1　関数 $f(x)=x^2$ の導関数を定義に従って求めよ。　（P171　例5）

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)$$

$$=2x$$

2　次の関数を微分せよ。

（1）$y=4x^2+3x-4$

$y'=8x+3$

（2）$y=-3x^2+x+2$

$y'=-6x+1$

（3）$y=x^3+2x^2-3x$

$y'=3x^2+4x-3$

（4）$y=\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x$

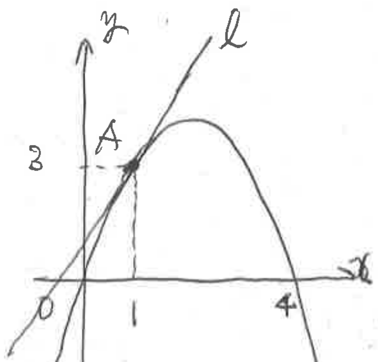
$y'=4x^2+3x-\frac{1}{2}$

3　関数 $y=-x^2+4x$ のグラフ上の点A(1，3)における接線 l の方程式を求めよ。　（P176　例題3）

$y'=-2x+4$ より、$x=1$ のとき、$y'=2$

よって、l：$y=2(x-1)+3$

$=2x+1$



4　次の条件をすべて満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

$f(2)=-2$，　$f'(0)=3$，　$f'(1)=-1$　（P178　補充問題2）

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと、

$f'(x)=2ax+b$ であり、

$f(2)=4a+2b+c=-2$，$f'(0)=b=3$，

$f'(1)=2a+b=-1$ より、

$a=-2$，$b=3$，$c=0$　よって、$f(x)=-2x^2+3x$

5　関数 $y=x^2+2$ のグラフに，点C(1，2)から引いた接線の方程式を求めよ。　（P178　補充問題3　改）

$y'=2x$ より、曲線上の点 $(t,\ t^2+2)$ における接線は、

$y=2t(x-t)+t^2+2=2tx-t^2+2$

この直線が点(1，2)を通るので、$2=2t-t^2+2$

$t^2-2t=t(t-2)=0$ より、$t=0,\ 2$

$t=0$ のとき 接点は $(0,2)$，接線は、$y=2$

$t=2$ のとき 接点は $(2,6)$，接線は、$y=4x-2$

6　関数 $f(x)=x^3+ax+b$ が $x=2$ で極小値 -6 をとるように，定数 a，b の値を定め，そのときの極大値を求めよ。　（P183　応用例題2）

$f'(x)=3x^2+a$ であり、

$f(2)=8+2a+b=-6$ より、$2a+b=-14$ …①

$f'(2)=12+a=0$ より、$a=-12$ …②

①に代入して、$b=10$ より、$f(x)=x^3-12x+10$

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

よって、$a=-12$，$b=10$

x	…	-2	…	2	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	26	↘	-6	↗

極大値 26

$(x=-2$ のとき$)$

7　次の関数の最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ。

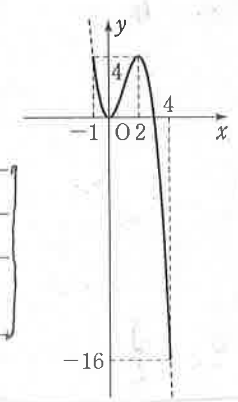
$y=-x^3+3x^2$　$(-1\leqq x\leqq 4)$　（P185　例題5）

$y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 2$

y の増減表は，次のようになる。

x	-1	……	0	……	2	……	4
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	4	↘	極小 0	↗	極大 4	↘	-16



よって，この関数は

最大値 4　$(x=-1,\ 2$ のとき$)$

最小値 -16　$(x=4$ のとき$)$

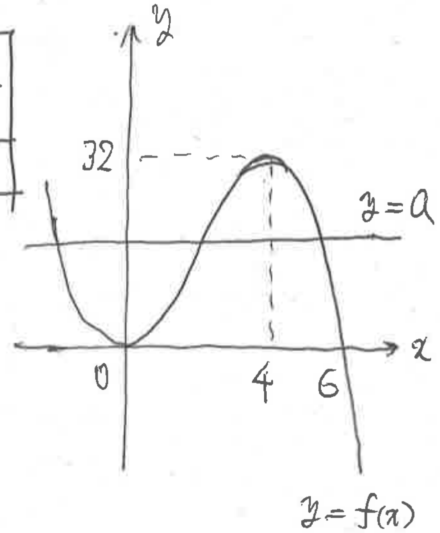
8　方程式 $x^3-6x^2+a=0$ が異なる3個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ　（P208　章末問題5　改）

$a=-x^3+6x^2$ より、

$f(x)=-x^3+6x^2$ とおくと、

$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

x	…	0	…	4	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	32	↘



増減表とグラフより、

$0<a<32$

9 次の不定積分を求めよ。

（１） $\int 4x^2dx = \frac{4}{3}x^3 + C$ （Cは定数）

（２） $\int (3x^2-5x+2)\,dx = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + C$ （Cは定数）

10 次の定積分を求めよ。

（１） $\int_0^2 (x^2+4x-5)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x\right]_0^2$

$= \frac{8}{3} + 8 - 10$

$= \frac{2}{3}$

（２） $\int_{-1}^2 (x+4)(x-2)\,dx = \int_{-1}^2 (x^2+2x-8)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 8x\right]_{-1}^2$

$= \frac{1}{3}\{8-(-1)^3\} + \{4-(-1)^2\} - 8\{2-(-1)\}$

$= 3 + 3 - 24 = -18$

（３） $\int_{-1}^1 (-3t^2+t+1)\,dt = \left[-t^3 + \frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^1$

$= -\{1-(-1)^3\} + \frac{1}{2}\{1-(-1)^2\} + \{1-(-1)\}$

$= -2 + 2 = 0$

（４） $\int_{-2}^3 (3x^2-4x)\,dx - \int_1^3 (3x^2-4x)\,dx$

$= \int_{-2}^1 (3x^2-4x)dx = \left[x^3 - 2x^2\right]_{-2}^1$

$= \{1-(-2)^3\} - 2\{1-(-2)^2\}$

$= 9 + 6 = 15$

11 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_x^a f(t)\,dt = x^2 - 3x + 2$$

（Ｐ１９８ 応用例題６ 改）

$f(x)$の原始関数の1つを$F(x)$とすると、

$F(a) - F(x) = x^2 - 3x + 2$ であるから

両辺をxで微分して、 $-f(x) = 2x - 3$

よって、$f(x) = -2x + 3$

また、もとの式に$x = a$を代入すると、

$a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2) = 0$ より

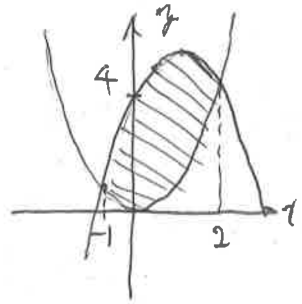
$a = 1,\ 2$

12 ２つの放物線 $y = x^2$， $y = -x^2+2x+4$ で囲まれた部分の面積を求めよ。 （Ｐ２０７ 補充問題９（１））

$x^2 = -x^2 + 2x + 4$ とおくと、

$2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2) = 2(x+1)(x-2) = 0$

よって、$x = -1,\ 2$ より、



$S = \int_{-1}^2 \{(-x^2+2x+4) - x^2\}dx$

$= \frac{2}{6}\{2-(-1)\}^3 = 9$

13 関数 $y = |x^2-1|$ のグラフと x軸 および 直線 $x = 2$ で囲まれた２つの部分の面積の和を求めよ。

（Ｐ２０７ 補充問題１０ 改）

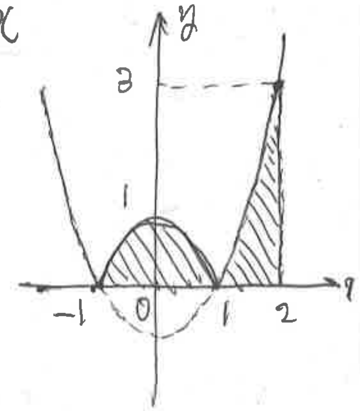
$S = 2\int_0^1 (-x^2+1)dx + \int_1^2 (x^2-1)dx$

$= 2\left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2$

$= 2\left(-\frac{1}{3}+1\right) + \frac{1}{3}(8-1) - (2-1)$

$= \frac{4}{3} + \frac{7}{3} - 1$

$= \frac{8}{3}$



14 等式 $f(x) = x^2 + 2\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

（Ｐ２０９ 章末問題１３）

$\int_0^1 f(t)dt = C$ とおく。 $f(x) = x^2 + 2C$ より、

$C = \int_0^1 (t^2+2C)dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2Ct\right]_0^1 = 2C + \frac{1}{3}$

よって、$C = -\frac{1}{3}$ より、 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}$

15 曲線Ｃ：$y = x^3 - 4x^2$ 上の点Ａ（３，－９）における接線を l とする。 （Ｐ２０８ 章末問題２ 改）

（１） l の方程式を求めよ。

$y' = 3x^2 - 8x$ より、 $x = 3$ のとき $y' = 3$

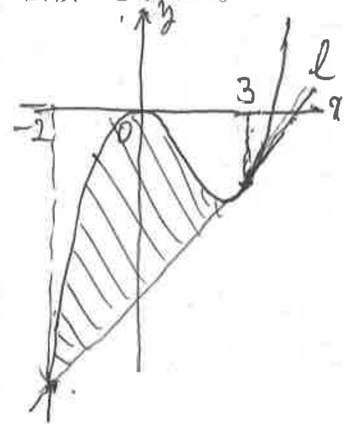
よって、$l: y = 3(x-3) - 9 = 3x - 18$

（２） 曲線Ｃと接線l で囲まれた部分の面積Ｓを求めよ。

$x^3 - 4x^2 = 3x - 18$ とおくと、

$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$

$(x-3)^2(x+2) = 0$ より、



$S = \int_{-2}^3 (x^3 - 4x^2 - 3x + 18)dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 18x\right]_{-2}^3$

$= \frac{1}{4}\{81-(-2)^4\} - \frac{4}{3}\{27-(-2)^3\} - \frac{3}{2}\{9-(-2)^2\} + 18\{3-(-2)\}$

$= \frac{65}{4} - \frac{140}{3} - \frac{15}{2} + 90$

$= \frac{625}{12}$