

[9] [慶応義塾大]

三角形 OAB において、 $OA=8$, $OB=10$, $AB=12$ とする。このとき $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ の内積は $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \square$ である。また、三角形 OAB の垂心を H とし、 $\vec{OH}$ を $\vec{OA}$,

$\vec{OB}$ を用いて表すと $\vec{OH} = \square$ となる。

$\angle AOB = \theta$ とすると

余弦定理より

$$144 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \theta$$

$$160 \cos \theta = 20$$

$$\cos \theta = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{8} = 10 //$$

$\vec{OH} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ (s, t は実数) とする。

$$\vec{AH} = (s-1)\vec{OA} + t\vec{OB} \text{ である。}$$

$$\vec{AH} \perp \vec{OB} \text{ より } \vec{AH} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$(s-1)\vec{OA} \cdot \vec{OB} + t|\vec{OB}|^2 = 0$$

$$10(s-1) + 100t = 0$$

$$\therefore s + 10t = 1 \dots \textcircled{1}$$

同様に $\vec{BH} = s\vec{OA} + (t-1)\vec{OB}$ である。

$$\vec{BH} \perp \vec{OA} \text{ より } \vec{BH} \cdot \vec{OA} = 0$$

$$s|\vec{OA}|^2 + (t-1)\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$64s + 10(t-1) = 0$$

$$\therefore 64s + 10t = 10 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } 63s = 9$$

$$\therefore s = \frac{1}{7}$$

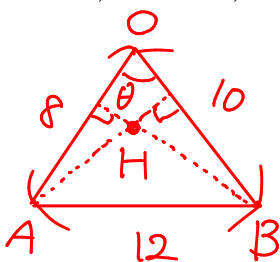
これを①に代入すると

$$\frac{1}{7} + 10t = 1$$

$$10t = \frac{6}{7}$$

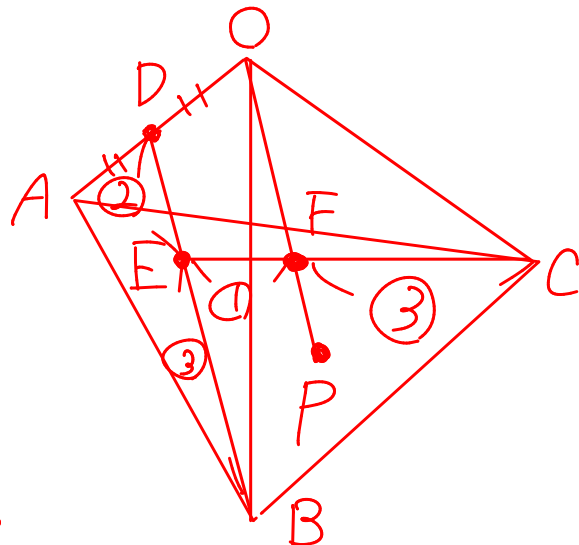
$$\therefore t = \frac{3}{35}$$

$$\text{したがって } \vec{OH} = \frac{1}{7}\vec{OA} + \frac{3}{35}\vec{OB} //$$



[10] [名古屋市立大]

四面体 OABC において、辺 OA を 1:1 に内分する点を D, 線分 BD を 3:2 に内分する点を E, 線分 CE を 3:1 に内分する点を F, 直線 OF と平面 ABC の交点を P とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とするとき、 $\vec{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。



$$\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\vec{OE} = \frac{3}{5}\vec{OD} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

$$= \frac{3}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

$$\vec{OF} = \frac{3}{4}\vec{OE} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

$$= \frac{9}{40}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} \text{ であり。}$$

点 P は直線 OF 上にあるので

$$\vec{OP} = k\vec{OF} \text{ (} k \text{ は実数) とおくと}$$

$$\vec{OP} = \frac{9}{40}k\vec{a} + \frac{3}{10}k\vec{b} + \frac{1}{4}k\vec{c}$$

点 P は平面 ABC 上にあるので

$$\frac{9}{40}k + \frac{3}{10}k + \frac{1}{4}k = 1$$

$$\frac{31}{40}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{40}{31}$$

したがって

$$\vec{OP} = \frac{9}{31}\vec{a} + \frac{12}{31}\vec{b} + \frac{10}{31}\vec{c} //$$