1 次の３点を通る円の方程式を求めよ。

A(５，３)，B(－２，２)，C(２，－６)

円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおくと、

点A(5,3)を通るので、$5a+3b+c=-34$ …①

点B(-2,2)を通るので、$-2a+2b+c=-8$ より

$2a-2b-c=8$ …②

点C(2,-6)を通るので $2a-6b+c=-40$ …③

①+② より、$7a+b=-26$ …④

②+③ より、$4a-8b=-32$

よって、$a-2b=-8$ …⑤

④×2+⑤ より、$15a=-60$　よって、$a=-4$

④に代入して、$b=2$

②に代入して、$c=-20$

したがって、$x^2+y^2-4x+2y-20=0$

つまり $(x-2)^2+(y+1)^2=25$

2 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=2x-5$ の共有点の座標を求めよ。

$x^2+(2x-5)^2=10$ より、

$5x^2-20x+15=0$

$x^2-4x+3=0$

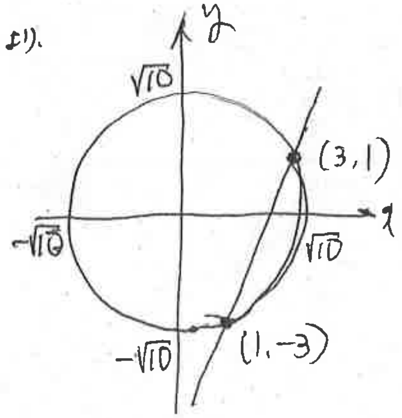
$(x-1)(x-3)=0$

よって、$x=1,\ 3$

・$x=1$ のとき $y=-3$

・$x=3$ のとき $y=1$

したがって、共有点は $(1,-3)$, $(3,1)$



3 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+m$ について，次の問いに答えよ。

（1）円の中心O(０，０)と直線の距離を m を用いて表せ。

円の中心O(0,0)と直線 $2x-y+m=0$ の

距離は $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m|}{\sqrt{5}}$

（2）円が直線から切り取る線分の長さが２であるとき，定数 m の値を求めよ。

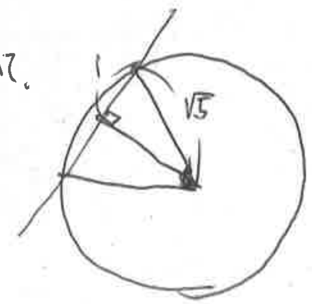
右図より、三平方の定理を用いて、

$\left(\dfrac{|m|}{\sqrt{5}}\right)^2+1^2=(\sqrt{5})^2$

$\dfrac{m^2}{5}+1=5$ より、

$m^2=20$

よって、$m=\pm2\sqrt{5}$



4 円 $x^2+y^2=10$ …… ① と直線 $y=2x-5$ …… ② の２つの交点と原点Oを通る円の方程式を求めよ。

求める直線を

$k(2x-y-5)+(x^2+y^2-10)=0$ とおくと、

原点O(0,0)を通るので、

$-5k-10=0$　より、$k=-2$

したがって、

$-2(2x-y-5)+(x^2+y^2-10)=0$ より、

$x^2+y^2-4x+2y=0$

つまり、$(x-2)^2+(y+1)^2=5$

5 点A(３，１)から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

接点を $P(p,q)$ とおくと、

$p^2+q^2=5$ …①

接線の方程式は $px+qy=5$ であり、これが

点A(3,1)を通るので

$3p+q=5$ …②

② より、$q=5-3p$ を ①に代入

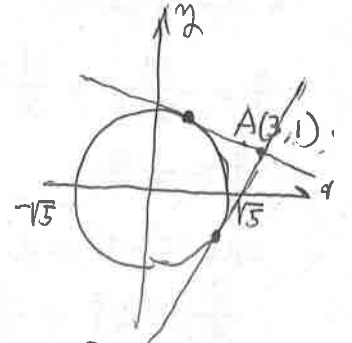
$p^2+(5-3p)^2=5$

$10p^2-30p+20=0$

$p^2-3p+2=0$　より、$p=1,\ 2$

・$p=1$ のとき $q=2$ より、接点 $(1,2)$，接線は $x+2y=5$

・$p=2$ のとき $q=-1$ より 接点 $(2,-1)$，接線は $2x-y=5$



6 原点Oからの距離と，点A(５，０)からの距離の比が３：２である点Pの軌跡を求めよ。

点P(x,y)とおくと、

$OP=\sqrt{x^2+y^2}$，$AP=\sqrt{(x-5)^2+y^2}$ であり、

$OP:AP=3:2$ より、$3AP=2OP$

つまり、$9AP^2=4OP^2$ より、

$9\{(x-5)^2+y^2\}=4(x^2+y^2)$

したがって、

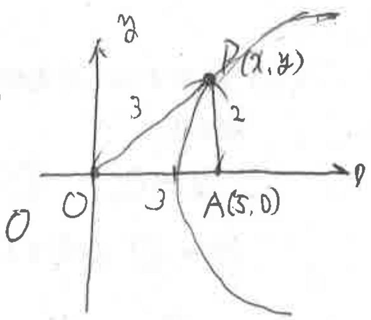
$5x^2+5y^2-90x+225=0$

$x^2+y^2-18x+45=0$

つまり

$(x-9)^2+y^2=36$ より、

点(9,0)を中心とする半径 6 の円である。



7　点Qが円 $x^2+y^2=4$ 上を動くとき，点A（6，0）と点Qを結ぶ線分ＡＱを２：１に内分する点Ｐの軌跡を求めよ。

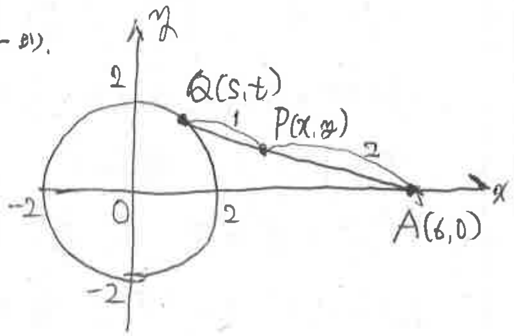
点$P(x, y)$，点$Q(s, t)$ とおくと.

・$x=\dfrac{2s+6}{2+1}=\dfrac{2s+6}{3}$ より

$s=\dfrac{3}{2}(x-2)$

・$y=\dfrac{2t}{2+1}=\dfrac{2t}{3}$ より

$t=\dfrac{3}{2}y$



これを $s^2+t^2=4$ に代入すると，

$\dfrac{9}{4}(x-2)^2+\dfrac{9}{4}y^2=4$ より，

$(x-2)^2+y^2=\dfrac{16}{9}$

よって，点 (2, 0) を中心とし，半径 $\dfrac{4}{3}$ の円

8　放物線 $y=x^2-2ax+2a+3$ について，

（１）頂点Ｐの座標を a を用いて表せ。

$y=(x-a)^2-a^2+2a+3$ より

頂点 $P(a, -a^2+2a+3)$

（２）a がすべての実数値をとって変化するとき，点Ｐの軌跡を求めよ。

$x=a$ …①，$y=-a^2+2a+3$ …② より，

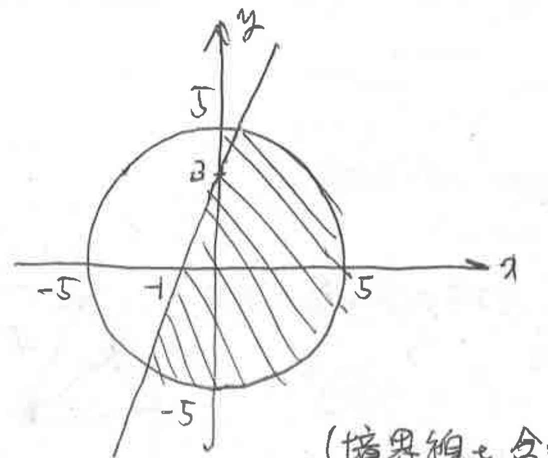
①を②に代入すると，

$y=-x^2+2x+3$

9　次の不等式の表す領域を図示せよ。

（１）$\begin{cases} x^2+y^2<25 & \cdots ① \\ 3x-y+3>0 & \cdots ② \end{cases}$

② より $y<3x+3$



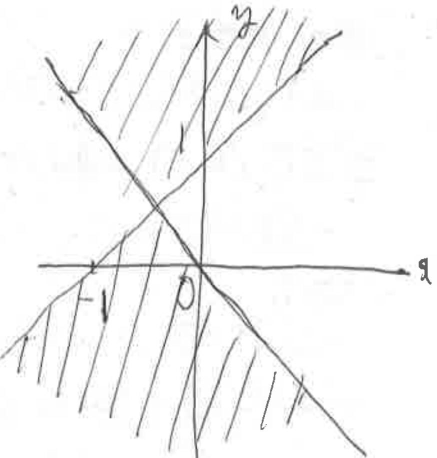
（境界線を含まない）

（２）$(x+y)(x-y+1)<0$

$\begin{cases} x+y>0 \\ x-y+1<0 \end{cases}$ のとき $\begin{cases} y>-x \\ y>x+1 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y<0 \\ x-y+1>0 \end{cases}$ のとき $\begin{cases} y<-x \\ y<x+1 \end{cases}$

（境界線を含まない）



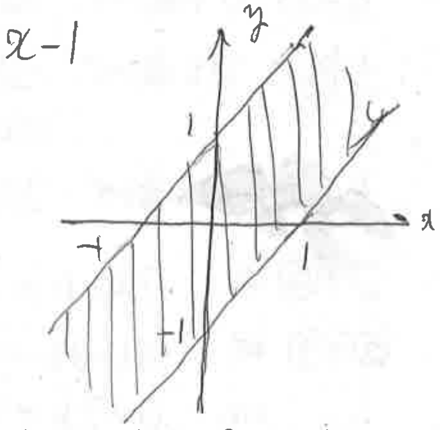
（３）$|x-y|\leqq 1$

$-1\leqq x-y\leqq 1$

・$-1\leqq x-y$ より，$y\leqq x+1$

・$x-y\leqq 1$ より，$y\geqq x-1$

（境界線を含む）



10　x，y が４つの不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$3x+y\leqq 9$，$x+2y\leqq 8$ を満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

$\begin{cases} 3x+y=9 & \cdots ① \\ x+2y=8 & \cdots ② \end{cases}$

①×2 − ② より，

$5x=10$ よって，$x=2$

①に代入して，$y=3$

$3x+y\leqq 9$ より，$y\leqq -3x+9$

$x+2y\leqq 8$ より，$y\leqq -\dfrac{1}{2}x+4$

このとき

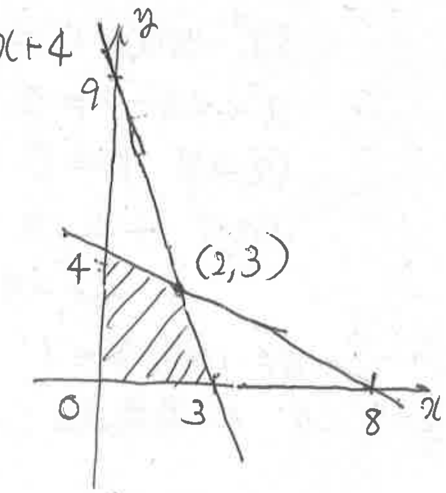
$x+y=k$ とおくと，

$y=-x+k$ であるから，

右図より，$x+y$ は

最大値 5 $(x=2, y=3)$

最小値 0 $(x=0, y=0)$



（境界線を含む）