9 [2007 新潟大]

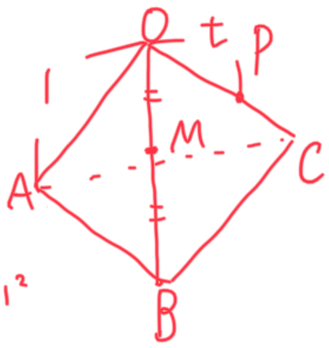
1辺の長さが1の正四面体OABCがある。辺OBの中点をMとし，点Pは辺OC上を動くものとする。線分OPの長さを t とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　AP^2，PM^2 を t で表せ。

(2)　$\angle \mathrm{PAM}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を t で表せ。

(3)　△AMPの面積を t で表せ。

(4)　△AMPの面積の最小値を求めよ。



(1) $|\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|^2 = |t\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2$

$= t^2|\overrightarrow{OC}|^2 - 2t\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OA}|^2$

$= t^2\cdot 1^2 - 2t\,|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos 60^\circ + 1^2$

$= t^2 - t + 1$ //

$|\overrightarrow{PM}|^2 = |\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}|^2 = |\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OC}|^2$

$= \frac{1}{4}|\overrightarrow{OB}|^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot t\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + t^2|\overrightarrow{OC}|^2$

$= \frac{1}{4}\cdot 1^2 - t|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos 60^\circ + t^2\cdot 1^2$

$= t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ //

(2)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AM}|}$$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})$

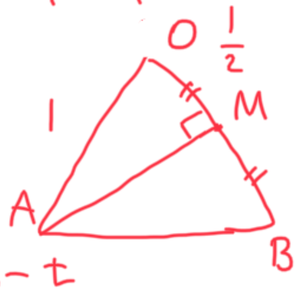
$= (t\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$= \frac{1}{2}t\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} - t\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2$

$= \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}t$

$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{t^2-t+1}$　((1)より)

$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



よって

$$\cos\theta = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}t}{\sqrt{t^2-t+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3-t}{2\sqrt{3(t^2-t+1)}}$$ //

(3)　△AMPの面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2|\overrightarrow{AM}|^2 - (\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AM})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(t^2-t+1)\cdot\frac{3}{4} - (\frac{3}{4}-\frac{1}{4}t)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{16}(11t^2-6t+3)} = \frac{1}{8}\sqrt{11t^2-6t+3}$$ //

(4)　点PはOC上を動くから，$0 \leqq t \leqq 1$ である。

$f(t) = 11t^2 - 6t + 3$ とおくと，

$f'(t) = 22t - 6$

$= 2(11t-3)$

$f'(t) = 0$ となる $t = \frac{3}{11}$

t	$0 \cdots \frac{3}{11} \cdots 1$
$f'(t)$	↘ 0 ↗
$f(t)$	極小かつ最小

$f(t)$ が最小のとき，S も最小となるから，

S は $t = \frac{3}{11}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{66}}{44}$ をとる。//

10 [2013 宇都宮大]

数列 $\{a_n\}$ は $a_n>0$ かつ $a_1=3$ であるとする。初項から第 n 項までの和 S_n について

$S_{n+1}+S_n=\frac{1}{3}(S_{n+1}-S_n)^2$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　S_2 と S_3 を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。

(3)　数列 $\{S_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_1 = a_1 = 3$

$S_2 + S_1 = \frac{1}{3}(S_2 - S_1)^2$ に $S_1 = 3$ を代入して

$S_2 + 3 = \frac{1}{3}(S_2-3)^2$

$= \frac{1}{3}S_2^2 - 2S_2 + 3$

$\frac{1}{3}S_2^2 - 3S_2 = 0$

$S_2(S_2 - 9) = 0$

$S_1 = 3$，$a_n > 0$ であるから $S_2 > 3$

よって $S_2 = 9$ //

$S_3 + S_2 = \frac{1}{3}(S_3 - S_2)^2$ に $S_2 = 9$ を代入して

$S_3 + 9 = \frac{1}{3}(S_3 - 9)^2$

$= \frac{1}{3}S_3^2 - 6S_3 + 27$

$S_3^2 - 21S_3 + 54 = 0$

$(S_3-3)(S_3-18) = 0$

$S_2 = 9$，$a_n>0$ であるから $S_3 > 9$

よって $S_3 = 18$ //

(2)　$S_{n+1} + S_n = \frac{1}{3}(S_{n+1} - S_n)^2 = \frac{1}{3}a_{n+1}^2$ … ①

$n \geqq 2$ のとき

$S_n + S_{n-1} = \frac{1}{3}a_n^2$ … ②

①−②より

$(S_{n+1} - S_n) + (S_n - S_{n-1}) = \frac{1}{3}a_{n+1}^2 - \frac{1}{3}a_n^2$

$a_{n+1} + a_n = \frac{1}{3}(a_{n+1}^2 - a_n^2)$

$= \frac{1}{3}(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)$

$a_n > 0$ より $a_{n+1} + a_n > 0$ であるから

$1 = \frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)$

$a_{n+1} - a_n = 3$ … ③

ここで $a_2 - a_1 = (S_2 - a_1) - a_1 = (9-3) - 3 = 3$

であるから ③は $n=1$ のときも成り立つ。

よって 求める漸化式は，$a_{n+1} - a_n = 3$ //

(3)　数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 3$，公差3の等差数列であるから，

$a_n = 3 + (n-1)\cdot 3 = 3n$ である。

このとき

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$= \sum_{k=1}^{n}(3k)$

$= 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{3}{2}n(n+1)$

よって 数列 $\{S_n\}$ の一般項は，

$S_n = \frac{3}{2}n(n+1)$ //