$\boxed{3}$［福岡大］

条件 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について考える。

(1)　$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n で表せ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{2a_n}$

$=\dfrac{a_n}{2a_n}+\dfrac{2}{2a_n}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a_n}$

$=\dfrac{1}{2}+b_n$ //

(2) (1)より 数列$\{b_n\}$は，

初項 $b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{1}=1$，

公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから，

$b_n=1+(n-1)\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}n+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{n+1}{2}$

よって

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{n+1}{2}$

$a_n=\dfrac{2}{n+1}$ //

$\boxed{4}$［愛媛大］

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が条件 $S_n=4n-3a_n$ を満たすとする。

(1)　初項 a_1 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を求めよ。

(1) $S_n=4n-3a_n$ に

$n=1$ を代入して

$S_1=4\times1-3a_1$

$S_1=a_1$ より

$a_1=4-3a_1$

$4a_1=4$

$a_1=1$ //

(2)
$$\begin{array}{rl} & S_{n+1}=4(n+1)-3a_{n+1} \\ -) & S_n=4n-3a_n \\ \hline \end{array}$$

$S_{n+1}-S_n=4-3a_{n+1}+3a_n$

$a_{n+1}=4-3a_{n+1}+3a_n$

$4a_{n+1}=3a_n+4$

$a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+1$

変形すると

$a_{n+1}-4=\dfrac{3}{4}a_n+1-4$

$=\dfrac{3}{4}a_n-3$

$=\dfrac{3}{4}(a_n-4)$

数列$\{a_n-4\}$は，

初項 $a_1-4=1-4=-3$，

公比 $\dfrac{3}{4}$ の等比数列であるから，

$a_n-4=-3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

$a_n=4-3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$ //