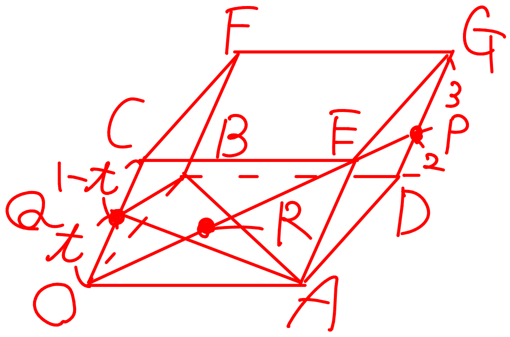
理系数学課外（ベクトル）　　月　　日　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

11 [山口大]

$0<t<1$ とする。平行六面体 OADB$-$CEGF において，辺 DG を $2:3$ に内分する点を P，辺 OC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q，直線 OP と平面 ABQ との交点を R とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，t を用いて表せ。

(2) 点 R が三角形 ABQ の重心と一致するとき，t の値を求めよ。



(1) $\overrightarrow{OQ}=t\vec{c}$

$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OG}$

$=\frac{3}{5}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$=\vec{a}+\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$ である.

点Rは直線OP上にあるので

$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OP}$ (kは実数)とおける.

$\therefore \overrightarrow{OR}=k\vec{a}+k\vec{b}+\frac{2}{5}k\vec{c}$

ここで $\overrightarrow{OQ}=t\vec{c}$ より

$\vec{c}=\frac{1}{t}\overrightarrow{OQ}$ であるから

$\overrightarrow{OR}=k\vec{a}+k\vec{b}+\frac{2}{5t}k\overrightarrow{OQ}$

点Rは平面ABQ上にあるから

$k+k+\frac{2}{5t}k=1 \quad \therefore k=\frac{5t}{10t+2}$

したがって

$\overrightarrow{OR}=\frac{5t}{10t+2}\vec{a}+\frac{5t}{10t+2}\vec{b}+\frac{t}{5t+1}\vec{c}$ //

(2) 三角形ABQの重心をHとすると

$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\overrightarrow{OQ})$

$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}t\vec{c}$

点Rが点Hと一致するとき

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は1次独立であるから

$$\begin{cases}\dfrac{5t}{10t+2}=\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{t}{5t+1}=\dfrac{1}{3}t\end{cases} \quad \therefore t=\frac{2}{5}$$ //

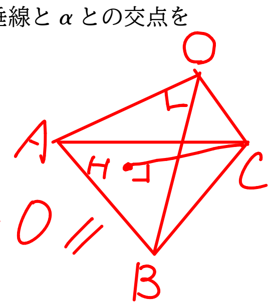
12 [福井大]

四面体 OABC の各辺の長さをそれぞれ AB$=\sqrt{7}$，BC$=3$，CA$=\sqrt{5}$，OA$=2$，OB$=\sqrt{3}$，OC$=\sqrt{7}$ とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(2) 三角形 OAB を含む平面を α とし，点 C から平面 α に下ろした垂線と α との交点を H とする。このとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。



(1) $|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$7=4-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3 \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ //

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$9=3-2\vec{b}\cdot\vec{c}+7 \quad \therefore \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$ //

$|\overrightarrow{CA}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{c}|^2$

$5=4-2\vec{c}\cdot\vec{a}+7 \quad \therefore \vec{c}\cdot\vec{a}=3$ //

(2) $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s,tは実数)とおくと

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$ より $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{a}=0$

$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$4s-3=0 \quad \therefore s=\frac{3}{4}$

また $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$ より $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{b}=0$

$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$3t-\frac{1}{2}=0 \quad \therefore t=\frac{1}{6}$

したがって $\overrightarrow{OH}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$ //

(3) OA$\perp$OBより

$\triangle OAB=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\sqrt{3}$

また $|\overrightarrow{CH}|^2=\left|\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\vec{c}\right|^2$

$=\frac{9}{16}|\vec{a}|^2+\frac{1}{36}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{3}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=\frac{9}{4}+\frac{1}{12}+7-\frac{1}{6}-\frac{9}{2}=\frac{56}{12}=\frac{14}{3}$

$|\overrightarrow{CH}|>0$ より $|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{\frac{14}{3}}$

したがって四面体OABCの体積は

$\frac{1}{3}\times\triangle OAB\times|\overrightarrow{CH}|=\frac{\sqrt{14}}{3}$ //