理系数学課外（入試問題）　　月　　日　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　）

3 [2012 山形大]

袋の中に 1 から 8 までの数字が 1 つずつ重複せずに書かれた 8 枚のカードが入っている。袋の中からカードを 1 枚取り出して，もとに戻すという操作を 4 回繰り返す。1 回目，2 回目，3 回目，4 回目に取り出されたカードに書かれた数をそれぞれ $a$，$b$，$c$，$d$ とする。

(1)　$a+b+c+d=6$ となる確率を求めよ。

(2)　積 $abcd$ が奇数となる確率を求めよ。

(3)　$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)=0$ となる確率を求めよ。

(4)　$\frac{1}{ab}+\frac{2}{cd}=\frac{1}{2}$ となる確率を求めよ。

(1) $a+b+c+d=6$ となる組合せは

$(1,1,1,3),(1,1,2,2)$ である

$\therefore \dfrac{\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!2!}}{8^4}=\dfrac{10}{8^4}=\dfrac{5}{2048}$ //

(2) $abcd$ が奇数となるのは

$a,b,c,d$ がすべて奇数であればよい

$\therefore \dfrac{4^4}{8^4}=\dfrac{1}{16}$　1,3,5,7

(3) $a,b,c,d$ のうち，少なくとも1つが1であればよい

$\therefore 1-\dfrac{7^4}{8^4}=1-\dfrac{2401}{4096}=\dfrac{1695}{4096}$ //　1以外

(4) $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{2}{cd}=\dfrac{1}{2}$

$2cd+4ab=abcd$

$abcd-4ab-2cd=0$　積の形に！

$(ab-2)(cd-4)=8$

$1\leqq ab\leqq 64,\ 1\leqq cd\leqq 64$ より

$-1\leqq ab-2\leqq 62,\ -3\leqq cd-4\leqq 60$ であるから

$(ab-2,cd-4)=(1,8),(2,4),(4,2),(8,1)$

$\therefore (ab,cd)=(3,12),(4,8),(6,6),(10,5)$

(i) $(ab,cd)=(3,12)$ のとき

$(a,b)=(1,3),(3,1)$

$(c,d)=(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)$　1と12はダメ！

$\therefore$ カードの取り出し方は　$2\times4=8$（通り）

(ii) $(ab,cd)=(4,8)$ のとき

$(a,b)=(1,4),(2,2),(4,1)$

$(c,d)=(1,8),(2,4),(4,2),(8,1)$

$\therefore$ カードの取り出し方は　$3\times4=12$（通り）

(iii) $(ab,cd)=(6,6)$ のとき

$(a,b)=(1,6),(2,3),(3,2),(6,1)$

$(c,d)=(1,6),(2,3),(3,2),(6,1)$

$\therefore$ カードの取り出し方は　$4\times4=16$（通り）

(iv) $(ab,cd)=(10,5)$ のとき

$(a,b)=(2,5),(5,2)$　1と10はダメ！

$(c,d)=(1,5),(5,1)$

$\therefore$ カードの取り出し方は　$2\times2=4$（通り）

以上(i)〜(iv)より求める確率は

$\dfrac{8+12+16+4}{8^4}=\dfrac{40}{4096}=\dfrac{5}{512}$ //

4 [2001 秋田大]

関数 $f(\theta)=\sin 2\theta+2(\sin\theta+\cos\theta)-1$ を考える．ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする．

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を $t$ の式で表せ．

(2)　$t$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)　$f(\theta)$ の最大値，最小値を求め，そのときの $\theta$ の値を求めよ．

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと

$t^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

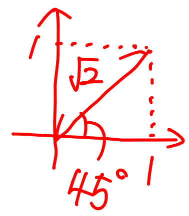
$=\sin2\theta+1$ より

$\sin2\theta=t^2-1$ であるから

$f(\theta)=t^2-1+2t-1=t^2+2t-2$ //

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$

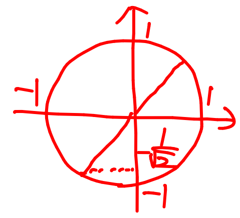
$=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$ であり，



$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より

$45^\circ\leqq\theta+45^\circ\leqq225^\circ$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin(\theta+45^\circ)\leqq1$



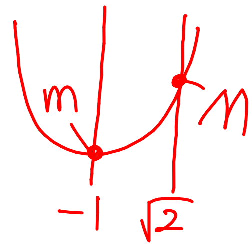
$-1\leqq\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)\leqq\sqrt{2}$

$\therefore -1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ //

(3) (1)より

$f(\theta)=t^2+2t-2$

$=(t+1)^2-3$



$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ より

$f(\theta)$ は

$t=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$

$t=-1$ のとき最小値 $-3$ をとる．

ここで

$t=\sqrt{2}$ のとき　$\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)=\sqrt{2}$

$\sin(\theta+45^\circ)=1$

$\theta+45^\circ=90^\circ$

$\therefore \theta=45^\circ$

$t=-1$ のとき　$\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)=-1$

$\sin(\theta+45^\circ)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta+45^\circ=225^\circ$

$\therefore \theta=180^\circ$

したがって $f(\theta)$ は

$\theta=45^\circ$ のとき 最大値 $2\sqrt{2}$，

$\theta=180^\circ$ のとき 最小値 $-3$ をとる //