

[7] [1999 信州大]

さいころを 100 回振るとき、1 の目がちょうど k 回出る確率を p_k とする。

(1) 比 $\frac{p_k}{p_{k-1}}$ の値を k の式で表せ。ただし、 $1 \leq k \leq 100$ とする。

(2) p_k が最大となる k の値を求めよ。

$$(1) P_k = {}^{100}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}$$

$$= \frac{100!}{k!(100-k)!} \cdot \frac{5^{100-k}}{6^{100}}$$

$$\text{よて}$$

$$\frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{100!}{k!(100-k)!} \cdot \frac{5^{100-k}}{6^{100}} \times \frac{(k-1)!(101-k)!}{100!} \cdot \frac{6^{100}}{5^{101-k}}$$

$$= \frac{101-k}{5k} //$$

$$(2) \frac{P_k}{P_{k-1}} > 1 \text{ となる } k \text{ は, (1) より}$$

$$\frac{101-k}{5k} > 1$$

$1 \leq k \leq 100$ より

$$101-k > 5k$$

$$6k < 101$$

$$k < \frac{101}{6} \div 16.8 \dots$$

したがって

$$1 \leq k \leq 16 \text{ では } \frac{P_k}{P_{k-1}} > 1$$

$$17 \leq k \leq 100 \text{ では } \frac{P_k}{P_{k-1}} < 1$$

よて

$$P_1 < P_2 < \dots < P_{15} < P_{16} > P_{17} > \dots$$

とならから、

$$P_k \text{ は } k=16 \text{ のとき最大となる。} //$$

[8] [2013 山形大]

2 つの放物線 $C_1: y = -2x^2$, $C_2: y = -x^2 + 2x - 35$ を考える。

(1) 放物線 C_1 と放物線 C_2 の 2 つの交点の座標を求めよ。

(2) a を実数とする。点 $(a, -a^2 + 2a - 35)$ における放物線 C_2 の接線の方程式を求めよ。

(3) 放物線 C_1 と放物線 C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

(4) (1) で求めた交点の x 座標を b, c ($b < c$) とする。また、 $b \leq a \leq c$ とする。このとき、放物線 C_1 と放物線 C_2 および (2) で求めた接線で囲まれた図形の面積が $\frac{352}{3}$ となるような a の値を求めよ。

$$(1) -2x^2 = -x^2 + 2x - 35 \quad \text{よて 2つの交点は,}$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0 \quad (-7, -98)$$

$$(x+7)(x-5) = 0 \quad (5, -50) //$$

$$x = -7, 5$$

$$(2) C_2 \text{ において } y' = -2x + 2$$

求める接線の方程式は、

$$y = (-2a+2)(x-a) + (-a^2+2a-35)$$

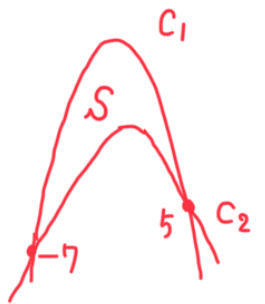
$$y = (-2a+2)x + a^2 - 35 //$$

(3) 求める面積を S とすると、

$$S = \int_{-7}^5 \{-2x^2 - (-x^2 + 2x - 35)\} dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 35x \right]_{-7}^5$$

$$= \dots = 288 // \quad (\text{別}) S = \frac{1}{6} |5 - (-7)|^3 = 288$$



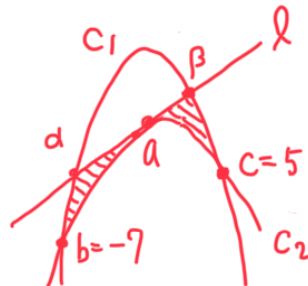
(4) (2) で求めた接線を l 、

C_1 と l の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$)

C_1 と l で囲まれた図形の面積を T とする。

$$T = \int_{\alpha}^{\beta} \{-2x^2 - (-2a+2)x + a^2 - 35\} dx$$

$$= \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3} (\beta - \alpha)^3$$



$$S - T = \frac{352}{3} \text{ であるから,}$$

$$288 - \frac{1}{3} (\beta - \alpha)^3 = \frac{352}{3}$$

$$(\beta - \alpha)^3 = 512 = 2^9$$

$$\beta - \alpha = 2^3 = 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

α, β は $-2x^2 = (-2a+2)x + a^2 - 35$ の 2 解であるから、

$2x^2 + (-2a+2)x + a^2 - 35 = 0$ において解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a - 1 \\ \alpha\beta = \frac{a^2 - 35}{2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$(\beta - \alpha)^2 = 64$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 64$$

$$(a-1)^2 - 2(a^2 - 35) = 64$$

$$a^2 - 2a + 1 - 2a^2 + 70 - 64 = 0$$

$$a^2 + 2a - 9 = 0$$

$$a = -1 \pm 2\sqrt{2} //$$

($-7 \leq a \leq 5$ を満たす)