1) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$

- (2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

- (3) $B \cap C = \phi$

- (4) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

練習7 $A = \{x \mid 0 < x < 2, x \text{ は実数}\}$, $B = \{x \mid 1 \leq x \leq 4, x \text{ は実数}\}$ のとき、

- (1) $A \cap B = \{x \mid 1 \leq x < 2, x \text{ は実数}\}$

- (2) $A \cup B = \{x \mid 0 < x \leq 4, x \text{ は実数}\}$

練習8 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 6\}$ のとき、

- (1) $\overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$

- (2) $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

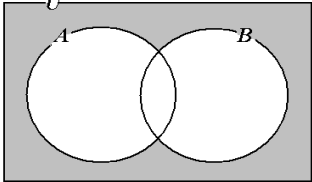
- (3) $\overline{A \cap B} = \{4, 5\}$ $\leftarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ である。

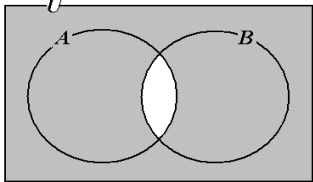
- (4) $\overline{A \cup B} = \{1, 2, 4, 5, 6\} \quad \leftarrow \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ である。
- (5) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{6\}$
- (6) $A \cap \overline{B} = \{1, 2\}$

練習 9 省略

重要

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$


$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$


研究 練習 1 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ のとき,

$A \cap B \cap C = \{6\}$

$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

練習 10

- (1) 「実数 -1 について $(-1)^2 \geq 0$ である。」は 真
- (2) 「実数 -3 について $\sqrt{(-3)^2} = -3$ である。」は 偽
- (3) 「正三角形は二等辺三角形である。」は 真
- (正三角形は二等辺三角形の条件を満たしている。つまり、正三角形 $\implies$ 二等辺三角形)

練習 11

- (1) 「 $x = 2$ のとき $x \geq 1$ 」は 真
- (2) 「 $x = -1$ のとき $x \geq 1$ 」は 偽
- (3) 「 $x = \sqrt{3}$ のとき $x \geq 1$ 」は 真

練習 12

- (1) $p : x \leq 2 \implies q : x \leq 4$ は 真
- (2) 自然数 m について,
- $p : m$ は 12 の正の約数 $\implies q : m$ は 24 の正の約数 は 真

練習 13

$p : n$ は素数 $\implies q : n$ は奇数 は 偽

反例: $n = 2$ は素数であるが、奇数ではない。

練習 14

- (1) $p : a > 1 \implies q : a > 0$ であるから,
- $a > 1$ は $a > 0$ であるための十分条件 である。
- (2) $p : n$ は 3 の倍数 $\Leftarrow q : n = 9$ であるから,
- n が 3 の倍数であることは $n = 9$ であるための必要条件 である。

重要**必要条件・十分条件**

- ・ $p \Rightarrow q$: p は q であるための **十分条件**
- ・ $p \Leftarrow q$: p は q であるための **必要条件**
- ・ $p \Leftrightarrow q$: p は q であるための **必要十分条件** (p と q は同値である)

重要

必要条件と**十分条件**は、次のように考えると理解しやすい。

人間である $\Rightarrow$ 動物である が成り立つとき、

- 動物であることは、人間であるための**必要条件** (最低限**必要**な**条件**と考える。)
- 人間であることは、動物であるための**十分条件** (**十分**に厳しい**条件**と考える。)

練習 15

- ① $p : a + c = b + c \Leftrightarrow q : a = b$
- ② $p : a^2 = b^2 \Leftarrow q : a = b$
- ③ $p : (a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow q : a = b$

よって、 $a = b$ と同値な条件は、①、③ である。

練習 16

- (1) p : 四角形 $ABCD$ は長方形 $\Rightarrow q$: 四角形 $ABCD$ は対角線の長さが等しい であるから、
(等脚台形 $ABCD$ は対角線の長さが等しいが、長方形ではない)
四角形 $ABCD$ が長方形であることは、四角形 $ABCD$ の対角線の長さが等しいための**十分条件**
- (2) $p : a \geq b \Leftrightarrow q : |a - b| = a - b$ であるから、
 $a \geq b$ は、 $|a - b| = a - b$ である ための**必要十分条件**
- (3) p : 積 mn が偶数 $\Leftarrow q$: m が偶数 であるから、
積 mn が偶数であることは、 m が偶数である ための**必要条件**

練習 17

- (1) 条件「 n は偶数である」の否定は、
「 n は偶数でない」すなわち「 n は奇数である」
- (2) 条件「 n は 5 より小さい」すなわち「 $n < 5$ 」の否定は、
「 n は 5 以上である」すなわち「 $n \geq 5$ 」

練習 18

- (1) 条件「 $a > 0$ かつ $b > 0$ 」の否定は、
「 $a \leq 0$ または $b \leq 0$ 」
- (2) 条件「 $a = 0$ または $b = 0$ 」の否定は、
「 $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ 」

重要

条件の否定 条件 p, q について、

p かつ q の否定は、 $\bar{p}$ または $\bar{q}$ (集合では、 $\overline{P \cap Q} = \bar{P} \cup \bar{Q}$)

p または q の否定は、 $\bar{p}$ かつ $\bar{q}$ (集合では、 $\overline{P \cup Q} = \bar{P} \cap \bar{Q}$)

練習 19

- (1) 条件「 a, b の少なくとも一方は有理数である」の否定は,
「 a, b はともに無理数である」
- (2) 条件「 a, b はともに有理数である」の否定は,
「 a, b の少なくとも一方は無理数である」

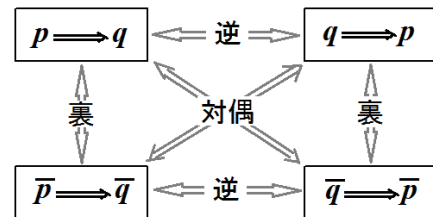
練習 20

- (1) 命題: $a > b \implies a - b > 0$ 真
逆: $a - b > 0 \implies a > b$ 真
裏: $a \leq b \implies a - b \leq 0$ 真
対偶: $a - b \leq 0 \implies a \leq b$ 真
- (2) 命題: $a = 0 \implies ab = 0$ 真
逆: $ab = 0 \implies a = 0$ 偽
裏: $a \neq 0 \implies ab \neq 0$ 偽
対偶: $ab \neq 0 \implies a \neq 0$ 真

重要

命題 「 p ならば, q 」 のとき,
命題の逆 「 q ならば, p 」
命題の裏 「 p でないならば, q でない」
命題の対偶 「 q でないならば, p でない」

- もとの命題が真でも, その逆が真とは限らない。
- もとの命題の真偽と, その対偶の真偽は一致する。



練習 21

- (1) 命題: m は 4 の倍数 $\implies m$ は偶数 真
対偶: m は奇数 $\implies m$ は 4 の倍数でない 真
- (2) 命題: $m + n$ は偶数 $\implies m$ は偶数 または n は偶数 偽
対偶: m, n はともに奇数 $\implies m + n$ は奇数 偽

練習 22 命題「 n^2 が奇数ならば, n は奇数である」を証明する。

証明

対偶 「 n が偶数ならば, n^2 は偶数である」を証明する。
 n が偶数のとき, n はある整数 k を用いて $n = 2k$ と表せる。
このとき, $n^2 = 4k^2$ であるから, n^2 は偶数である。
よって, 対偶が真であるから, もとの命題も真である。

練習 23 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて, 命題「 $1+3\sqrt{2}$ は無理数である」を証明する。

証明

背理法を用いて証明する。
 $1+3\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると, ある有理数 r を用いて, $1+3\sqrt{2} = r$ と表せる。
このとき, $\sqrt{2} = \frac{r-1}{3}$ であるが, $\frac{r-1}{3}$ は有理数であるから, $\sqrt{2}$ が無理数であることと矛盾する。よって, $1+3\sqrt{2}$ は無理数である。

第2章 集合と命題 補充問題 解答

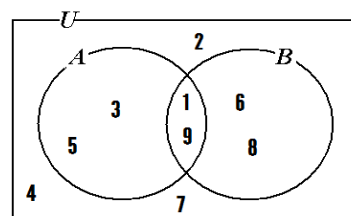
1. 命題： $a+b$ は無理数 $\implies a, b$ の少なくとも一方は無理数
 対偶： a, b はともに有理数 $\implies a+b$ は有理数 は 真である。

2.

- (1) m が6で割り切れる $\implies m$ が2で割り切れる であるから、
 m が6で割り切れることは、 m が2で割り切れるための (c) 十分条件である。
 (2) m が2で割り切れる $\nleftrightarrow m$ が素数である
 m が2で割り切れることは m が素数であるための (d) 必要条件でも十分条件でもない。

第2章 集合と命題 章末問題 解答

1. $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{1, 9\}$, $\overline{A} \cap B = \{6, 8\}$,
 $\overline{A \cup B} = \{2, 4, 7\}$ のとき,
 $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 8, 9\}$, $A \cap \overline{B} = \{3, 5\}$
 よって, $A = \{1, 3, 5, 9\}$, $B = \{1, 6, 8, 9\}$



2. U を実数全体の集合とし、 U の部分集合 A, B が

$$A = \left\{ x \mid x < -\frac{2}{3} \right\}, \quad B = \{ x \mid -1 \leq x \leq 2 \} \quad \text{のとき,}$$

- (1) $A \cap B = \left\{ x \mid -1 \leq x < -\frac{2}{3} \right\}$ (2) $A \cup B = \{ x \mid x \leq 2 \}$
 (3) $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B} = \{ x \mid x > 2 \}$

3.

- 命題：積 mnk は偶数 $\implies m, n, k$ の少なくとも1つは偶数 真
 逆： m, n, k の少なくとも1つは偶数 $\implies$ 積 mnk は偶数 真
 裏： 積 mnk は奇数 $\implies m, n, k$ はすべて奇数 真
 対偶： m, n, k はすべて奇数 $\implies$ 積 mnk は奇数 真

4. m, n が自然数のとき、命題「 $m^2 + n^2$ が偶数ならば、 $m+n$ は偶数である」を証明する。

証明 対偶 「 $m+n$ が奇数ならば、 $m^2 + n^2$ は奇数である」が真であることを証明する。

$m+n$ が奇数ならば、 m, n のうち1つは偶数で、もう1つは奇数である。

このとき、偶数の2乗は偶数、奇数の2乗は奇数であるから、 m^2, n^2 のうち1つは偶数で、もう1つは奇数である。偶数+奇数は奇数であるから、 $m^2 + n^2$ は奇数である。

よって、対偶が真であるから、もとの命題も真である。

5.

- (1) a, b が有理数のとき、命題「 $a+b\sqrt{2}=0 \implies a=b=0$ 」を証明する。

証明 $b \neq 0$ と仮定すると、 $a+b\sqrt{2}=0$ より、

$$\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \quad \text{となるが、} -\frac{a}{b} \text{は有理数であり、} \sqrt{2} \text{が無理数であることと矛盾する。}$$

よって、 $b=0$ このことから、 $a=-b\sqrt{2}=0$ である。

- (2) $a=2, b=-3$