数学Ａ　第２章　図形の性質

第１節　平面図形

１限目	Ｐ６２～Ｐ６４	三角形の辺の比
２限目	Ｐ６５～Ｐ６９	三角形の外心・内心・重心
３限目	Ｐ７０～Ｐ７１	チェバの定理
４限目	Ｐ７２～Ｐ７４	メネラウスの定理
５限目	Ｐ７５～Ｐ７８	円に内接する四角形
６限目	Ｐ７９～Ｐ８１	円の接線，接弦定理
７限目	Ｐ８２～Ｐ８３	方べきの定理
８限目	Ｐ８４～Ｐ８６	２つの円
９限目	Ｐ８７～Ｐ９０	作図
10限目	Ｐ９１	補充問題

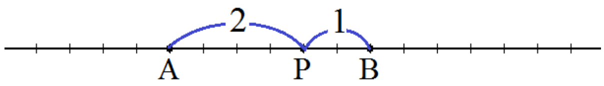
第２節　空間図形

１限目	Ｐ９２～Ｐ９６	直線と平面
２限目	Ｐ９７～Ｐ１０１	空間図形と多面体
３限目	Ｐ１０２	補充問題
４限目	Ｐ１０３	章末問題Ａ
５限目	Ｐ１０４	章末問題Ｂ

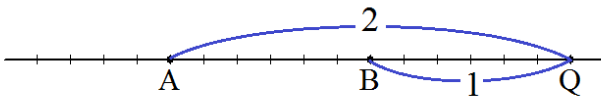
第２章　図形の性質　練習問題 解答（第１節）

練習１

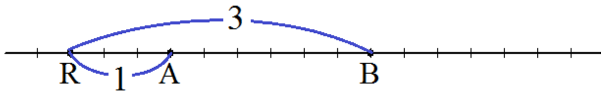
（１）線分ＡＢを２：１に内分



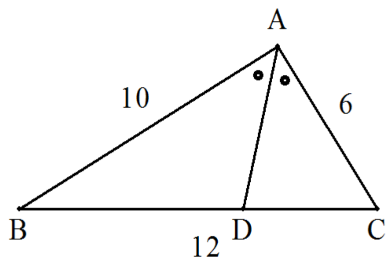
（２）線分ＡＢを２：１に外分



（３）線分ＡＢを１：３に外分



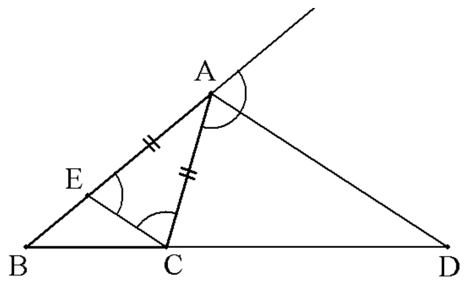
練習２



（１）ＢＤ：ＤＣ＝５：３

（２）ＢＤ$=12\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{15}{2}$

練習３



△ＡＢＣにおいて，∠Ａの外角の二等分線と辺ＢＣの延長との交点をＤ，頂点Ｃを通り直線ＡＤに平行な直線と辺ＡＢとの交点をＥとすると，

∠ＣＡＤ＝∠ＡＣＥ＝∠ＡＥＣ

よって，△ＡＣＥは二等辺三角形より，ＡＥ＝ＡＣ

ここで，ＡＢ：ＡＥ＝ＢＤ：ＤＣ　であるから，

ＡＢ：ＡＣ＝ＢＤ：ＤＣ　である。

練習４

ＡＢ：ＡＣ＝ＢＤ：ＤＣ　であり，ＡＢ＝２０，ＡＣ＝１５，ＢＣ＝１０　より，ＢＤ＝x とおくと，２０：１５＝x：x－１０　より，$3x=4(x-10)$　よって，x＝ＢＤ＝４０

練習５

（１）α＋２０°＋３０°＝９０°より，

α＝４０°

（２）α＋２×４０°＝１８０°より，

α＝１００°

（３）∠ＢＡＣ＝１８０°－(２５°＋４５°)＝１１０°　より，

円周角∠ＢＡＣに対する中心角は２２０°であるから，

よって，△ＢＯＣにおいて，∠ＢＯＣ＝３６０°－２２０°＝１４０°　より，

α＝(１８０°－１４０°)÷２＝２０°

練習６

（１）α＋２０°＋３０°＝１８０°より，

α＝１３０°

（２）２α＋２×３０°＋７０°＝１８０° より，

　　α＝２５°

（３）α＋(１８０°－４０°)÷２＝１８０°　より，

　　α＝１１０°

練習７

（１）ＢＤ＝５　　　　　　（２）ＡＧ＝$6\times\dfrac{2}{3}=4$

練習８

（１）ＧＫ：ＡＨ＝１：３　　　　　（２）△ＧＢＣ：△ＡＢＣ＝１：３

練習９

チェバの定理より，$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　また，ＡＲ：ＲＢ＝１：２，ＢＰ：ＰＣ＝４：３

より，$\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{1}{2}=1$　　よって，$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{3}{2}$　より，ＣＱ：ＱＡ＝３：２

練習１０

チェバの定理より，$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　また，ＡＱ：ＱＣ＝２：３，ＢＰ：ＰＣ＝１：１

より，$\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　　よって，$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{2}{3}$　より，ＡＲ：ＲＢ＝２：３

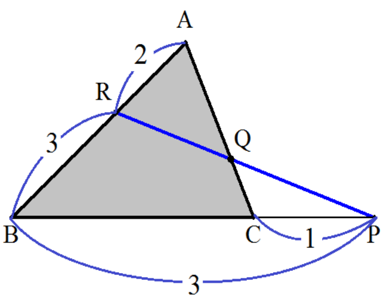
練習１１

（１）△ＡＢＣと直線ＰＲにおいて，メネラウスの定理より，

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

また，ＡＲ：ＲＢ＝２：３，ＢＰ：ＣＰ＝３：１　より，

$\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{2}{3}=1$　よって，$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{1}{2}$　より，ＣＱ：ＱＡ＝１：２

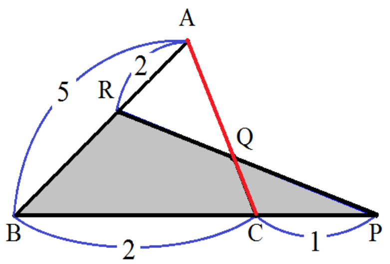


（２）△ＢＰＲと直線ＡＣにおいて，メネラウスの定理より，

$$\frac{PQ}{QR}\cdot\frac{RA}{AB}\cdot\frac{BC}{CP}=1$$

また，ＡＲ：ＡＢ＝２：５，ＢＣ：ＣＰ＝２：１　より，

$\dfrac{PQ}{QR}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{1}=1$　よって，$\dfrac{PQ}{QR}=\dfrac{5}{4}$　より，ＰＱ：ＱＲ＝５：４



研究　練習１

（１）８＜４＋６　　より，存在する。

（２）６＜４＋４　　より，存在する。

（３）１０＝４＋６　より，存在しない。

練習１２　省略

練習１３

（１）∠ＡＤＢ＝∠ＡＣＢ＝３５°より，α＋(４０°＋３５°)＝１８０°

よって，α＝１０５°

（２）∠ＢＡＣ＝９０°，∠ＡＤＣ＝∠ＡＢＣ＝３０°より，α＋(９０°＋３０°)＝１８０°

よって，α＝６０°

（３）∠ＢＯＣ＝１８０°－２×４７°＝８６°

よって，α＝８６°÷２＝４３°

練習１４

（１）△ＣＤＥにおいて，∠ＢＤＣ＝１８０°－(３７°＋７８°)＝６５°

よって，∠ＢＡＣ＝∠ＢＤＣ＝６５°より，

４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ は同一円周上にある。

（２）△ＢＤＥにおいて，∠ＢＤＥ＝１８０°－(８４°＋２６°)＝７０°

よって，∠ＢＡＣ＝∠ＢＤＣ＝１１０°より，

４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ は同一円周上にある。

練習１５

（１）△ＡＢＤにおいて，∠ＢＡＤ＝１８０°－(４８°＋５７°)＝７５°

よって，α＝１８０°－７５°＝１０５°

（２）四角形ＡＢＣＤにおいて，∠ＢＣＤ＝１８０°－５５°＝１２５°

よって，∠ＢＣＥ＝１８０°－１２５°＝５５°より，

△ＢＣＥにおいて，α＝１８０°－(３０°＋５５°)＝９５°

練習１６

（１）円に内接しない。　　（２）円に内接する。　　（３）円に内接する。

練習１７

（１）ＡＱ＝ＡＲ＝x，ＢＰ＝ＢＲ＝y，ＣＰ＝ＣＱ＝z とおくと，

$x+y=5$ …… ①，$y+z=4$ …… ②，$z+x=3$ …… ③

①＋②＋③ より，$2(x+y+z)=12$　よって，$x+y+z=6$ …… ④

④－① より，$z=1$，④－② より，$x=2$，④－③ より，$y=3$

よって，ＢＰ＝３

（２）（１）より，内接円の半径$r=1$

練習１８

（１）α＝６０°

（２）△ＡＢＣはＣＡ＝ＣＢの二等辺三角形より，∠ＣＡＢ＝∠ＣＢＡ＝５１°

よって，α＝∠ＡＣＢ＝１８０°－２×５１°＝７８°

（３）△ＡＣＤにおいて，∠ＣＡＤ＝２４°より，∠ＡＣＤ＝１８０°－(４７°＋２４°)＝１０９°

△ＡＢＣにおいて，∠ＡＣＢ＝１８０°－１０９°＝７１°より，

α＝１８０°－(２４°＋７１°)＝８５°

練習１９

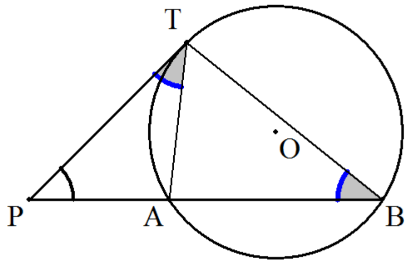
（1）ＰＡ･ＰＢ＝5×3＝１５

（2）ＰＡ･ＰＢ＝5×15＝７５

練習２０

ＰＡ･ＰＢ＝ＰＣ･ＰＤ＝$(r+PO)(r-PO)=r^2-PO^2$

練習２１



△ＰＴＡ∽△ＰＢＴ　であるから，

ＰＡ：ＰＴ＝ＰＴ：ＰＢ　より，

ＰＡ･ＰＢ＝ＰＴ^2

練習２２

（1）d＝8　　のとき，d＝５＋３　より，［２］外接する。

（2）d＝１０　のとき，d＞５＋３　より，［１］互いに外部にある。

（3）d＝2　　のとき，d＝５－３　より，［４］内接する。

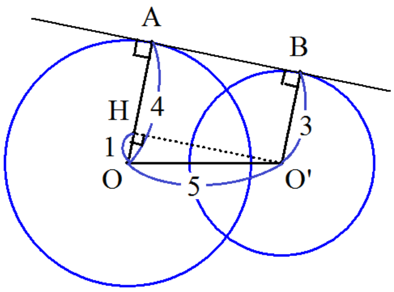
（4）d＝4　　のとき，５－３＜d＜５＋３　より，［３］２点で交わる。

（5）d＝1　　のとき，d＜５－３　より，［５］一方が他方の内部にある。

練習２３

下図より，

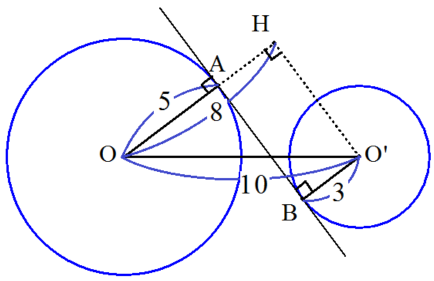
ＡＢ＝O’Ｈ＝$\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$



練習２４

下図より，

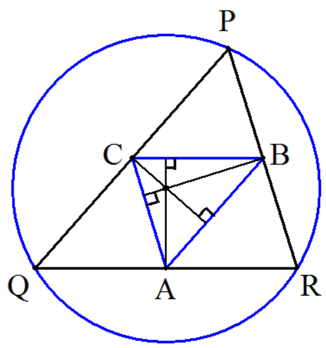
ＡＢ＝ＯＨ＝$\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6$



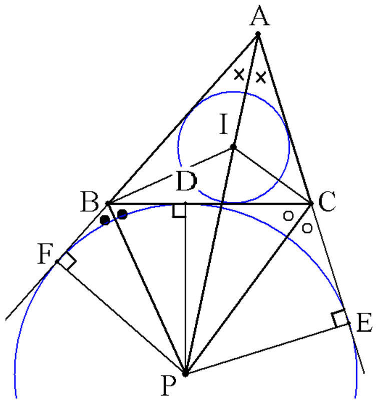
第２章　図形の性質　補充問題 解答（第１節）

１． △ＡＢＣにおいて，

頂点Ａから辺ＢＣに下ろした垂線は，外接円の弦ＱＲの垂直二等分線，頂点Ｂから辺ＣＡに下ろした垂線は，外接円の弦ＲＰの垂直二等分線，頂点Ｃから辺ＡＢに下した垂線は，外接円の弦ＰＱの垂直二等分線であるから，外接円の中心，つまり△ＰＱＲの外心で交わる。



２． △ＡＢＣにおいて，右の図のように∠Ｂ，∠Ｃの外角の二等分線の交点をＰとし，点Ｐから辺ＡＢの延長，辺ＢＣ，辺ＡＣの延長に，それぞれ垂線ＰＦ，ＰＤ，ＰＥを下ろす。このとき，ＰＦ＝ＰＤ，ＰＥ＝ＰＤであるから，ＰＦ＝ＰＥ　よって，　△ＡＰＦ≡△ＡＰＥであり，∠ＰＡＦ＝∠ＰＡＥより，点Ｐは∠Ａの二等分線上にある。



３．（方べきの定理の逆）

ＰＡ･ＰＢ＝ＰＣ･ＰＤ が成り立つとき，

$\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PD}{PB}$，∠ＡＰＣ＝∠ＤＰＢ　より，

△ＡＣＰ∽△ＤＢＰ

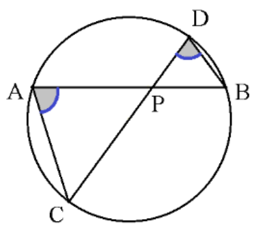
よって，∠ＣＡＰ＝∠ＢＤＰ　であるから，

（１）では，円周角の定理の逆により，

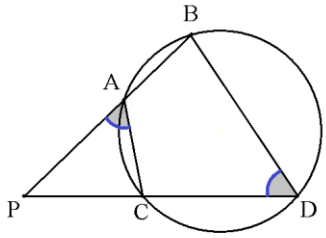
（２）では，∠ＢＡＣ＋∠ＢＤＣ＝１８０°より，

４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄは同一円周上にある。

（１）



（２）



第２章　図形の性質　練習問題 解答（第２節）

練習３０

（１）辺ＡＢと平行な辺：ＣＤ，ＥＦ，ＧＨ

（２）辺ＡＢとねじれの位置にある辺：ＥＨ，ＦＧ，ＣＧ，ＤＨ

（３）①　２直線ＡＢ，ＤＨのなす角：９０°

②　２直線ＡＢ，ＥＧのなす角：４５°

③　２直線ＡＣ，ＦＨのなす角：９０°

練習３１

（１）ＢＣ⊥ＯＥ，ＢＣ⊥ＡＯ であるから，ＢＣは平面ＡＥＯに垂直である。

（２）ＢＣは平面ＡＥＯに垂直であるから，ＢＣ⊥ＡＥ である。

練習３２

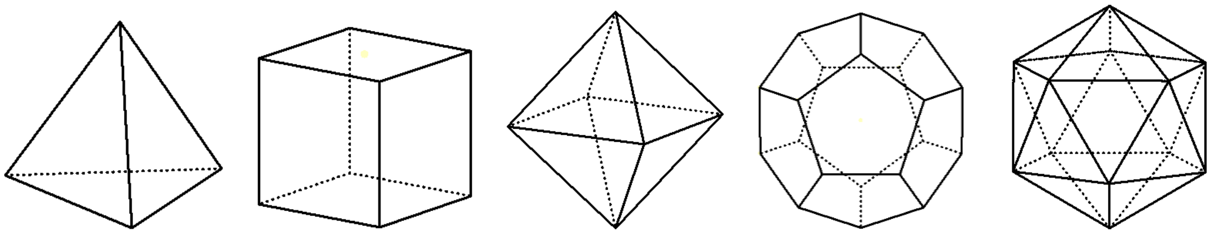
（１）正しくない：βが平行でない２平面α，γに垂直な場合

（２）正しい

（３）正しくない：lが平行でない２平面α，βに平行な場合

練習３３

正多面体	面の数 f	面の形	頂点の数v	辺の数e
正四面体	4	正三角形	4	6
正六面体	6	正方形	8	１２
正八面体	8	正三角形	6	１２
正十二面体	１２	正五角形	２０	３０
正二十面体	２０	正三角形	１２	３０

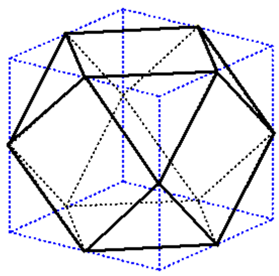


正四面体　　正六面体　　正八面体　　正十二面体　　正二十面体

練習３４　省略

頂点の数をv，辺の数をe，面の数をf　とすると，

$v-e+f=2$（**オイラーの多面体定理**）である。



練習３５　（切頂正六面体）

面の数$f=14$，頂点の数$v=12$，辺の数$e=24$　より，

$v-e+f=2$（**オイラーの多面体定理**）が成り立つ。

練習３６　省略

研究 練習１　$\mathrm{V}=\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^3-4\times\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^3-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^3=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^3=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

第２章　図形の性質　補充問題 解答（第２節）

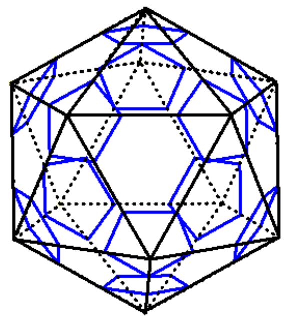
４．

（１）正しくない。（l が，m，n を含む平面内にない場合）

（２）正しい。

（３）正しい。

５．（切頂正二十面体）



正五角形の面の数は，正二十面体の頂点の数と同じなので，１２

正六角形の面の数は，正二十面体の面の数と同じなので，２０

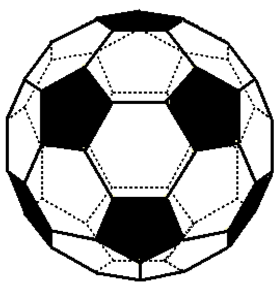
よって，面の数$f=32$

また，１つの辺は２つの面によって共有されているので，

正五角形と正六角形のもつ辺の総数を２で割ったものが，

この多面体の辺の数である。

よって，辺の数$e=\dfrac{12\times5+20\times6}{2}=90$



また，１つの頂点には３つの辺が集まっているが，逆に１つの辺はその両端の頂点により共有されるので，$3v=2e$　である。

よって，頂点の数$v=\dfrac{2}{3}e=60$

$\boxed{\text{参考}}$　この多面体は，サッカーボールのデザインや，自然界でも６０個の炭素原子から成るフラーレンC_{60}という物質に見られる。

第２章　図形の性質　章末問題 解答

１．

（１）ＢＤ：ＤＣ＝４：３　より，ＢＤ＝$5\times\frac{4!}{7}=\frac{20}{7}$

（２）ＡＩ：ＩＤ＝４：$\frac{20}{7}$＝７：５

２．

（１）∠ＡＢＣ＝９０°－３５°＝５５°　よって，α＝１８０°－５５°＝１２５°

（２）△ＰＢＤにおいて，内角の和は１８０°より，

∠ＰＢＤ＝１８０°－(２５°＋α)＝１５５°－α

△ＱＣＤにおいて，内角の和は１８０°より，

∠ＱＣＤ＝１８０°－(５１°＋α)＝１２９°－α

よって，∠ＰＢＤ＋∠ＱＣＤ＝２８４°－２α＝１８０°　よって，α＝５２°

３．

（１）∠ＲＰＱ＝４５°

（２）ＢＰ＝ＢＲ＝６，ＣＰ＝ＣＱ＝４　より，ＡＱ＝ＡＲ＝x とおくと，

ＢＣ＝１０，ＡＢ＝x＋６，ＡＣ＝x＋４　より，

$(x+6)^2+(x+4)^2$＝１００

$2x^2+20x-48$＝０

$x^2+10x-24$＝０　　$(x+12)(x-2)$＝０　より，x＝２

よって，内接円の半径は ２

４．

（１）チェバの定理より，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}$＝１　また，ＡＲ：ＲＢ＝１：３，ＡＱ：ＱＣ＝１：３

より，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{3}$＝１　　よって，$\frac{BP}{PC}$＝１　より，ＢＰ：ＰＣ＝１：１

（２）△ＡＢＰと直線ＣＲについて，メネラウスの定理より，

$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}$＝１　また，ＢＣ：ＣＰ＝２：１，ＡＲ：ＲＢ＝１：３　より，

$\frac{2}{1}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{1}{3}$＝１　よって，$\frac{PO}{OA}=\frac{3}{2}$　より，ＰＯ：ＯＡ＝３：２

よって，△ＯＢＣ：△ＡＢＣ＝３：５

５．

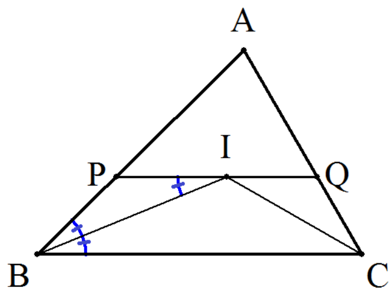
ＰＳ//ＢＤ，ＱＲ//ＢＤ　より，ＰＳ//ＱＲ　……　①

また，ＰＳ＝ＱＲ＝$\frac{1}{2}$ＢＤ　……　②

よって，①，② より，四角形ＰＱＲＳは平行四辺形

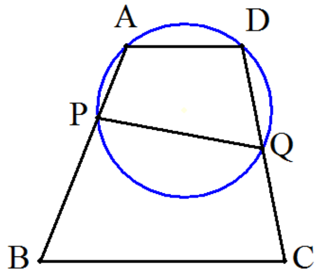
６.

直線ＢＩは∠Ｂの二等分線だから，∠ＰＢＩ＝∠ＣＢＩ
錯角は等しいので，∠ＣＢＩ＝∠ＰＩＢ
よって，∠ＰＢＩ＝∠ＰＩＢ　より，△ＰＢＩは
二等辺三角形より，ＰＢ＝ＰＩ
同様にして，ＱＣ＝ＱＩ　であるから，
ＰＩ＋ＱＩ＝ＰＢ＋ＱＣ　つまり，ＰＱ＝ＰＢ＋ＱＣ



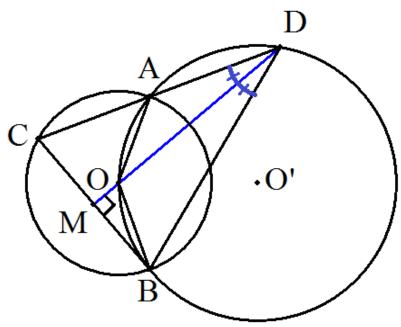
７.

∠ＡＤＱ＋∠ＢＣＱ＝１８０°
四角形ＡＤＰＱは円に内接するので，
∠ＡＤＱ＝∠ＢＰＱ
よって，∠ＢＰＱ＋∠ＢＣＱ＝１８０°であるから，
四角形ＰＢＣＱは円に内接する。



８.

直線ＯＤと円Ｏの弦ＢＣの交点をＭとすると，ＯＤ⊥ＢＣ
である。ここで△ＭＢＤと△ＭＣＤを考えると，
∠ＢMD＝∠ＣMD＝９０°
また，円O’の弦ＯＡ＝ＯＢで有るから，
∠ＢＤM＝∠ＣＤM
辺MDは共通であるから，△MＢＤ≡△MＣＤ
よって，∠ＤＢM＝∠ＤＣM　より，
△ＤＣＢは二等辺三角形である。



９.

（１）省略
（２）四面体ＰＱＲＳと四面体ＡＢＣＤは相似であり，相似比は１：３である。
よって，体積比は１：２７である。