1 次の式を計算せよ。（Ｐ１６３　章末問題１）

（１）$64^{\frac{2}{3}}\times16^{-\frac{1}{4}}$

$=(2^6)^{\frac{2}{3}}\times(2^4)^{-\frac{1}{4}}$

$=2^4\times2^{-1}=2^3=8$

（２）$\sqrt[3]{9}\times\sqrt[6]{9}\div\sqrt[4]{27}$

$=(3^2)^{\frac{1}{3}}\times(3^2)^{\frac{1}{6}}\div(3^3)^{\frac{1}{4}}$

$=3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}\div3^{\frac{3}{4}}$

$=3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}$

2 次の方程式，不等式を解け。（Ｐ１６３　章末問題２，３）

（１）$3^{x+1}=\sqrt[3]{9}$

$3^{x+1}=3^{\frac{2}{3}}$ より

$x+1=\frac{2}{3}$

$x=-\frac{1}{3}$

（２）$8^x\leqq4^{x+1}$

$2^{3x}\leqq2^{2x+2}$ より

$3x\leqq2x+2$

$x\leqq2$

（３）$\frac{1}{2}\leqq2^x\leqq8$

$2^{-1}\leqq2^x\leqq2^3$ より

$-1\leqq x\leqq3$

（４）$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\geqq(\sqrt{2})^x$

$2^{-(x-1)}\geqq2^{\frac{x}{2}}$ より

$-x+1\geqq\frac{x}{2}$

$x\leqq\frac{2}{3}$

3 次の式を計算せよ。（Ｐ１６３　章末問題４）

（１）$\frac{1}{2}\log_5 3+3\log_5\sqrt{2}-\log_5\sqrt{24}$

$=\frac{1}{2}(\log_5 3+\log_5 8-\log_5 24)$

$=\frac{1}{2}\log_5 1=0$

（２）$\log_2 12-\log_4 9$

$=\log_2 12-\frac{\log_2 9}{2}=\log_2 12-\log_2 3$

$=\log_2 4=2$

（３）$(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$

$=\left(\log_2 3+\frac{2\log_2 3}{2}\right)\left(2\log_3 2+\frac{\log_3 2}{2}\right)$

$=(2\log_2 3)\times\left(\frac{5}{2}\log_3 2\right)$

$=5$

4 次の方程式，不等式を解け。（Ｐ１６４　章末問題１０）

（１）$\left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x-12=0$　　$\left(\frac{1}{3}\right)^x=X\ (X>0)$ とおくと，

$X^2+X-12=(X+4)(X-3)=0$ より

$X=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3$　　よって，$x=-1$

（２）$\left(\frac{1}{9}\right)^x-4\left(\frac{1}{3}\right)^x+3>0$　　$\left(\frac{1}{3}\right)^x=X\ (X>0)$ とおくと，

$X^2-4X+3=(X-1)(X-3)>0$ より

$X<1,\ X>3$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x<1,\ \left(\frac{1}{3}\right)^x>3$ より　$x>0,\ x<-1$

5 次の方程式，不等式を解け。

（１）$\log_2 x=-3$

$\log_2 x=\log_2\frac{1}{8}$ より

$x=\frac{1}{8}$

（２）$\log_2 x\leqq8$

$\log_2 x\leqq\log_2 2^8$ より

$0<x\leqq256$

（３）$\log_{\frac{1}{3}}x>-2$

$\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}9$

底 $\frac{1}{3}$ は１より小さいので

$0<x<9$

（４）$\log_4 x\leqq\frac{1}{2}$

$\log_4 x\leqq\log_4 2$ より

$0<x\leqq2$

（５）$\log_3 x+\log_3(x-8)=2$

真数条件より $x>0,\ x-8>0$　よって，$x>8$

$\log_3 x(x-8)=\log_3 9$ より

$x(x-8)=9$

$x^2-8x-9=(x+1)(x-9)=0$

条件より，$x=9$

（６）$\log_{\frac{1}{2}}(x+5)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geqq-3$

真数条件より $x+5>0,\ x-2>0$　よって，$x>2$

$\log_{\frac{1}{2}}(x+5)(x-2)\geqq\log_{\frac{1}{2}}8$

底 $\frac{1}{2}$ は１より小さいので，

$(x+5)(x-2)\leqq8$

$x^2+3x-18=(x+6)(x-3)\leqq0$

条件より，$2<x\leqq3$

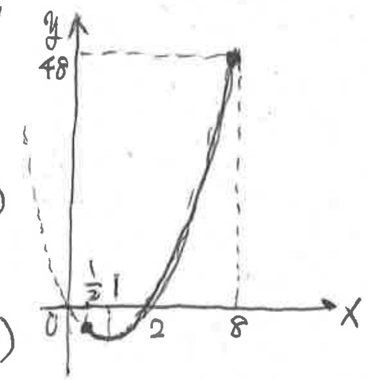
6 次の関数の最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ。（Ｐ１６４　章末問題１１　改）

（１）$y=4^x-2^{x+1}\ (-1\leqq x\leqq3)$

$2^x=X$ とおくと，$-1\leqq x\leqq3$ より $\frac{1}{2}\leqq X\leqq8$

$y=X^2-2X=(X-1)^2-1$

グラフより，



最大値 48

（$X=2^x=8$ より，$x=3$ のとき）

最小値 -1

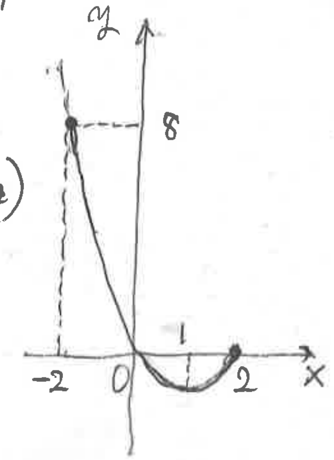
（$X=2^x=1$ より，$x=0$ のとき）

（２）$y=(\log_3 x)^2-\log_3 x^2\ \left(\frac{1}{9}\leqq x\leqq9\right)$

$\log_3 x=X$ とおくと，$\frac{1}{9}\leqq x\leqq9$ より，$-2\leqq X\leqq2$

$y=X^2-2X=(X-1)^2-1$

グラフより，



最大値 8

（$X=\log_3 x=-2$ より，$x=\frac{1}{9}$ のとき）

最小値 -1

（$X=\log_3 x=1$ より $x=3$ のとき）

7　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，次の問いに答えよ。

（１）$\log_{10}4$，$\log_{10}5$，$\log_{10}6$，$\log_{10}8$，$\log_{10}9$ の値を求めよ。

$\log_{10}4=\log_{10}2^2=2\log_{10}2=0.6020$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10}2=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}(2\times3)=\log_{10}2+\log_{10}3=0.7781$

$\log_{10}8=\log_{10}2^3=3\log_{10}2=0.9030$

$\log_{10}9=\log_{10}3^2=2\log_{10}3=0.9542$

（２）４８＜４９＜５０ であることを用いて，$\log_{10}7$ の値を小数第２位まで求めよ。

$\log_{10}48=\log_{10}(2^4\times3)=4\log_{10}2+\log_{10}3=1.6811$

$\log_{10}49=\log_{10}7^2=2\log_{10}7$

$\log_{10}50=\log_{10}\dfrac{100}{2}=2-\log_{10}2=1.6990$　であるから，

$1.6811<2\log_{10}7<1.6990$　より，

$0.84055<\log_{10}7<0.8495$　よって，$\log_{10}7\fallingdotseq0.84$

（３）$2^x=3$ を満たすx の値を求めよ。

両辺の底が２の対数をとると，

$x=\log_2 3=\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}2}=\dfrac{0.4771}{0.3010}$

$=1.585$

8　3^{20} は何桁の数か。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

（Ｐ１６０　例題７）

$\log_{10}3^{20}=20\log_{10}3=20\times0.4771$

$=9.542$

$9<\log_{10}3^{20}<10$　より.

$10^9<3^{20}<10^{10}$

よって，10桁

9　次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

（Ｐ１６２ 補充問題９ 改）

（１）$\log_{10}5$ の値を求めよ。

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10}2$

$=1-0.3010$

$=0.6990$

（２）$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第何位にはじめて０でない数字が現れるか。

$\log_{10}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{20}=-20\log_{10}5=-20\times0.6990$

$=-13.98$

$-14<\log_{10}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{20}<-13$　より.

$10^{-14}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{20}<10^{-13}$

よって，小数第14位

10　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\dfrac{1}{10^4}$ を満たす最小の自然数n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。　（Ｐ１６４　章末問題１４）

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\dfrac{1}{10^4}$ の両辺の常用対数をとると.

$-n\log_{10}2<-4$

$n>\dfrac{4}{\log_{10}2}=\dfrac{4}{0.3010}\fallingdotseq13.28$

よって，$n\geqq14$ より，最小の自然数は 14

11　関数 $y=(4^x+4^{-x})-5(2^x+2^{-x})+7$ について，

（１）$2^x+2^{-x}=t$ とおき，y をtを用いて表せ。また，tの とりうる値の範囲を求めよ。

$4^x+4^{-x}=t^2-2$　であるから，

$y=(t^2-2)-5t+7=t^2-5t+5$

また，相加平均≧相乗平均 より，

$t=2^x+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$　であるから，$t\geqq2$

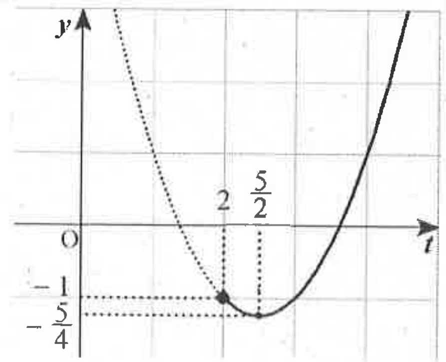
（等号は $2^x=2^{-x}$ より，$x=0$ のとき）

（２）yの最小値とそのときのxの値を求めよ。

$y=t^2-5t+5$

$=\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}+5$

$=\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$　（$t\geqq2$）



よって右のグラフより，

yの最小値は　$-\dfrac{5}{4}$

このとき，$t=2^x+2^{-x}=\dfrac{5}{2}$　より，$2^x=X$（$X>0$）とおくと，

$X+\dfrac{1}{X}=\dfrac{5}{2}$　　両辺にXをかけると，$X^2+1=\dfrac{5}{2}X$

よって，$2X^2-5X+2=(2X-1)(X-2)=0$　より，

$X=2^x=\dfrac{1}{2}$，２　　つまり，$x=\pm1$