理系数学課外（数列：2020 入試問題より）

月　　日　　組　　番　氏名

【１】宇都宮大学 地域デザイン・工・農

数列$\{a_n\}$が

$$a_1=\frac{1}{6},\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+3)a_n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められているとき，次の問いに答えよ。

問１　a_2およびa_3の値を求めよ。

問２　$b_n=\dfrac{1}{a_n}$とおくとき，$b_{100}-b_{99}$の値を求めよ。

問３　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

問４　$\displaystyle\sum_{n=1}^{99}a_n$の値を求めよ。

(1) $a_2=\dfrac{a_1}{4a_1+1}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}+1}=\dfrac{1}{10}$ // , $a_3=\dfrac{a_2}{5a_2+1}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{10}+1}=\dfrac{1}{15}$ //

(2) $\dfrac{1}{a_{n+1}}=n+3+\dfrac{1}{a_n}$ より $b_{n+1}=n+3+b_n$

$b_{n+1}-b_n=n+3$

$n=99$を代入して

$b_{100}-b_{99}=99+3=102$ //

(3) (2)より　$b_{n+1}-b_n=n+3$であるから

$n\geqq 2$のとき

$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+3)$

$=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{2}(n-1)n+3(n-1)$

$=6+\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n+3n-3$

$=\dfrac{1}{2}(n+2)(n+3)$　($n=1$のときも成り立つ)

よって

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}(n+2)(n+3)$

$a_n=\dfrac{2}{(n+2)(n+3)}$ //

(4) (3)より

$a_n=2\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{99}a_n=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)$

$=2\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{102}\right)$

$=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{51}$

$=\dfrac{34-1}{51}=\dfrac{33}{51}=\dfrac{11}{17}$ //

【２】山形大学 工

数列$\{a_n\}$を

$$a_1=\frac{1}{4},\quad a_{n+1}=\frac{1+\sqrt{a_n}}{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{1}{4}\leqq a_n<1$を示せ。 ・・・ ☆

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$に対して，$a_n=\cos^2\theta_n\ \left(0\leqq\theta_n\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$とおく。

(ⅰ)　θ_1の値を求めよ。

(ⅱ)　数列$\{\theta_n\}$が漸化式$\theta_{n+1}=\dfrac{1}{2}\theta_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$を満たすことを示せ。

(3)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1) (i) $a_1=\dfrac{1}{4}$であるから $n=1$のとき☆は成り立つ。

(ii) $n=k$のとき☆が成り立つと仮定すると

$\dfrac{1}{4}\leqq a_k<1$

$\dfrac{1}{2}\leqq\sqrt{a_k}<1$

$\dfrac{3}{2}\leqq 1+\sqrt{a_k}<2$

$\dfrac{3}{4}\leqq\dfrac{1+\sqrt{a_k}}{2}<1$

$\dfrac{3}{4}\leqq a_{k+1}<1$

よって

$\dfrac{1}{4}\leqq a_{k+1}<1$

$n=k+1$のときも☆は成り立つ。

(i)(ii)より，すべての自然数nについて☆は成り立つ。//

(2) $a_1=\cos^2\theta_1$　$0\leqq\theta_1\leqq\dfrac{\pi}{2}$より $\cos\theta_1\geqq 0$

(i) $\dfrac{1}{4}=\cos^2\theta_1$　よって $\cos\theta_1=\dfrac{1}{2}$　$\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$ //

(ii) $a_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{a_n}}{2}$ より

$\cos^2\theta_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{\cos^2\theta_n}}{2}$

$0\leqq\theta_n\leqq\dfrac{\pi}{2}$より $\cos\theta_n\geqq 0$

よって

$\cos^2\theta_{n+1}=\dfrac{1+\cos\theta_n}{2}=\cos^2\dfrac{\theta_n}{2}$

したがって　$\theta_{n+1}=\dfrac{1}{2}\theta_n$ である。//

(3) (2)より 数列$\{\theta_n\}$は，初項$\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$，公比$\dfrac{1}{2}$の等比数列であるから，

$\theta_n=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって

$a_n=\cos^2\theta_n$

$=\cos^2\left\{\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ //