1　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ とする。$\vec{c}=(5,\ 4)$ を，実数 s，t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表せ。（Ｐ１７　例題１）

$(5,4)=s(1,2)+t(1,-1)$

$=(s+t,\ 2s-t)$ より

$s+t=5$ …①，$2s-t=4$ …②

①+② より，$s=3$，①に代入して $t=2$

よって，$\underline{\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}}$

2　次の２つのベクトルのなす角 θ を求めよ。

$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$　（Ｐ２２　例題４）

$|\vec{a}|=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{10}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ より

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$\underline{\theta=45^\circ}$

3　$\vec{a}=(3,\ 6)$，$\vec{b}=(x,\ 4)$ が次の条件を満たすように，x の値を定めよ。

（１）$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行　（Ｐ１８　練習１４　改）

$3:6=x:4$ より，$6x=12$

よって，$\underline{x=2}$

（２）$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直　（Ｐ２３　練習２１）

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3x+24=0$ より

$\underline{x=-8}$

4　$\vec{a}=(\sqrt{3},\ -1)$ に垂直で大きさが４のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。（Ｐ２４　例題５）

$|\vec{a}|=2$ より，$\vec{a}$ と同じ向きで大きさが４のベクトルは　$\vec{a}=2(\sqrt{3},-1)$

よって，求めるベクトルは　$\vec{b}=\pm(2,\ 2\sqrt{3})$

5　$\vec{a}=(2,\ -1)$ と $\vec{b}=(2,\ 4)$ のなす角の二等分線方向のベクトルで，大きさが１のベクトル $\vec{c}$ を求めよ。

$|\vec{a}|=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=2\sqrt{5}$ より，

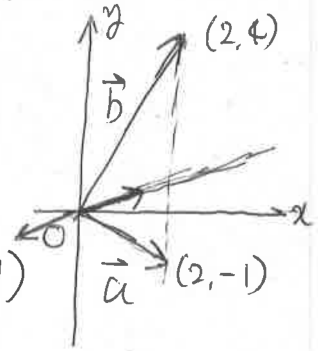
$\vec{a}$，$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{a'}$，$\vec{b'}$ は，

$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1),\quad \vec{b'}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

よって，$\vec{a'}+\vec{b'}=\frac{1}{\sqrt{5}}(3,1)$ であり，

$|\vec{a'}+\vec{b'}|=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$ より

$$\vec{c}=\pm\frac{\vec{a'}+\vec{b'}}{|\vec{a'}+\vec{b'}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$$



6　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，$|2\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。（Ｐ２６　応用例題２）

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4-8+16$

$=12$ より

$|2\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{3}$

7　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ のとき，次を求めよ。

（１）$\vec{a}\cdot\vec{b}$　（Ｐ２８　補充問題３）

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3=7$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}$

（２）$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$ より

$\theta=150^\circ$

8　$\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ と実数 t に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。（Ｐ４５　章末問題２　改）

（１）$|\vec{c}|=5$ となる t の値を求めよ。

$|\vec{a}|=\sqrt{10}$，$|\vec{b}|=\sqrt{5}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ より

$|\vec{c}|^2=|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$=5t^2+10t+10=25$

$5t^2+10t-15=5(t+3)(t-1)=0$ より

$t=-3,\ 1$

（２）$|\vec{c}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

$|\vec{c}|^2=5t^2+10t+10$

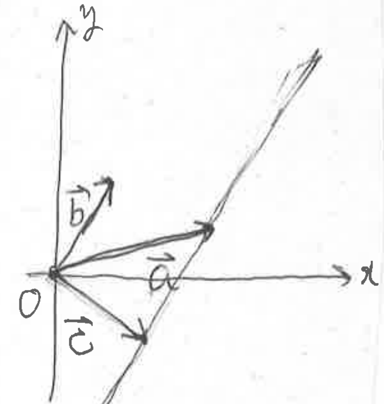
$=5(t^2+2t+2)$

$=5\{(t+1)^2+1\}$

$=5(t+1)^2+5$ より

$t=-1$ のとき

$|\vec{c}|$ は最小値 $\sqrt{5}$

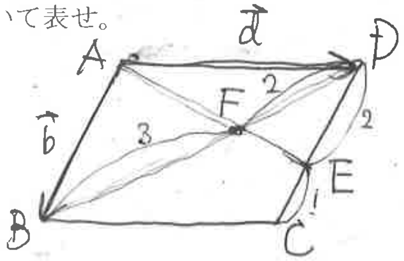


9　平行四辺形ＡＢＣＤにおいて，辺ＣＤを１：２に内分する点をＥ，対角線ＢＤを３：２に内分する点をＦとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき，　（Ｐ３５　応用例第３　改）

（１）$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ を$\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{d}$$



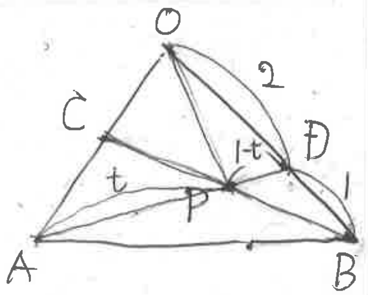
（２）３点Ａ，Ｆ，Ｅ は同一直線上にあることを示せ。また，ＡＦ：ＦＥ の比を求めよ。

(1) より、$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AE}$

よって、3点A, F, Eは 同一直線上にあり、

$$AF:FE=3:2$$

10　△ＯＡＢにおいて，辺ＯＡの中点をＣ，辺ＯＢを２：１に内分する点をＤ，線分ＡＤと線分ＢＣの交点をＰとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。（Ｐ３６　応用例題４）



$AP:PD=t:1-t$ とおくと、

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OD}$$
$$=(1-t)\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{b}$$
$$=2(1-t)\cdot\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{b}$$
$$=2(1-t)\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}t\overrightarrow{OB}$$ であり、

点Pは直線 BC上にあるので

$$2(1-t)+\frac{2}{3}t=1$$
$$6(1-t)+2t=3$$ より $t=\frac{3}{4}$

よって、$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

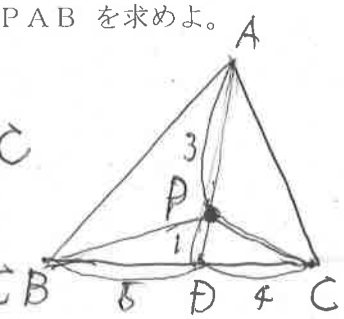
11　△ＡＢＣと点Ｐに対して，等式 $3\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BP}+5\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立つ。（Ｐ４６　章末問題７）

（１）点Ｐは△ＡＢＣに対してどのような位置にあるか。

$$3\overrightarrow{AP}+4(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+5(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$$
$$12\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AP}=\frac{4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}}{12}=\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{12}_{4}}\cdot\frac{4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}}{9}$$ より、

辺BCを5：4に内分する点をDとするとき、線分ADを 3：1に内分する点である。

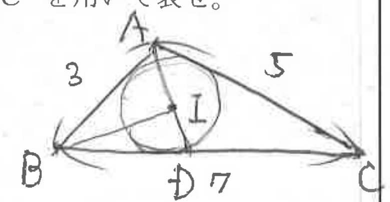
（２）面積比 △ＰＢＣ：△ＰＣＡ：△ＰＡＢ を求めよ。



$$\triangle PBC=\frac{1}{4}\triangle ABC$$
$$\triangle PCA=\frac{3}{4}\triangle ACD=\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}\triangle ABC$$
$$=\frac{1}{3}\triangle ABC$$
$$\triangle PAB=\frac{3}{4}\triangle ABD=\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}\triangle ABC$$
$$=\frac{5}{12}\triangle ABC$$ より、

$$\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{5}{12}=3:4:5$$

12　ＡＢ＝３，ＢＣ＝７，ＣＡ＝５ である△ＡＢＣの内心をＩとする。このとき，$\overrightarrow{AI}$ を$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。



直線AIと辺BCの交点をD とすると、BD：DC＝3：5 より、

$$BD=7\times\frac{3}{8}=\frac{21}{8}$$

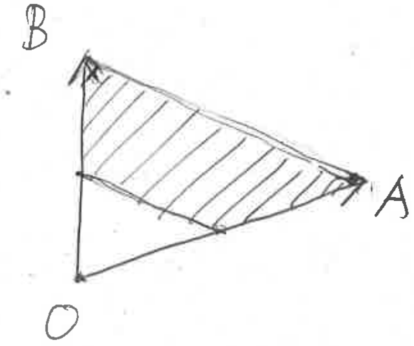
また、$AI:ID=AB:BD=3:\frac{21}{8}=8:7$

よって、$\overrightarrow{AI}=\frac{8}{15}\overrightarrow{AD}=\frac{8}{15}\cdot\frac{5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{\cancel{8}}$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

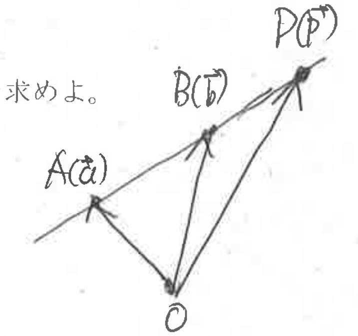
13　△ＯＡＢにおいて，次の式を満たす点$P(\vec{p})$の存在範囲を図示せよ。（Ｐ４０　応用例第６　改）

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　（$\frac{1}{2}\leqq s+t\leqq1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$）



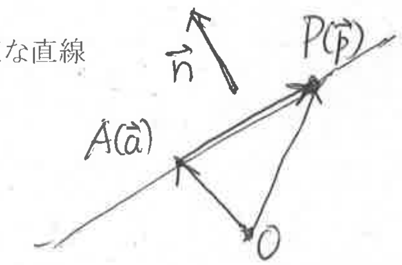
14　次の図形を表すベクトル方程式を求めよ。

（１）２点$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を通る直線



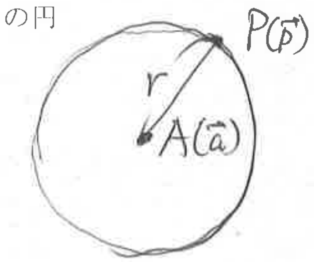
$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

（２）点$A(\vec{a})$ を通り，$\vec{n}$ に垂直な直線



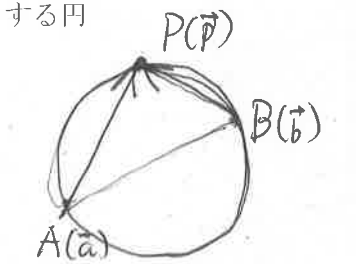
$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$

（３）点$A(\vec{a})$ を中心とする半径r の円



$$|\vec{p}-\vec{a}|=r$$

（４）２点$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を直径の両端とする円



$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$