

[5] [2011 群馬大]

- (1) 1365 と 1560 の最大公約数を求めよ。
 (2) 2 以上の整数 x, y, z の組で $xyz = 1365$, $3x \leq 2y \leq z$ を満たすものをすべて求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad 1560 &= 1365 \cdot 1 + 195 \\ 1365 &= 195 \cdot 7 \\ \therefore \text{求める最大公約数は } 195 // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 3x &\leq 2y \leq z \cdots \textcircled{1} \text{より} \\ 3x &\leq 2y \therefore \frac{3}{2}x \leq y \cdots \textcircled{2} \\ 3x &\leq z \cdots \textcircled{3} \\ \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ と } x &\geq 2 \text{ より} \\ xyz &\geq x \cdot \frac{3}{2}x \cdot 3x = \frac{9}{2}x^3 \\ xyz &= 1365 \text{ より} \\ 1365 &\geq \frac{9}{2}x^3 \\ x^3 &\leq \frac{1365 \cdot 2}{9} \\ &= \frac{910}{3} = 303.3 \cdots \\ 6^3 &= 216, 7^3 = 343 \text{ より } x \leq 6 \\ \text{したがって、} &2 \leq x \leq 6 \end{aligned}$$

$$(i) \quad x=2 \text{ のとき} \\ yz = \frac{1365}{2}$$

これを満たす y, z の組はない

$$(ii) \quad x=3 \text{ のとき}$$

$$yz = \frac{1365}{3} = 455 = 5 \cdot 7 \cdot 13$$

①より $9 \leq 2y \leq z$ であるから

$$(y, z) = (5, 7 \cdot 13), (7, 5 \cdot 13), (13, 5 \cdot 7) \\ = (5, 91), (7, 65), (13, 35)$$

$$(iii) \quad x=4 \text{ のとき}$$

$$yz = \frac{1365}{4}$$

これを満たす y, z の組はない

$$(iv) \quad x=5 \text{ のとき}$$

$$yz = \frac{1365}{5} = 273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$$

①より $15 \leq 2y \leq z$ であるからこれを満たす y, z の組はない

$$(v) \quad x=6 \text{ のとき}$$

$$yz = \frac{1365}{6} = \frac{455}{2}$$

これを満たす y, z の組はない

以上 (i) ~ (v) より

$$(x, y, z) = (3, 5, 91), (3, 7, 65), (3, 13, 35) //$$

[6] [2011 秋田県立大]

4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $C(0, 0, 1)$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ を計算せよ。
 (2) 2 点 A, B を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。
 (3) 3 点 O, A, B を通る平面を α とし、点 C から平面 α に下ろした垂線と α との交点を点 P とする。点 P の座標を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad \overrightarrow{AB} &= (-1, 0, 1), \overrightarrow{AC} = (-1, -1, 1) \text{ であるから} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (-1, 0, 1) \cdot (-1, -1, 1) = 1 + 1 = 2 // \end{aligned}$$

- (2) 求める球上の点を点 $Q(x, y, z)$ とすると、

 $AQ \perp BQ$ であるから

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$$

$$\text{ここで } \overrightarrow{AQ} = (x-1, y-1, z)$$

$$\overrightarrow{BQ} = (x, y-1, z-1)$$

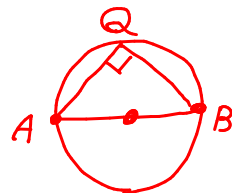
$$\therefore \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$$

$$(x-1, y-1, z) \cdot (x, y-1, z-1) = 0$$

$$x^2 - x + (y-1)^2 + z^2 - z = 0$$

$$(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y-1)^2 + (z-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore (x-\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 + (z-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} //$$



- (3) 点 P は α 上にあるので

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (s, t \text{ は実数}) \text{ とおける。}$$

$$\overrightarrow{OP} = s(1, 1, 0) + t(0, 1, 1)$$

$$= (s, s+t, t) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = (s, s+t, t) - (0, 0, 1) \\ &= (s, s+t, t-1) \end{aligned}$$

 $CP \perp \alpha$ であるから

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0, \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \text{ より}$$

$$(s, s+t, t-1) \cdot (1, 1, 0) = 0$$

$$s + s + t = 0 \therefore 2s + t = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \text{ より}$$

$$(s, s+t, t-1) \cdot (0, 1, 1) = 0$$

$$s + t + t - 1 = 0 \therefore s + 2t = 1 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$s = -\frac{1}{3}, t = \frac{2}{3}$$

したがって

$$P(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) //$$