1　第３項が４４，第６項が３２である等差数列$\{a_n\}$について，

（１）一般項a_nを求めよ。　（Ｐ８３　補充問題２　改）

$a_n=a+(n-1)d$ とおくと，

$a_3=a+2d=44$，$a_6=a+5d=32$ より

$a=52$，$d=-4$

よって，$a_n=52-4(n-1)=-4n+56$

（２）第何項が初めて負の数になるか。

$-4n+56<0$ とおくと，$n>14$ より，

$n\geqq 15$　よって，第15項

（３）初項から第n項までの和S_nを求めよ。

$S_n=\frac{n}{2}\{104-4(n-1)\}=\frac{n}{2}(-4n+108)$

$=-2n^2+54n$

（４）S_nの最大値と，そのときのnの値を求めよ。

(2) より，S_nが最大になるのは，$n=13, 14$ のときで，

このとき，最大値は，

$S_{13}=S_{14}=364$

2　第３項が１４，初項から第１０項までの和が６５である等差数列$\{a_n\}$の一般項a_nを求めよ。

$a_n=a+(n-1)d$ とおくと，

$a_3=a+2d=14$ …①

$S_{10}=\frac{10}{2}(2a+9d)=5(2a+9d)=65$ より，

$2a+9d=13$ …②

②−①×2 より，$5d=-15$　よって，$d=-3$

①に代入して，$a=20$　よって，$a_n=20-3(n-1)=-3n+23$

3　次のような等差数列の和Ｓを求めよ。　（Ｐ７６　例６　改）

（１）初項３，末項２９，項数１４

$S=\frac{14}{2}(3+29)=7\times 32=224$

（２）初項１，公差３，項数２０

$S=\frac{20}{2}(2+3\times 19)=10\times 59=590$

（３）等差数列　１，４，７，…… の第１３項から第２４項まで

$a_n=1+3(n-1)=3n-2$ より，

$a_{13}=3\times 13-2=37$

$a_{24}=3\times 24-2=70$　であるから，

$S=\frac{12}{2}(37+70)=6\times 107=642$

4　次のような等比数列の初項から第n項までの和S_nを求めよ。

（１）初項３，公比２　（Ｐ８２　例題７　改）

$S_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$

（２）初項５，公比$\frac{1}{2}$

$S_n=\frac{5\{1-(\frac{1}{2})^n\}}{1-\frac{1}{2}}=10\{1-(\frac{1}{2})^n\}$

（３）初項３，公比$-\frac{1}{3}$

$S_n=\frac{3\{1-(-\frac{1}{3})^n\}}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{9}{4}\{1-(-\frac{1}{3})^n\}$

5　第２項が６，第５項が４８である等比数列$\{a_n\}$について，

（１）一般項a_nを求めよ。　（Ｐ８３　補充問題３　改）

$a_n=ar^{n-1}$ とおくと，

$a_2=ar=6$，$a_5=ar^4=48$ より，

$r^3=8$ であるから，$r=2$，$a=3$

よって，$a_n=3\cdot 2^{n-1}$

（２）初項から第n項までの和S_nを求めよ。

$S_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$

（３）$S_n>10000$ となる最小のnを求めよ。

$3(2^n-1)>10000$ とおくと，

$2^n>\frac{10000}{3}+1$ より，

$2^n\geqq 3334+1=3335$

$2^{11}=2048$，$2^{12}=4096$ であるから，

$n\geqq 12$

よって，最小のnは，$n=12$

6 次の和を求めよ。

（1）$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

（2）$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$

（3）$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

（4）$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

（5）$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（6）$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n-1)\right\}^2$

（7）$\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^k = \frac{6(3^n-1)}{3-1}$
$= 3\cdot(3^n-1)$
$= 3^{n+1}-3$

（8）$\sum_{k=1}^{n-1} 2\cdot 3^k = \frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1}$
$= 3(3^{n-1}-1)$
$= 3^n-3$

（9）$\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^{k-1} = \frac{2(3^n-1)}{3-1}$
$= 3^n-1$

（10）$\sum_{k=1}^{n-1} 2\cdot 3^{k-1} = \frac{2(3^{n-1}-1)}{3-1}$
$= 3^{n-1}-1$

（11）$1+3+5+\cdots\cdots+25 = 13^2 = 169$

（12）$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+20^2 = \frac{1}{6}\cdot 20\cdot 21\cdot 41$ （10　7）
$= 2870$

7 次の数列の和を求めよ。（P８８　例題８）

（1）$1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots\cdots,\ n\cdot(n+2)$

$\sum_{k=1}^{n} k(k+2) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)$
$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n(n+1)$
$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\}$
$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

（2）$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \cdots\cdots,\ (2n-1)^2$

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$
$= \frac{4}{6}n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$
$= \frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3\}$
$= \frac{1}{3}n(4n^2-1)$
$= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

（3）$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \cdots\cdots,\ 1+2+3+\cdots\cdots+n$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$
$= \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}n(n+1)$
$= \frac{1}{12}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$
$= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

8 次の数列$\{a_n\}$の一般項a_nを求めよ。

（1）1，3，7，13，21，………　（P９０　例題９）

$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると，$b_n = 2n$ より，
$n \geqq 2$ のとき
$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$
$= 1 + n(n-1) = n^2-n+1$ であり，
$a_1 = 1$ より，これは，$n=1$ のときも成立する。

（2）2，3，5，9，17，………　（P９１　練習３３）

$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると，$b_n = 2^{n-1}$ より，
$n \geqq 2$ のとき
$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$
$= 2 + \frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^{n-1}+1$ であり，
$a_1 = 2$ より，これは $n=1$ のときも成立する。

9 （1） $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を部分分数に分解せよ。（P92 練習35）

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

（2）次の和 S_n を求めよ。

$$S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

$$=\frac{n}{2n+1}$$

10 次の和 S_n を求めよ。（P95 補充問題8）

$$S_n=2\cdot1+3\cdot2+4\cdot2^2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot2^{n-1} \quad \cdots①$$

$$2S_n=\quad 2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}+(n+1)\cdot2^n \quad \cdots②$$

①−② より，

$$-S_n=1+(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})-(n+1)\cdot2^n$$

$$=1+\frac{2^n-1}{2-1}-(n+1)\cdot2^n$$

$$=2^n-(n+1)\cdot2^n=-n\cdot2^n$$

よって，$S_n=n\cdot2^n$

11 和 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$ を求めよ。（P105 章末問題5）

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) \text{ より，}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

12 初項から第 n 項までの和が，$S_n=n^2+1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。（P105 章末問題7）

$n\geqq2$ のとき $S_{n-1}=(n-1)^2+1$ より，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2$$

$$=n^2-(n^2-2n+1)=2n-1$$

$a_1=S_1=2$ より，これは，$n=1$ のときは成立しない。

よって，

$$\begin{cases} a_1=2 \\ a_n=2n-1 \quad (n\geqq2) \end{cases}$$

13 正の奇数の列を次のような群に分ける。（P94 練習37）

1 | 3，5 | 7，9，11 | 13，15，17，19 | 21，……

（1） $n\geqq2$ のとき，第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

第n群の最初の項は先頭から数えて，

$1+2+\cdots+(n-1)+1=\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 番目 より，

$$2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1=n^2-n+1$$

（2）第 n 群のすべての項の和を n の式で表せ。

$$\frac{n}{2}\left\{2(n^2-n+1)+2(n-1)\right\}$$

$$=\frac{n}{2}(2n^2)=n^3$$

（3）第1群から第 n 群までのすべての項の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

（4） 251は，第何群の最初から何番目の項か。

$2n-1=251$ とおくと，$n=126$

よって，251 は先頭から数えて 126番目の項なので，

$\frac{1}{2}n(n+1)\geqq126$ とおくと，$n(n+1)\geqq252$ であり，

$15\times16=240$，$16\times17=272$ より，$n\geqq16$

よって，251 は第16群の中にあり，

$\frac{1}{2}\times15\times16=120$ より，

第15群までには，120項あるので，

251は第16群の 6番目の項 である。

14 次の漸化式によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

（1）$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n-4$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$\alpha=3\alpha-4$ とおくと、$2\alpha=4$ より、$\alpha=2$

$a_1-2=-1$，$a_{n+1}-2=3(a_n-2)$

よって、$\{a_n-2\}$は初項 -1，公比 3 の等比数列より

$a_n-2=-3^{n-1}$

よって、$a_n=2-3^{n-1}$

（2）$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+2n+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$a_{n+1}-a_n=2n+1$ より、

$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると、$b_n=2n+1$

よって、$n\geqq 2$ のとき、

$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=2+n(n-1)+(n-1)$

$=n^2+1$

$a_1=2$ より、これは $n=1$ のときも成立する。

（3）$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+2^n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると、

$\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$，$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$

よって、$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$は初項 $\frac{1}{2}$，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列より

$\frac{a_n}{2^n}=\frac{n}{2}$　　よって、$a_n=n\cdot 2^{n-1}$

15 次の漸化式によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

（1）$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$a_2-a_1=2$，$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$ より、

$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると、

$b_1=2$，$b_{n+1}=2b_n$ より、$b_n=2^n$

よって、$n\geqq 2$ のとき

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$=1+(2^n-2)=2^n-1$

$a_1=1$ より、これは $n=1$ のときも成立する。

（2）$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$\alpha^2=\alpha+6$ とおくと、$\alpha^2-\alpha-6=0$

$(\alpha+2)(\alpha-3)=0$ より、$\alpha=-2,\ 3$

$a_2+2a_1=6$，$a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)$

よって、$\{a_{n+1}+2a_n\}$は初項 6，公比 3 の等比数列より

$a_{n+1}+2a_n=6\cdot 3^{n-1}=2\cdot 3^n$ …①

$a_2-3a_1=1$，$a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)$

よって、$\{a_{n+1}-3a_n\}$は初項 1，公比 -2 の等比数列より

$a_{n+1}-3a_n=(-2)^{n-1}$ … ②

①−② より、$5a_n=2\cdot 3^n-(-2)^{n-1}$

よって、$a_n=\frac{1}{5}\left\{2\cdot 3^n-(-2)^{n-1}\right\}$

16 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。

$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$　…①

[1] $n=1$ のとき、左辺$=1$，右辺$=1$ より、

①は成立する。

[2] $n=k$ のとき ① が成立と仮定すると、

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

このとき、

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$

$=(k+1)^2$

よって、①は $n=k+1$ のときも成立する。

[1]，[2] より、

① はすべての自然数 n について成立する。