数学Ⅱ　第４章　三角関数

第１節　三角関数

１限目	Ｐ１０４～Ｐ１０７	角の拡張
２限目	Ｐ１０８～Ｐ１１０	三角関数の相互関係
３限目	Ｐ１１１～Ｐ１１２	三角関数を含む等式
４限目	Ｐ１１３～Ｐ１１５	三角関数のグラフ
５限目	Ｐ１１６～Ｐ１１８	いろいろな三角関数のグラフ
６限目	Ｐ１１９～Ｐ１２０	三角関数の性質
７限目	Ｐ１２１～Ｐ１２２	三角関数を含む方程式
８限目	Ｐ１２３	三角関数を含む不等式
９限目	Ｐ１２４	補充問題

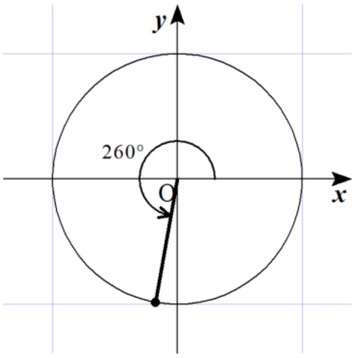
第２節　加法定理

１限目	Ｐ１２５～Ｐ１２６	正弦・余弦の加法定理
２限目	Ｐ１２７～Ｐ１２８	正接の加法定理
３限目	Ｐ１２９～Ｐ１３０	２倍角の公式，半角の公式
４限目	Ｐ１３１	三角関数を含む方程式（２倍角）
５限目	Ｐ１３２～Ｐ１３３	三角関数の合成
６限目	Ｐ１３４	三角関数を含む方程式（三角関数の合成）
７限目	Ｐ１３６	補充問題
８限目	Ｐ１３７	章末問題Ａ
９限目	Ｐ１３８	章末問題Ｂ

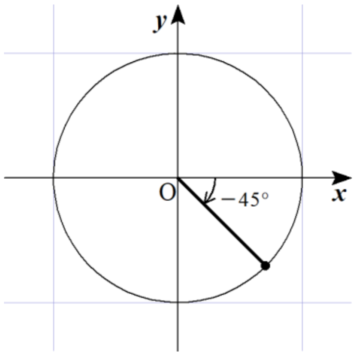
第１節　三角関数　練習問題 解答

練習１

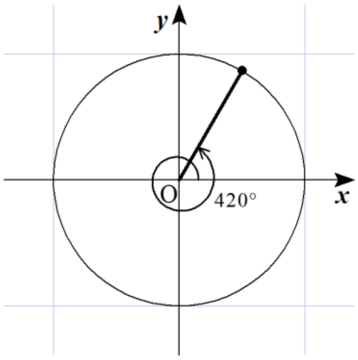
（１）２６０°



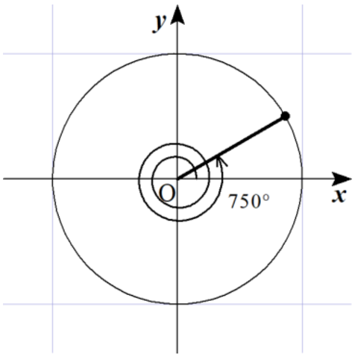
（２）－４５°



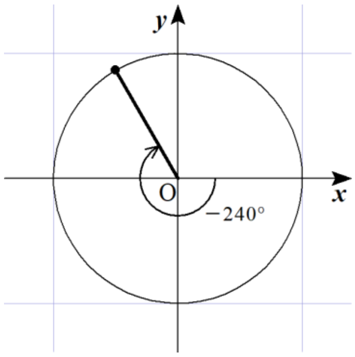
（３）４２０°



（４）７５０°



（５）－２４０°



練習２

４２０°＝３６０°×１＋６０°

－３００°＝３６０°×(－１)＋６０°

練習３

（１）半径１の円周の長さは2π　であるから，３６０°＝2π(ラジアン)

よって，１８０°＝π(ラジアン)

（２）（１）より，１(ラジアン)＝$\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

練習４

（１）２１０°＝$\dfrac{7}{6}\pi$　（２）２４０°＝$\dfrac{4}{3}\pi$　（３）３３０°＝$\dfrac{11}{6}\pi$

（４）$\dfrac{5}{4}\pi$＝２２５°　（５）$\dfrac{3}{2}\pi$＝２７０°

練習５

（１）半径４，中心角$\dfrac{\pi}{3}$　のとき，

弧の長さ　$l = 2\pi \times 4 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{3}\pi$，　扇形の面積　$S = \pi \times 4^2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{8}{3}\pi$

（２）半径６，中心角$\dfrac{7}{6}\pi$　のとき，

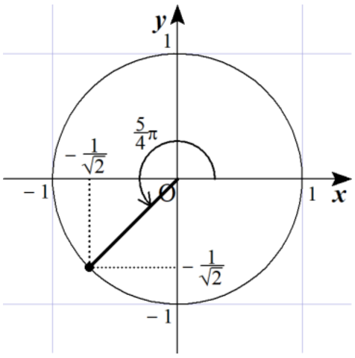
弧の長さ　$l = 2\pi \times 6 \times \dfrac{7}{12} = 7\pi$，　扇形の面積　$S = \pi \times 6^2 \times \dfrac{7}{12} = 21\pi$

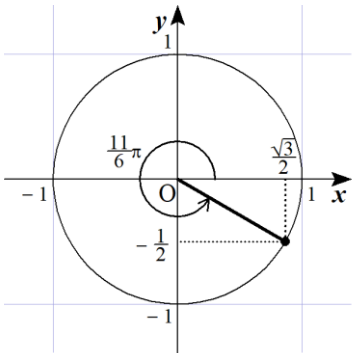
練習６

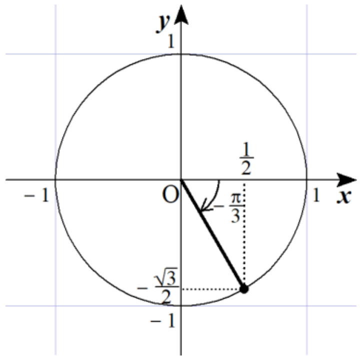
（１） $\sin\dfrac{5}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,　$\cos\dfrac{5}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,　$\tan\dfrac{5}{4}\pi=1$

（２） $\sin\dfrac{11}{6}\pi=-\dfrac{1}{2}$,　$\cos\dfrac{11}{6}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,　$\tan\dfrac{11}{6}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

（３） $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,　$\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$,　$\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$



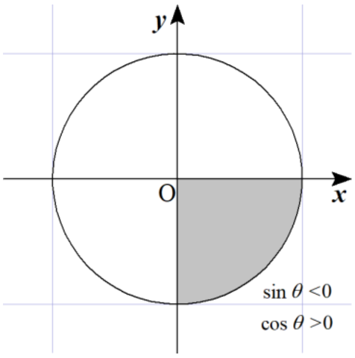




練習７

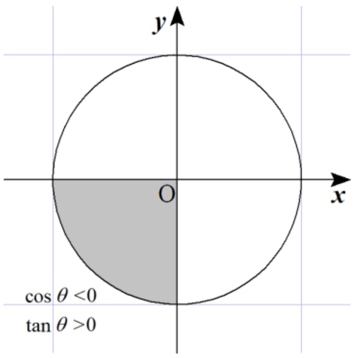
（１） $\sin\theta<0$　かつ　$\cos\theta>0$

第４象限



（２） $\cos\theta<0$　かつ　$\tan\theta>0$

第３象限



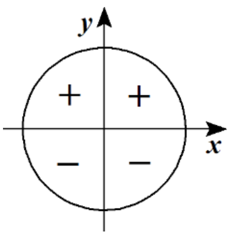
$\boxed{\text{参考}}$　**三角関数の値の範囲**

○　$-1\leqq\sin\theta\leqq1$，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$　であり，

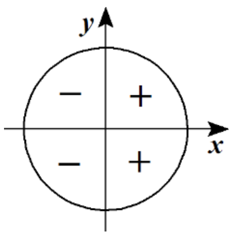
$\tan\theta$　はすべての実数値をとる。

○　各象限における三角関数の値の符号は下の通り。

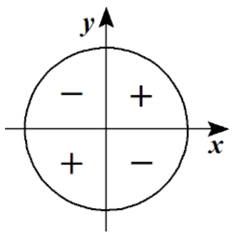
$\sin\theta$



$\cos\theta$



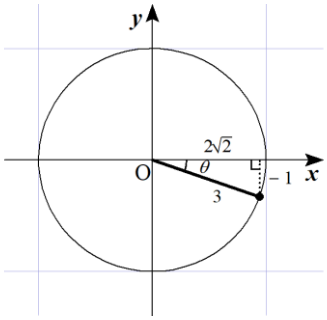
$\tan\theta$



練習８

θ が第４象限で，$\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，右図より，

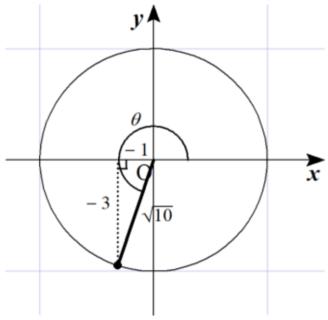
$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，　$\tan\theta=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$



練習９

θ が第３象限で，$\tan\theta=3$ のとき，右図より，

$\sin\theta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$



練習１０

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ の両辺を２乗すると，

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

$1+2\sin\theta\cos\theta=2$ より，　　$\leftarrow\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

練習１１

$\sin\theta+\cos\theta=a$ の両辺を２乗すると，

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=a^2$

$1+2\sin\theta\cos\theta=a^2$ より，　　$\leftarrow\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{a^2-1}{2}$ このとき，

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)\\&=a\left(1-\frac{a^2-1}{2}\right)=a\cdot\frac{3-a^2}{2}=\frac{3a-a^3}{2}\end{aligned}$$

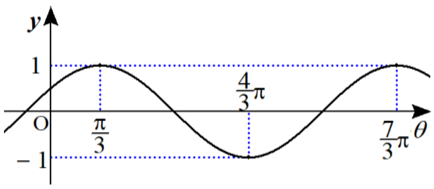
練習１２

（１）
$$\begin{aligned}(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2&=(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\&=2\end{aligned}$$

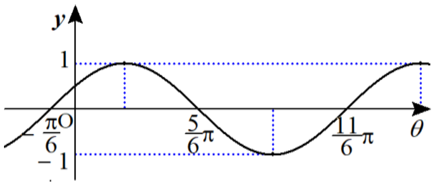
（２）
$$\begin{aligned}\tan^2\theta-\sin^2\theta&=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\\&=\tan^2\theta\sin^2\theta\end{aligned}$$

練習１３

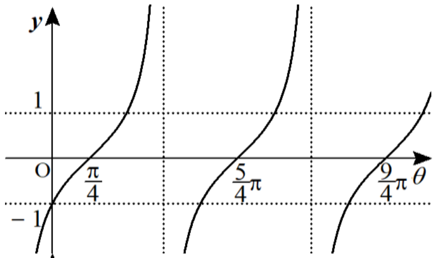
（１）$y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　周期$=2\pi$



（2） $y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　周期＝2π

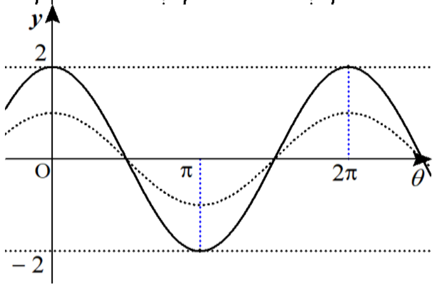


（3） $y=\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　周期＝π

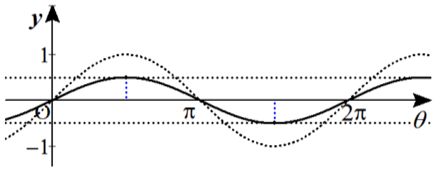


練習１４

（1） $y=2\cos\theta$　　周期＝2π

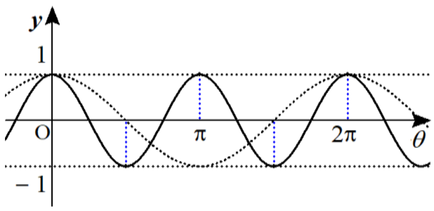


（2） $y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$　　周期＝2π

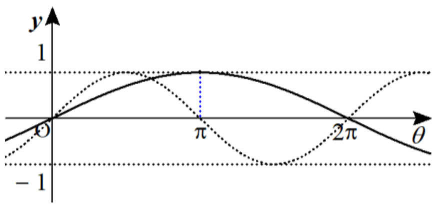


練習１５

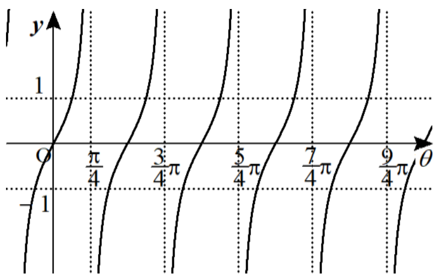
（1） $y=\cos 2\theta$　　周期＝π



（2） $y=\sin\dfrac{\theta}{2}$　　周期＝4π



（3） $y=\tan 2\theta$　　周期＝$\dfrac{\pi}{2}$



練習１６

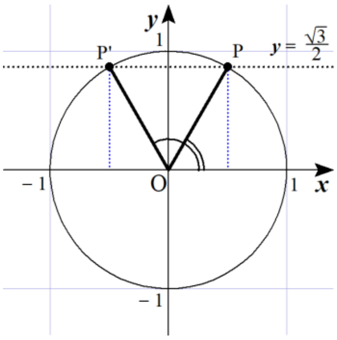
（1） $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$

（2） $\cos\left(-\dfrac{13}{6}\pi\right)=\cos\dfrac{13}{6}\pi=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（3） $\tan\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=-\tan\dfrac{9}{4}\pi=-\tan\dfrac{\pi}{4}=-1$

練習１７　$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき，次の方程式を解け。

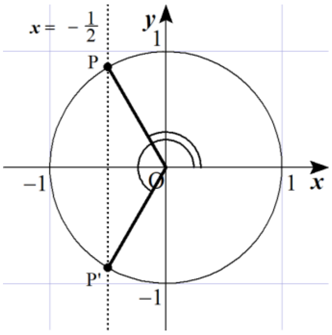
（１）$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$

（２）$2\cos\theta + 1 = 0$　より，

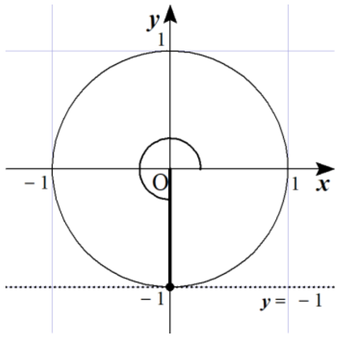
$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$



$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$

（３）$\sin\theta + 1 = 0$　より，

$\sin\theta = -1$

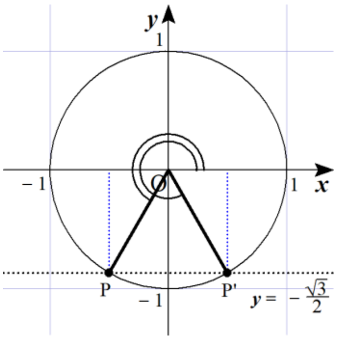


$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$

練習１８　次の方程式を解け。

（１）$2\sin\theta = -\sqrt{3}$　より，

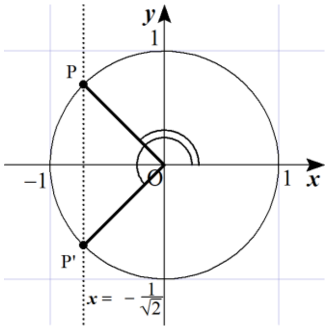
$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$\theta = \dfrac{4}{3}\pi + 2n\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi + 2n\pi$（$n$　は整数）

（２）$\sqrt{2}\cos\theta = -1$　より，

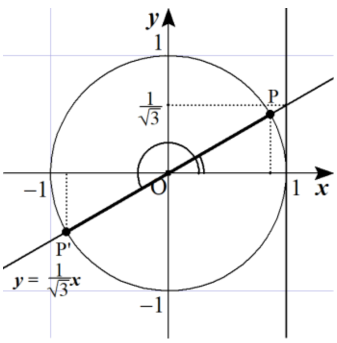
$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



$\theta = \dfrac{3}{4}\pi + 2n\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi + 2n\pi$（$n$　は整数）

練習１９　次の方程式を解け。

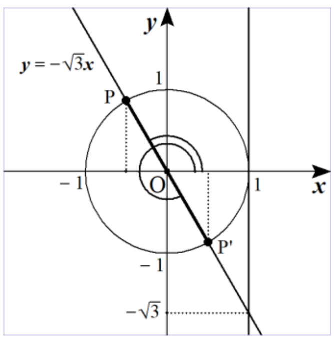
（１）$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



$\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{7}{6}\pi$

$\theta = \dfrac{\pi}{6} + n\pi$（$n$　は整数）

（２）$\tan\theta = -\sqrt{3}$



$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi$　　←（$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき）

$\theta = \dfrac{2}{3}\pi + n\pi$（$n$　は整数）

練習２０　$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき，次の方程式を解け。

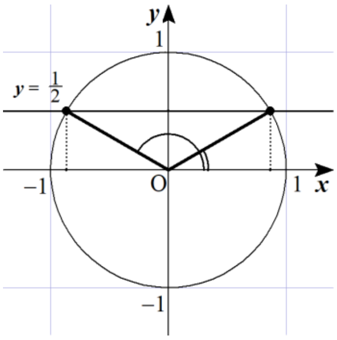
（１）$2\cos^2\theta + 5\sin\theta - 4 = 0$

$2(1-\sin^2\theta) + 5\sin\theta - 4 = 0$

$2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 = 0$

$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) = 0$　より，

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$



$\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

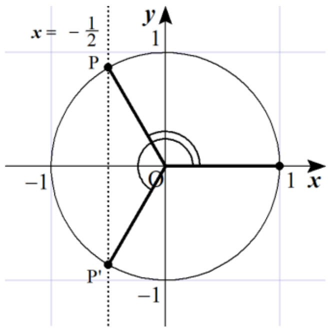
（２）$2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

$2(1-\cos^2\theta) + \cos\theta - 1 = 0$

$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$

$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$　より，

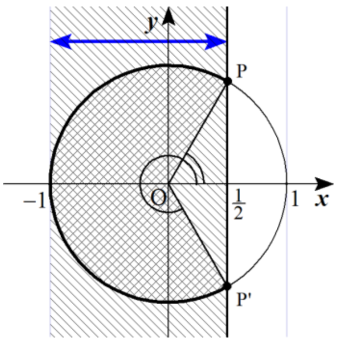
$\cos\theta = -\dfrac{1}{2},\ 1$



$\theta = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

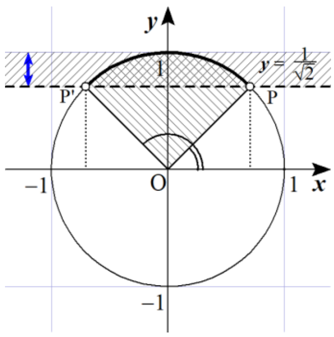
練習２１　$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき，次の不等式を解け。

（１）$\cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$



$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$

（２）$\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3}{4}\pi$

第１節　三角関数　補充問題 解答

１．　$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき，次の方程式を解け。

（１）$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{11}{6}\pi$　より，

$\theta - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \pi$

（２）$\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$　より，

$\theta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi$

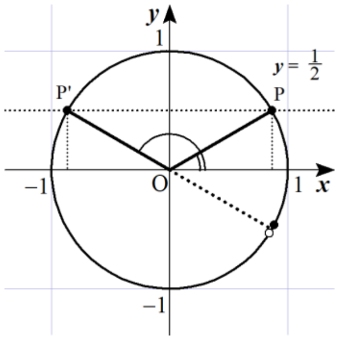
$\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$

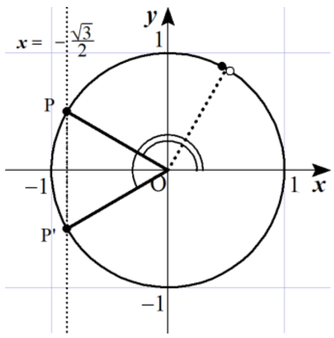
（３）$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

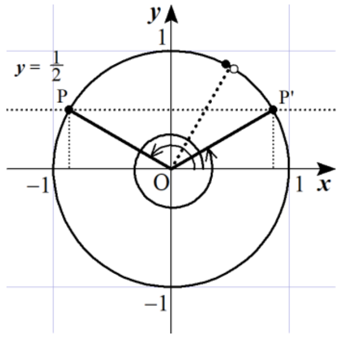
$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$　より，

$\theta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$

$\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{11}{6}\pi$



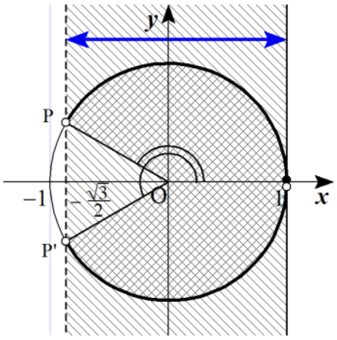




2．　$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき，次の不等式を解け。

（1）$2\cos\theta > -\sqrt{3}$　より，

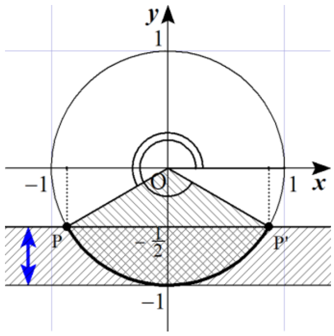
$\cos\theta > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$0 \leqq \theta < \dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{7}{6}\pi < \theta < 2\pi$

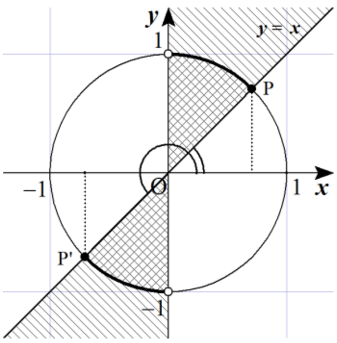
（2）$2\sin\theta + 1 \leqq 0$　より，

$\sin\theta \leqq -\dfrac{1}{2}$



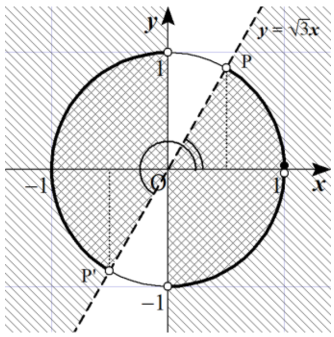
$\dfrac{7}{6}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{11}{6}\pi$

（3）$\tan\theta \geqq 1$



$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{4}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi$

（4）$\tan\theta < \sqrt{3}$



$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

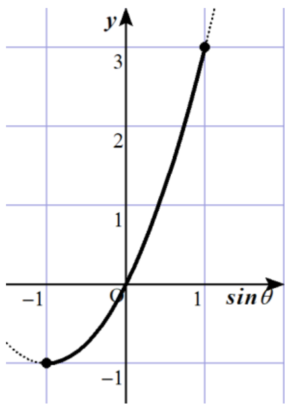
3．

$y = \sin^2\theta + 2\sin\theta = (\sin\theta + 1)^2 - 1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$　であるから，右図より，

最大値　3（$\sin\theta = 1$　より，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$　のとき）

最小値　-1（$\sin\theta = -1$　より，$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$　のとき）



第２節　加法定理　練習問題 解答

練習２２

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　において，βを－βにおき換えると，

$\sin(-\beta)=-\sin\beta$，$\cos(-\beta)=\cos\beta$　であるから，

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　において，βを－βにおき換えると，

$\sin(-\beta)=-\sin\beta$，$\cos(-\beta)=\cos\beta$　であるから，

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

練習２３

$$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

練習２４

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$　← $\cos 15^\circ$　のことである。

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

別解

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

練習２５

$$\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3}=-\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}$$

練習２６

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$　← $\tan 15^\circ$　のことである。

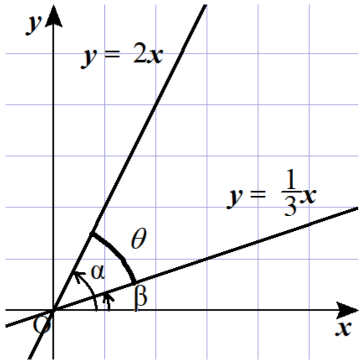
$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

別解

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\times1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

練習２７

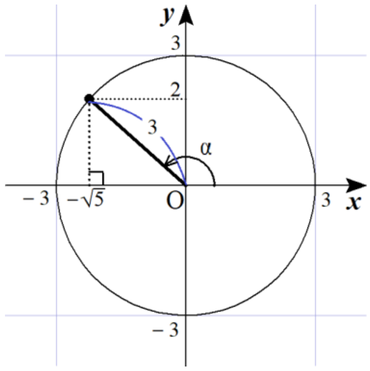


$\tan\alpha=2$， $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$　とおくと，

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=\frac{6-1}{3+2}=1$$

であり， $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　であるから， $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

練習２８



$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$　で， $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　のとき，

（１） $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$

（２） $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

（３） $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{5}{9}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}$

練習２９

（１） $\sin3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)$

$$\begin{aligned}&=\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

（２） $\cos3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)$

$$\begin{aligned}&=\cos2\alpha\cos\alpha-\sin2\alpha\sin\alpha\\&=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha\\&=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\\&=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha\\&=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\end{aligned}$$

練習３０

（１） $\sin^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$　より， $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

（2） $\sin^2\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{1-\cos\dfrac{3}{4}\pi}{2}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ より， $\sin\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

（3） $\cos^2\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{1+\cos\dfrac{3}{4}\pi}{2}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ より， $\cos\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

練習３１

（1） $\tan\alpha=3$ のとき， $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{6}{1-9}=-\dfrac{3}{4}$

（2） $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で， $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$ のとき， $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{2}{3}}{1+\dfrac{2}{3}}=\dfrac{3-2}{3+2}=\dfrac{1}{5}$ より，

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

練習３２　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

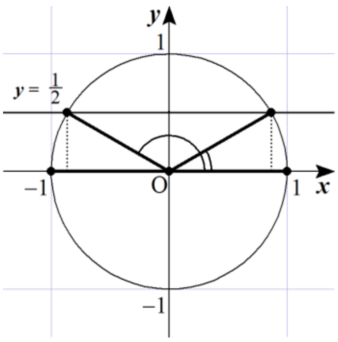
（1） $\cos 2\theta+\sin\theta=1$

$(1-2\sin^2\theta)+\sin\theta-1=0$

$2\sin^2\theta-\sin\theta=0$

$(2\sin\theta-1)\sin\theta=0$ より，

$\sin\theta=0,\ \dfrac{1}{2}$



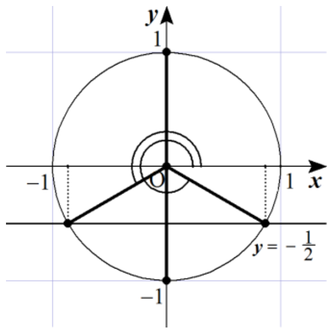
$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \pi$

（2） $\sin 2\theta+\cos\theta=0$

$2\sin\theta\cos\theta+\cos\theta=0$

$(2\sin\theta+1)\cos\theta=0$ より，

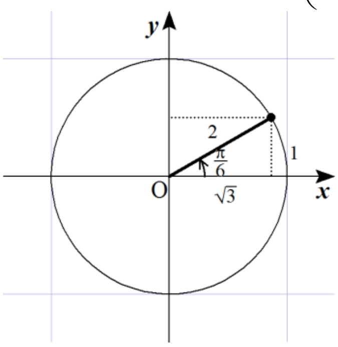
$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ または， $\cos\theta=0$



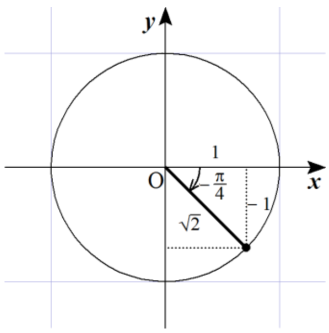
$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

練習３３

（1） $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$



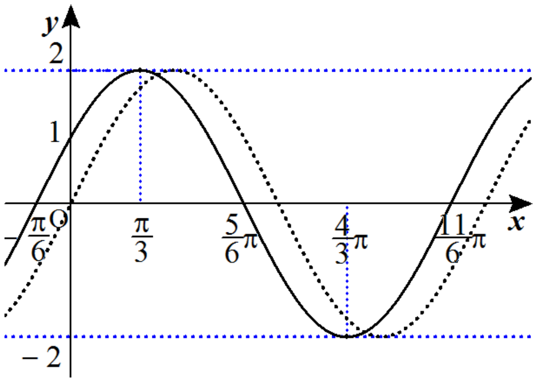
（2） $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$



練習３４

$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　であるから,

y　の最大値は２，最小値は－２　であり，グラフは次のようになる。



練習３５　$0\leqq x<2\pi$　のとき，次の方程式を解け。

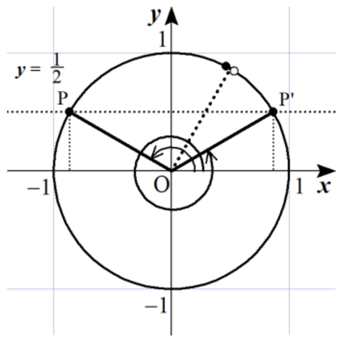
$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$

$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$　より,

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$　であるから,

$x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$　　よって，$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{11}{6}\pi$



← **第１節 補充問題１**（３）と同じ！

第２節　加法定理　補充問題 解答

４.

（１）$OP\cos\alpha=2$，$OP\sin\alpha=4$

（２）$OP=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$　より，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

点Q(x，y) とすると,

$x=2\sqrt{5}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$y=2\sqrt{5}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$　であり,

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$　であるから,

$x=2\sqrt{5}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\sqrt{2}$，$y=2\sqrt{5}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}=3\sqrt{2}$

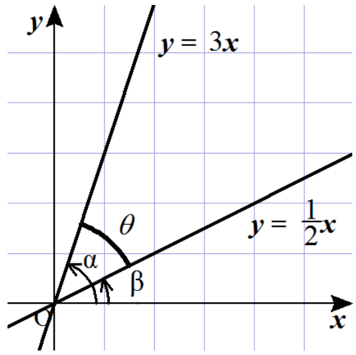
よって，点Q$(-\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$

5．

$\tan\alpha = 3$，$\tan\beta = \dfrac{1}{2}$　とおくと，

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{6-1}{2+3} = 1$$

であり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　であるから，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$



6．　$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき，次の不等式を解け。

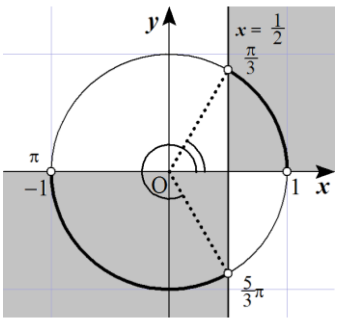
（1）$\sin 2\theta > \sin\theta$

$2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta > 0$

$(2\cos\theta - 1)\sin\theta > 0$　より，

$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > \dfrac{1}{2}$　または，

$\sin\theta < 0$，$\cos\theta < \dfrac{1}{2}$



$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，$\pi<\theta<\dfrac{5}{3}\pi$

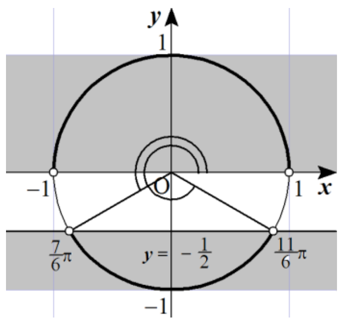
（2）$\cos 2\theta < \sin\theta + 1$

$1 - 2\sin^2\theta < \sin\theta + 1$

$2\sin^2\theta + \sin\theta > 0$

$(2\sin\theta + 1)\sin\theta > 0$　より，

$\sin\theta < -\dfrac{1}{2}$　または，$\sin\theta > 0$



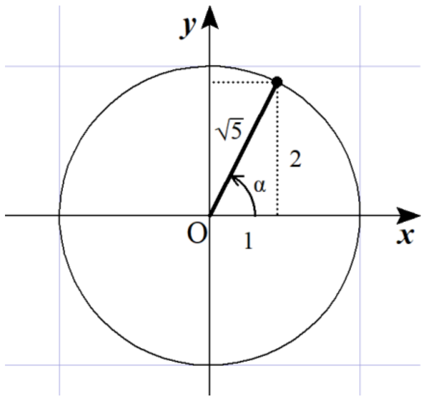
$0<\theta<\pi$，$\dfrac{7}{6}\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$

7．

$y = \sin x + 2\cos x = \sqrt{5}\sin(x+\alpha)$

（ただし，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$）

であるから，最大値 $\sqrt{5}$，最小値 $-\sqrt{5}$



第４章　三角関数　章末問題 解答

1．

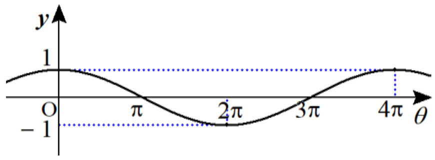
（1）$\sin\dfrac{16}{3}\pi = \sin\dfrac{4}{3}\pi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（2）$\cos\dfrac{7}{2}\pi = \cos\dfrac{3}{2}\pi = 0$

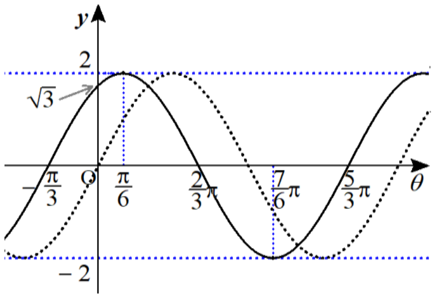
（3） $\tan\left(-\dfrac{11}{6}\pi\right)=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2．

（1） $y=\cos\dfrac{\theta}{2}$　　　　　周期＝4π



（2） $y=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　　周期＝2π



3．　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$　のとき，

（1） $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

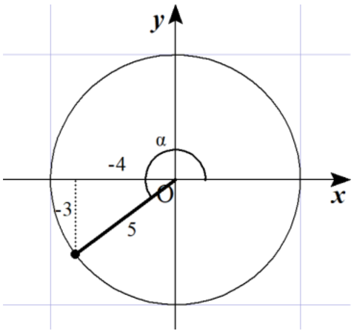
θは第４象限であるから，$\sin\theta<0$，$\cos\theta>0$　より，

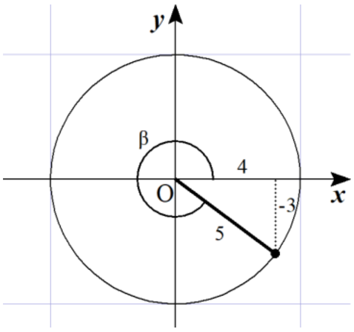
$\sin\theta-\cos\theta<0$　よって，$\sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

（2） $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)=-\frac{\sqrt{6}}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{3\sqrt{6}}{8}$$

4．　αが第３象限，βが第４象限の角であるから，下図より，





$\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$　　　　　$\sin\beta=-\dfrac{3}{5}$

$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$　　　　　$\cos\beta=\dfrac{4}{5}$

（1） $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=0$$

（2） $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$

$$=-\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{7}{25}$$

5． 次の等式を証明せよ。

（１）$\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}=\dfrac{(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2}{\sin^2\theta}$

（２）$\dfrac{1}{\tan\theta}-\tan\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\cos 2\theta}{\frac{1}{2}\sin 2\theta}=\dfrac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

6． $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

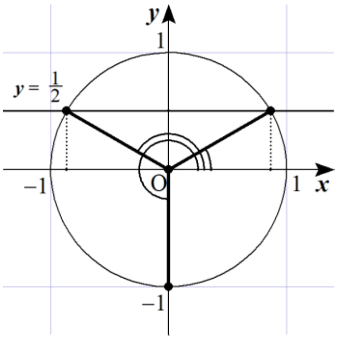
（１）$2\cos^2 x-\sin x-1=0$

$2(1-\sin^2 x)-\sin x-1=0$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$ より，

$\sin x=-1,\ \dfrac{1}{2}$



$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

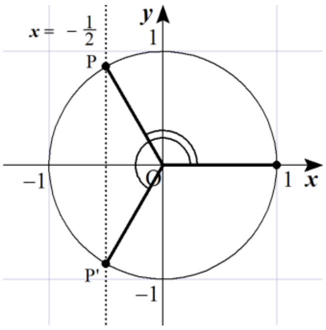
（２）$\cos 2x=\cos x$

$(2\cos^2 x-1)-\cos x=0$

$2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$ より，

$\cos x=-\dfrac{1}{2},\ 1$



$x=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

7． 省略

8．

$y=2\sin\theta-\cos 2\theta=2\sin\theta-(1-2\sin^2\theta)$

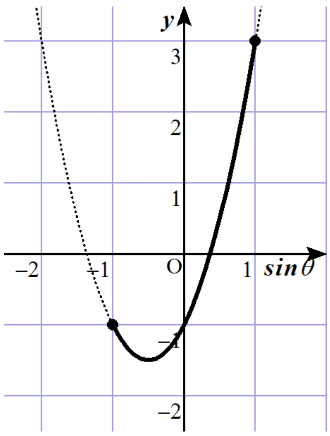
$=2\sin^2\theta+2\sin\theta-1=2(\sin^2\theta+\sin\theta)-1$

$=2\left\{\left(\sin\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right\}-1=2\left(\sin\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ であるから，右図より，

最大値 3（$\sin\theta=1$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき）

最小値 $-\dfrac{3}{2}$（$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ より，$\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ のとき）



9．

（１）$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}$ より，$(\sin\alpha+\sin\beta)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\dfrac{1}{4}$ ……… ①

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$ より，$(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{1}{9}$ ……… ②

①＋② より，$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2+2\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{36}$

よって，$\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{59}{72}$

（２）$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=4$，$\tan\gamma=13$　より，

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+4}{1-8}=-\frac{6}{7}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\frac{13-\dfrac{6}{7}}{1+13\cdot\dfrac{6}{7}}=\frac{91-6}{7+78}=\frac{85}{85}=1$$

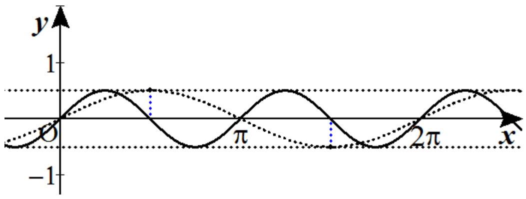
１０．

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$　←分母･分子を $\cos\alpha\cos\beta$　で割る。

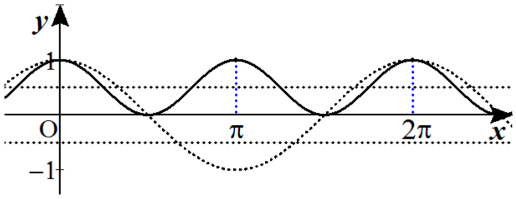
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

１１．

（１）$y=\dfrac{1}{2}\sin 2x$　　　周期＝π



（２）$y=\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$　　　周期＝π



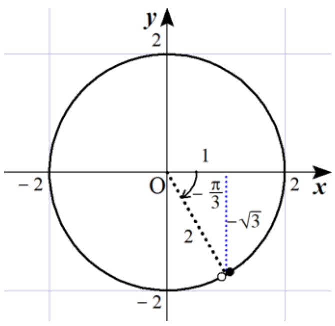
１２．

（１）$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　（$0\leqq x<2\pi$）であり，

$-\dfrac{\pi}{3}\leqq x-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{3}\pi$　であるから，

y　の最大値は２　（$x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　より，$x=\dfrac{5}{6}\pi$　のとき）

　最小値は－２（$x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\pi$　より，$x=\dfrac{11}{6}\pi$　のとき）



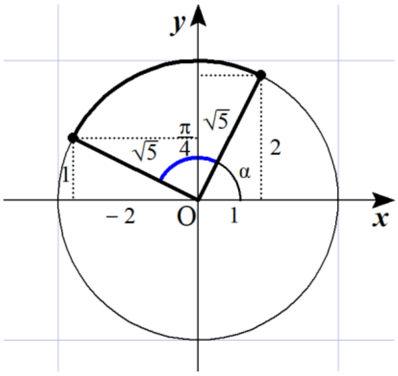
（２）$y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$　（$0\leqq x<2\pi$）とおくと，

$x-\dfrac{\pi}{3}=0$，π　より，$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{4}{3}\pi$

（３）$y\leqq 0$　となるのは，$-\dfrac{\pi}{3}\leqq x-\dfrac{\pi}{3}\leqq 0$，$\pi\leqq x-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{3}\pi$　のときなので，

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{4}{3}\pi\leqq x<2\pi$

１３．



$$y=\sin x\cos x+2\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x+2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 2x+2\cos 2x)+1=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2x+\alpha)+1$$

（ただし，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$））

ここで，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ であるから，$0\leqq 2x\leqq\frac{\pi}{2}$，

$\alpha\leqq 2x+\alpha\leqq\frac{\pi}{2}+\alpha$　であり，$\frac{1}{\sqrt{5}}\leqq\sin(2x+\alpha)\leqq 1$　であるから，

y の最大値は $\frac{\sqrt{5}}{2}+1$　（$2x+\alpha=\frac{\pi}{2}$　より，$x=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ のとき）

最小値は $\frac{3}{2}$　（$2x+\alpha=\frac{\pi}{2}+\alpha$ より，$x=\frac{\pi}{4}$ のとき）