数学Ⅱ　第６章　微分法と積分法

第１節　微分係数と導関数

１限目	Ｐ１６６～Ｐ１６９	平均変化率・極限値・微分係数
２限目	Ｐ１７０～Ｐ１７３	導関数・関数の微分
３限目	Ｐ１７４～Ｐ１７５	いろいろな関数の導関数
４限目	Ｐ１７６～Ｐ１７７	接線の方程式
５限目	Ｐ１７８	補充問題

第２節　関数の値の変化

１限目	Ｐ１７９～Ｐ１８１	関数の極大・極小（１）
２限目	Ｐ１８２～Ｐ１８４	関数の極大・極小（２）
３限目	Ｐ１８５	関数の最大・最小（１）
４限目	Ｐ１８６	関数の最大・最小（２）
５限目	Ｐ１８７～Ｐ１８８	方程式・不等式への応用
６限目	Ｐ１８９	補充問題

第３節　積分法

１限目	Ｐ１９０～Ｐ１９３	不定積分
２限目	Ｐ１９４～Ｐ１９６	定積分
３限目	Ｐ１９７～Ｐ１９８	定積分と微分法
４限目	Ｐ１９９～Ｐ２０２	定積分と面積
５限目	Ｐ２０３～Ｐ２０４	２つの曲線の間の面積
６限目	Ｐ２０５～Ｐ２０６	放物線と x 軸で囲まれた部分の面積
７限目	Ｐ２０７	補充問題
８限目	Ｐ２０８	章末問題Ａ
９限目	Ｐ２０９	章末問題Ｂ

第１節　微分係数と導関数　練習問題 解答

練習１

（１） $f(x)=2x$　とおくと，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2b-2a}{b-a}=\frac{2(b-a)}{b-a}=2$$

（２） $f(x)=-x^2$　とおくと，

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}=\frac{-(2+h)^2-(-2^2)}{h}=\frac{-(4+4h+h^2)+4}{h}=\frac{-(4h+h^2)}{h}=-(4+h)$$

練習２

（１） $\lim_{h\to 0}(6+h)=6$　　（２） $\lim_{h\to 0}(12-6h+h^2)=12$

練習３

（１） $f(x)=x^2$　とおくと，

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

（２） $f(x)=3x^2$　とおくと，

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(h-2)^2-3(-2)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\{(h-2)^2-(-2)^2\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(h^2-4h)}{h}=\lim_{h\to 0}3(h-4)=-12$$

練習４　$f(x)=x^2$　とおくと，$f'(x)=2x$　より，

（１）点(１，１)における接線の傾きは，$f'(1)=2$

（２）点(－２，４)における接線の傾きは，$f'(-2)=-4$

練習５　$f(x)=x^2$　のとき，$f'(x)=2x$　より，

（１） $f'(4)=8$

（２） $f'(0)=0$

（３） $f'(-2)=-4$

練習６

（１） $f(x)=3x$　とおくと，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-3x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=3$$

（２） $f(x)=-x^2$　とおくと，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)^2+x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{h}\ \lim_{h\to 0}(-2x-h)=-2x$$

（３） $f(x)=4$　とおくと，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4-4}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

練習７

（１） $f(x)=x^4$　のとき，$f'(x)=4x^3$

（２） $f(x)=x^5$　のとき，$f'(x)=5x^4$

練習８

（１） $y=4x^2+3x-4$　のとき，$y'=8x+3$

（２） $y=2x^2-5x+1$　のとき，$y'=4x-5$

（３） $y=-3x^2+x-2$　のとき，$y'=-6x+1$

（４） $y=-x^2-x+3$　のとき，$y'=-2x-1$

（５） $y=x^3+2x^2-3x$　のとき，$y'=3x^2+4x-3$

（６） $y=-2x^3-x^2+6x-2$　のとき，$y'=-6x^2-2x+6$

（７） $y=\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x$　のとき，$y'=4x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

（８） $y=-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$　のとき，$y'=-x^2-\frac{3}{2}$

練習９

（１） $y=(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$　より，$y'=2x+5$

（２） $y=3(x-2)^2=3(x^2-4x+4)=3x^2-12x+12$　より，$y'=6x-12$

（３） $y=x(x+2)(x-2)=x(x^2-4)=x^3-4x$　より，$y'=3x^2-4$

（４） $y=2x(x+1)(x-3)=2x(x^2-2x-3)=2x^3-4x^2-6x$　より，$y'=6x^2-8x-6$

練習１０　$f(x)=x^3-3x^2+3$　とおくと，$f'(x)=3x^2-6x$　より，

（１） $f'(2)=0$

（２） $f'(0)=0$

（３） $f'(-2)=24$

練習１１

（１） $s=3t^2-4t+2$　のとき，$s'=6t-4$

（２） $f(t)=at^3+bt^2$　のとき，$f'(t)=3at^2+2bt$

練習１２

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，$S=4\pi r^2$　のとき，$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2$，$\frac{dS}{dt}=8\pi r$

練習１３　関数 $y=2x^2-4x-3$ のグラフ上の点Ａ(２，３)における接線

（１）点Ａにおける接線の傾き

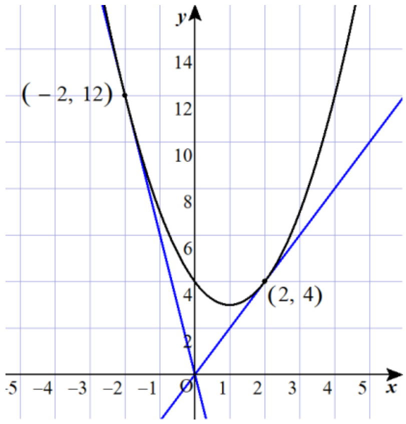
$f(x)=2x^2-4x-3$ とおくと，$f'(x)=4x-4$ より，

$m=f'(2)=4$

（2）点Aにおける接線の方程式

$y-3=4(x-2)$ より，$y=4x-5$

練習14



$f(x)=x^2-2x+4$ とおくと，$f'(x)=2x-2$ より，

曲線上の点$(a,\ a^2-2a+4)$における接線の方程式は，

$y-(a^2-2a+4)=(2a-2)(x-a)$

すなわち，$y=(2a-2)x-a^2+4$

この直線が原点O(0，0)を通るから，

$-a^2+4=0$ より，$a=\pm 2$

・$a=-2$ のとき，接点は$(-2,\ 12)$，接線は $y=-6x$

・$a=\ \ 2$ のとき，接点は$(2,\ 4)$，接線は $y=2x$

第1節　微分係数と導関数　補充問題 解答

1.

（1）$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(-2+h)=-2$

（2）$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{2(a+h)^2-2a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(2ah+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}2(2a+h)=4a$

2.

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$ であり，

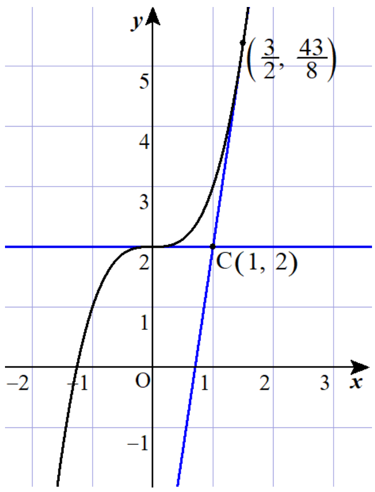
$f(2)=4a+2b+c=-2$ ……… ①

$f'(0)=b=3$ ……………………… ②

$f'(1)=2a+b=-1$ …………… ③ である。

①〜③ より，$a=-2$，$b=3$，$c=0$ 　よって，$f(x)=-2x^2+3x$

3.



$f(x)=x^3+2$ とおくと，$f'(x)=3x^2$ より，

曲線上の点$(a,\ a^3+2)$における接線の方程式は，

$y-(a^3+2)=3a^2(x-a)$

すなわち，$y=3a^2x-2a^3+2$

この直線が点C(1，2)を通るから，

$3a^2-2a^3+2=2$ より，

$2a^3-3a^2=0$ よって，$a=0,\ \dfrac{3}{2}$

・$a=0$ のとき，接点は$(0,\ 2)$，接線は $y=2$

・$a=\dfrac{3}{2}$ のとき，接点は$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{43}{8}\right)$，接線は $y=\dfrac{27}{4}x-\dfrac{19}{4}$

第２節　関数の値の変化　練習問題 解答

練習１５

（１）　$f(x)=x^3-6x^2+5$　のとき，

$f'(x)=3x^2-12x=3(x^2-4x)$

$=3x(x-4)$

よって，関数 $f(x)$ の増減は右のとおり。

x	…	0	…	4	…
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	5	↘	－２７	↗

（２）　$f(x)=-2x^3-3x^2+12x+1$　のとき，

$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x^2+x-2)$

$=-6(x+2)(x-1)$

よって，関数 $f(x)$ の増減は右のとおり。

x	…	－２	…	1	…
$f'(x)$	－	0	＋	0	－
$f(x)$	↘	－１９	↗	8	↘

（３）　$f(x)=-x^3$　のとき，

$f'(x)=-3x^2$

よって，関数 $f(x)$ の増減は右のとおり。

x	…	0	…
$f'(x)$	－	0	－
$f(x)$	↘	0	↘

（４）　$f(x)=x^3+2x$　のとき，

$f'(x)=3x^2+2$

よって，関数 $f(x)$ の増減は右のとおり。

x	…
$f'(x)$	＋
$f(x)$	↗

練習１６

（１）　$y=x^3-6x^2+9x$　のとき，

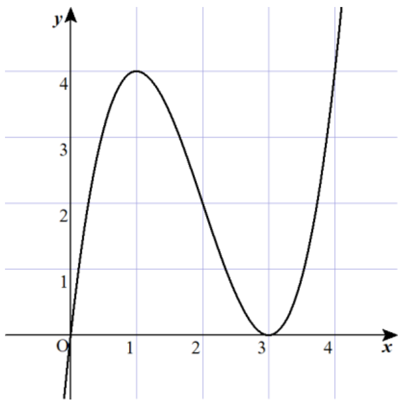
$y'=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$

よって，y の増減は下のとおり。

x	…	1	…	3	…
y'	＋	0	－	0	＋
y	↗	4	↘	0	↗

極大値　4（$x=1$　のとき）

極小値　0（$x=3$　のとき）



（２）　$y=-x^3+3x^2+1$　のとき，

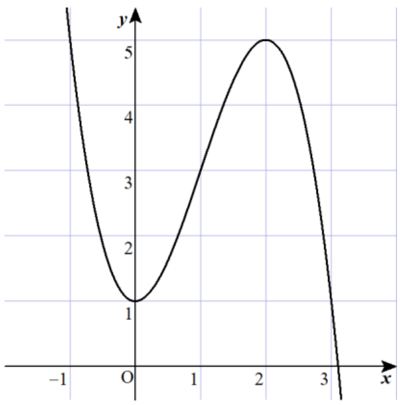
$y'=-3x^2+6x=-3(x^2-2x)=-3x(x-2)$

よって，y の増減は下のとおり。

x	…	0	…	2	…
y'	－	0	＋	0	－
y	↘	1	↗	5	↘

極大値　5（$x=2$　のとき）

極小値　1（$x=0$　のとき）



（３） $y=2x^3+6x^2$　のとき，

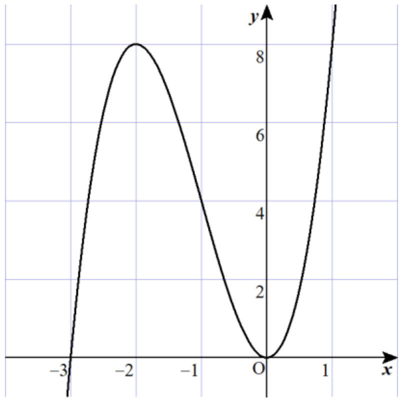
$y'=6x^2+12x=6(x^2+2x)=6x(x+2)$

よって，y の増減は下のとおり。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	8	↘	0	↗

極大値　８（$x=-2$　のとき）

極小値　０（$x=0$　のとき）



（４） $y=-x^3+x^2$　のとき，

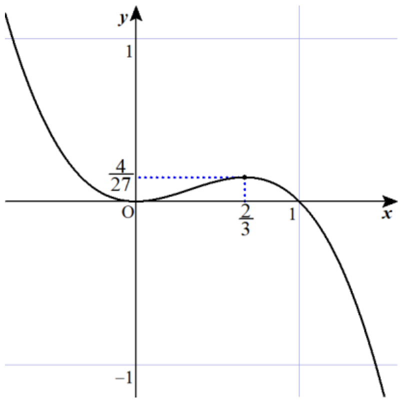
$y'=-3x^2+2x=-3x\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$

よって，y の増減は下のとおり。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	$\dfrac{4}{27}$	↘

極大値　$\dfrac{4}{27}$　（$x=\dfrac{2}{3}$　のとき）

極小値　０　（$x=0$　のとき）



練習１７

$f(x)=x^3+ax^2-9x+b$　とおくと，　$f'(x)=3x^2+2ax-9$　であり，

$x=-1$　で極大値８　をとるので，

$f'(-1)=-2a-6=0$　…………… ①

$f(-1)=a+b+8=8$　…………… ②

①，② より，$a=-3$，$b=3$　よって，　$f(x)=x^3-3x^2-9x+3$

このとき，　$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8	↘	-24	↗

したがって，上の増減表より，極小値　－２４（$x=3$　のとき）

研究　練習１

（１） $y=x^4-x+3$　のとき，　$y'=4x^3-1$

（２） $y=-2x^4-x^3+3x-2$　のとき，　$y'=-8x^3-3x^2+3$

研究 練習２

（１） $y=3x^4+4x^3-12x^2+5$ のとき，

$y'=12x^3+12x^2-24x=12x(x^2+x-2)$

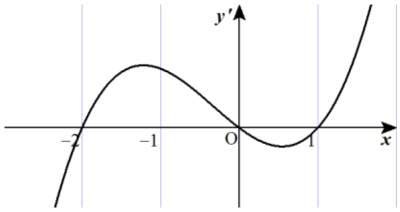
$=12x(x+2)(x-1)$

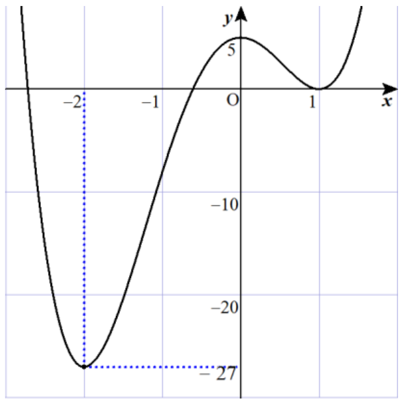
よって， y の増減は下のとおり。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	-27	↗	5	↘	0	↗

極大値 ５（$x=0$ のとき）

極小値 －２７（$x=-2$ のとき），０（$x=1$ のとき）





（２） $y=x^4-8x^2+2$ のとき，

$y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)$

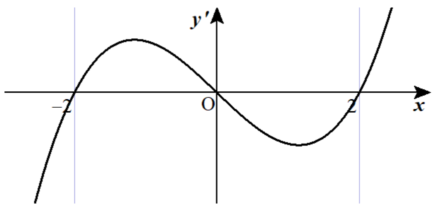
$=4x(x+2)(x-2)$

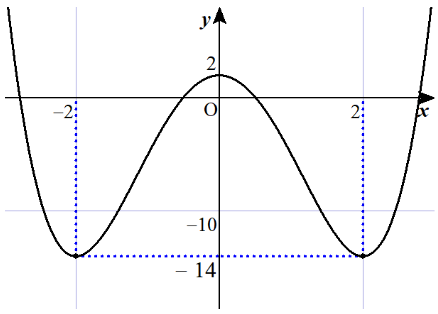
よって， y の増減は下のとおり。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	-14	↗	2	↘	-14	↗

極大値 ２（$x=0$ のとき）

極小値 －１４（$x=-2$，２ のとき）





練習１８

（１） $y=x^3+3x^2$ （$-3\leqq x\leqq 2$）のとき，

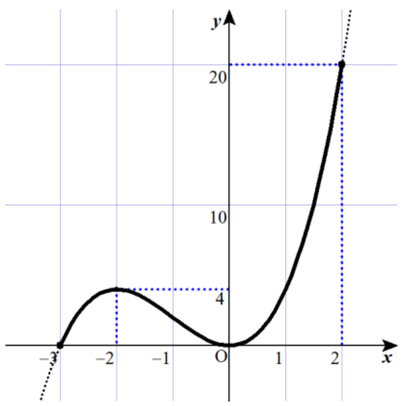
$y'=3x^2+6x=3x(x+2)$

よって， y の増減は下のとおり。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	4	↘	0	↗	20

最大値 ２０（$x=2$ のとき）

最小値 ０（$x=-3$，０ のとき）



（２） $y=-x^3+3x+1$ （－２≦x≦２）のとき，

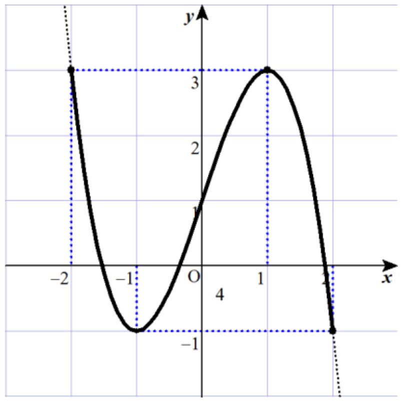
$y'=-3x^2+3=-3(x^2-1)=-3(x+1)(x-1)$

よって，y の増減は下のとおり。

x	－２	…	－１	…	１	…	２
y'		－	０	＋	０	－	
y	３	↘	－１	↗	３	↘	－１

最大値　３（x＝－２，１ のとき）

最小値 －１（x＝－１，２ のとき）



（３） $y=x^3-6x^2-15x$ （－２≦x≦２）のとき，

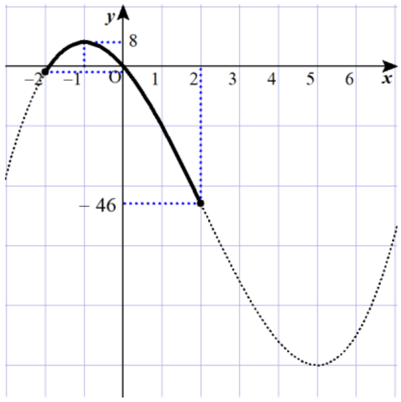
$y'=3x^2-12x-15=3(x^2-4x-5)=3(x+1)(x-5)$

よって，y の増減は下のとおり。

x	－２	…	－１	…	２
y'		＋	０	－	
y	－２	↗	８	↘	－46

最大値　８（x＝－１ のとき）

最小値 －４６（x＝２ のとき）



練習１９

切り取る正方形の１辺の長さを x ｃｍ（０＜x＜５）とおくと，

箱の容積 y ｃｍ^3 は，

$y=x(10-2x)(16-2x)=4x(x-5)(x-8)$

$=4(x^3-13x^2+40x)$　より，

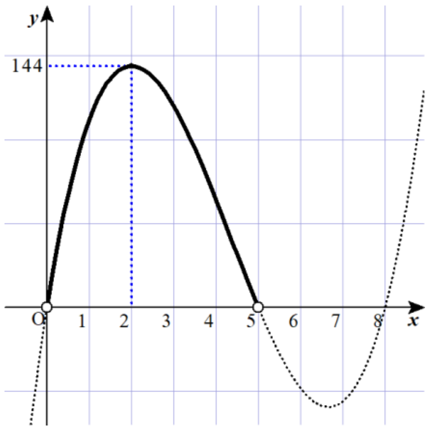
$y'=4(3x^2-26x+40)=4(3x-20)(x-2)$

よって，y の増減は下のとおり。

x	０	…	２	…	５
y'		＋	０	－	
y	０	↗	144	↘	０

増減表より，x＝２ｃｍ のとき，容積 y は

最大値 １４４ｃｍ^3 をとる。



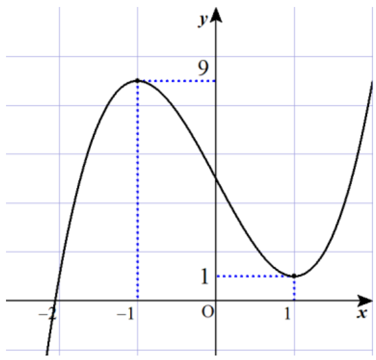
練習２０

（１） $y=2x^3-6x+5$　とおくと，

$y'=6x^2-6=6(x^2-1)=6(x+1)(x-1)$

よって，y の増減は下のとおり。

x	…	－１	…	１	…
y'	＋	０	－	０	＋
y	↗	９	↘	１	↗

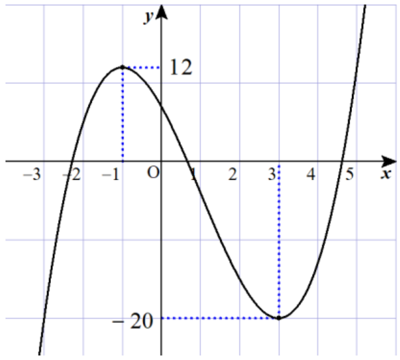


増減表とグラフより，方程式 $2x^3-6x+5=0$ の
実数解の個数は１個

（２） $y=x^3-3x^2-9x+7$ とおくと，

$y'=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

よって， y の増減は下のとおり。



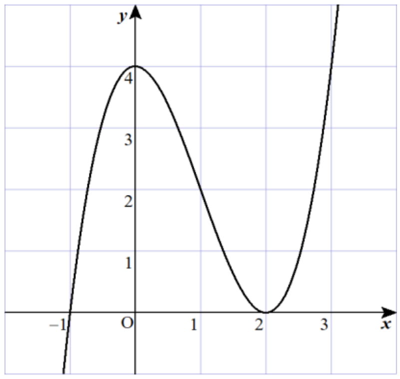
x	$\cdots$	－１	$\cdots$	３	$\cdots$
y'	＋	０	－	０	＋
y	↗	１２	↘	－２０	↗

増減表とグラフより，方程式 $x^3-3x^2-9x+7=0$ の
実数解の個数は３個

（３） $y=x^3-3x^2+4$ とおくと，

$y'=3x^2-6x=3(x^2-2x)=3x(x-2)$

よって， y の増減は下のとおり。



x	$\cdots$	０	$\cdots$	２	$\cdots$
y'	＋	０	－	０	＋
y	↗	４	↘	０	↗

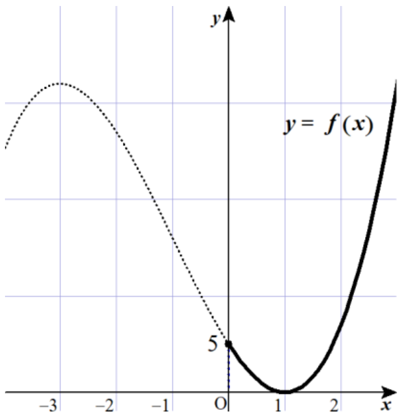
増減表とグラフより，方程式 $x^3-3x^2+4=0$ の
実数解の個数は２個

練習２１

$x\geqq 0$ とする。

$f(x)=(x^3+3x^2+5)-9x=x^3+3x^2-9x+5$ とおくと，

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)=3(x+3)(x-1)$



x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		－	0	＋
$f(x)$	5	↘	0	↗

したがって，上の増減表とグラフより，

$x\geqq 0$ のとき， $f(x)=(x^3+3x^2+5)-9x\geqq 0$

よって， $x\geqq 0$ のとき， $x^3+3x^2+5\geqq 9x$

第２節　関数の値の変化　補充問題 解答

４．

（１） $y=x^3-6x+2$ のとき，

$y'=3x^2-6=3(x^2-2)$

$\quad=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

よって， y の増減は右のとおり。

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	＋	0	－	0	＋
y	↗	$2+4\sqrt{2}$	↘	$2-4\sqrt{2}$	↗

極大値　$2+4\sqrt{2}$　（$x=-\sqrt{2}$　のとき）

極小値　$2-4\sqrt{2}$　（$x=\sqrt{2}$　のとき）

（２）$y=(1-x)^3=1-3x+3x^2-x^3$　のとき，

$y'=-3x^2+6x-3=-3(x^2-2x+1)$

$=-3(x-1)^2$

よって，y の増減は右のとおり。

極値はない。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	－	0	－
y	↘	0	↘

５．

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$　とおくと，$f'(x)=3x^2+2ax+b$　であり，

$x=-1$　で極大値を，$x=3$　で極小値をとるので，

$f'(-1)=-2a+b+3=0$　より，$2a-b=3$　…………… ①

$f'(3)=6a+b+27=0$　より，$6a+b=-27$　………… ②

①，②　より，$a=-3$，$b=-9$　よって，$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

このとき，$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	6	↘	-26	↗

したがって，上の増減表より，極大値６（$x=-1$　のとき），極小値　-26（$x=3$　のとき）

６．

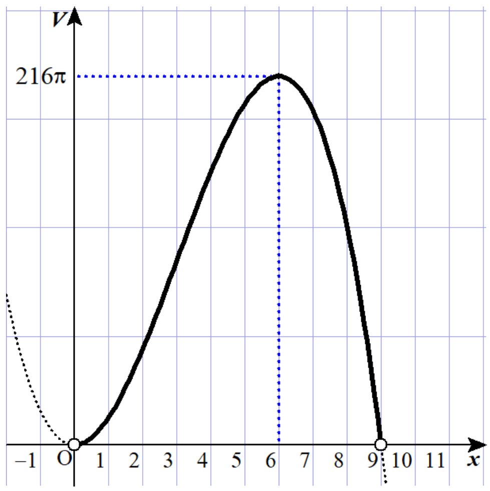
（１）底面の半径を x cmとすると，高さは　$18-2x$ cmであるから，体積V cm^3 は，

$\mathrm{V}=\pi x^2(18-2x)=-2\pi(x^3-9x^2)$　（$0<x<9$）

（２）（１）より，

$$\frac{dV}{dx}=-2\pi(3x^2-18x)=-6\pi x(x-6)$$

x	0	$\cdots$	6	$\cdots$	9
$\dfrac{dV}{dx}$		＋	0	－	
V	0	↗	216π	↘	0



増減表より，体積の最大値は　216π cm^3 であり，

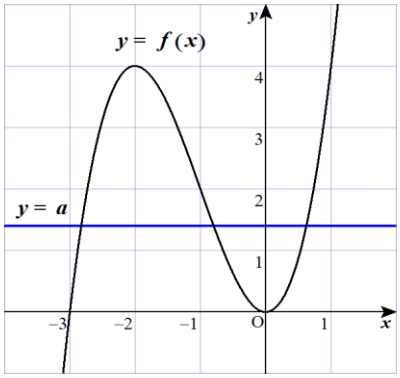
このとき，底面の半径 $x=6$ cm　より，

円柱の高さ　$18-2x=6$ cm

7.

$f(x)=x^3+3x^2$ とおくと， $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$ であり，

関数 $f(x)$ の増減表は下のとおり。



x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

方程式 $x^3+3x^2=a$ の解の個数は，曲線 $y=f(x)$ と

直線 $y=a$ の共有点の個数であるから，

増減表とグラフより，方程式 $x^3+3x^2=a$ が異なる３個

の解をもつとき， $0<a<4$

第３節　積分法　練習問題 解答

練習２２

$3x^2$ の原始関数は，② x^3 と，④ x^3-4

練習２３　省略

練習２４

（１） $\int 6x^2dx=6\cdot\frac{1}{3}x^3+C=2x^3+C$

（２） $\int (x^2+x-1)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C$

（３） $\int (3x^2-2x+5)dx=3\cdot\frac{1}{3}x^3-2\cdot\frac{1}{2}x^2+5x+C=x^3-x^2+5x+C$

（４） $\int (-2x^2-x+7)dx=-2\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+7x+C=-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+7x+C$

練習２５

（１） $\int (2t^2-3t-4)dt=2\cdot\frac{1}{3}t^3-3\cdot\frac{1}{2}t^2-4t+C=\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2-4t+C$

（２） $\int (-6u^2+9u-3)du=-6\cdot\frac{1}{3}u^3+9\cdot\frac{1}{2}u^2-3u+C=-2u^3+\frac{9}{2}u^2-3u+C$

練習２６

［１］ $F'(t)=2(t-1)$　　　［２］ $F(3)=1$

［１］より， $F(t)=\int (2t-2)dt=t^2-2t+C$

［２］より， $F(3)=C+3=1$　　よって，$C=-2$ であるから，

$F(t)=t^2-2t-2$

練習２７

（１） $\displaystyle\int_1^3 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3=\frac{1}{2}(3^2-1^2)=4$

（２） $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2=\frac{1}{3}\{2^3-(-1)^3\}=3$

（３） $\displaystyle\int_3^0 2\,dx=\left[2x\right]_3^0=2(0-3)=-6$

練習２８

（１） $\displaystyle\int_0^2(x^2+4x-5)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x^2-5x\right]_0^2=\frac{8}{3}+8-10=\frac{2}{3}$

（２） $\displaystyle\int_2^3(x-2)(x-3)\,dx=\int_2^3(x^2-5x+6)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x\right]_2^3$

$\displaystyle=\frac{1}{3}(3^3-2^3)-\frac{5}{2}(3^2-2^2)+6(3-2)=\frac{19}{3}-\frac{25}{2}+6=-\frac{1}{6}$

練習２９

（１） $\displaystyle\int_{-1}^2(-3t^2+t+1)\,dt=\left[-t^3+\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^2=-\{2^3-(-1)^3\}+\frac{1}{2}\{2^2-(-1)^2\}+\{2-(-1)\}$

$\displaystyle=-9+\frac{3}{2}+3=-\frac{9}{2}$

（２） $\displaystyle\int_{-1}^1 2(t+3)(t-2)\,dt=2\int_{-1}^1(t^2+t-6)\,dt=2\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-6t\right]_{-1}^1$

$\displaystyle=\frac{2}{3}\{1^3-(-1)^3\}+\{1^2-(-1)^2\}-12\{1-(-1)\}=\frac{4}{3}-24=-\frac{68}{3}$

練習３０

$\displaystyle\int_{-1}^1(x+2)^2dx-\int_{-1}^1(x-2)^2dx=\int_{-1}^1\{(x+2)^2-(x-2)^2\}dx=\int_{-1}^1 8x\,dx=\left[4x^2\right]_{-1}^1=0$

練習３１

（１） $\displaystyle\int_1^2(3x^2-4x)\,dx+\int_2^3(3x^2-4x)\,dx=\int_1^3(3x^2-4x)\,dx=\left[x^3-2x^2\right]_1^3$

$=(3^3-1^3)-2(3^2-1^2)=26-16=10$

（２） $\displaystyle\int_0^3(x^2+2x)\,dx-\int_1^3(x^2+2x)\,dx=\int_0^1(x^2+2x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

練習３２

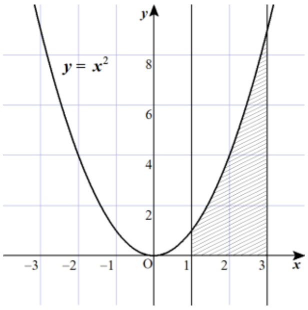
$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x(3t^2-2t-1)\,dt=3x^2-2x-1$

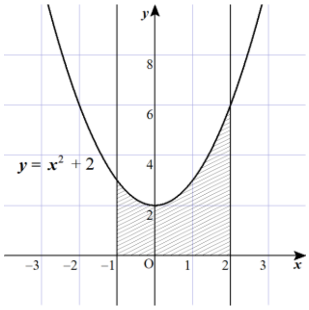
練習３３

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=x^2-x-2$ の両辺を x で微分すると， $\displaystyle f(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=2x-1$

$\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - x - 2$　に $x = a$ を代入して，$a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2) = 0$　より，$a = -1,\ 2$

練習３４



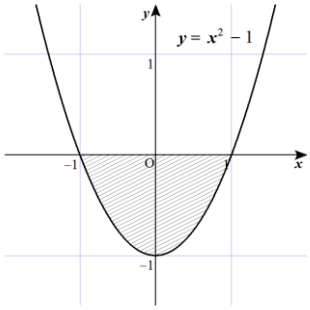


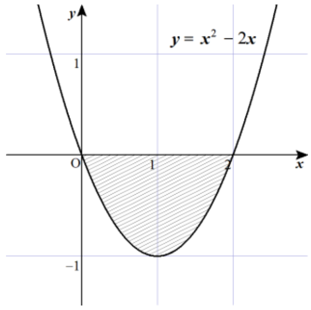
（１）$\mathrm{S} = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 1^3) = \frac{26}{3}$

（２）$\mathrm{S} = \int_{-1}^2 (x^2+2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^2$

$= \frac{1}{3}\{2^3 - (-1)^3\} + 2\{2 - (-1)\} = 3 + 6 = 9$

練習３５





（１）$x^2 - 1 = 0$ を解くと，$x = \pm 1$　より，

$\mathrm{S} = -\int_{-1}^1 (x^2 - 1)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^1$

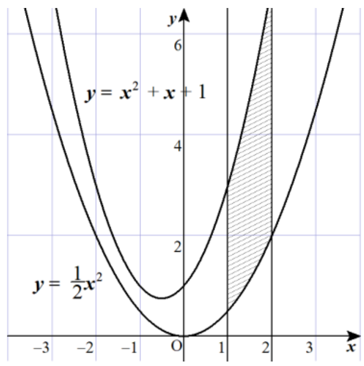
$= -\frac{1}{3}\{1^3 - (-1)^3\} + \{1 - (-1)\} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

（２）$x^2 - 2x = 0$ を解くと，$x = 0,\ 2$　より，

$\mathrm{S} = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2$

$= -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$

練習３６

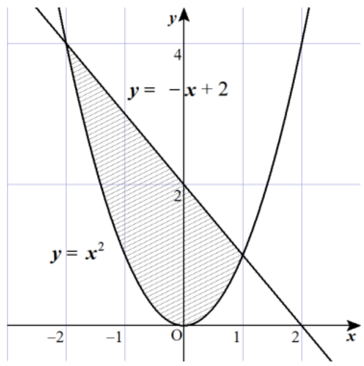


$\mathrm{S} = \int_1^2 \left\{(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2}x^2\right\} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) dx$

$= \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = \frac{1}{6}(2^3 - 1^3) + \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) + (2 - 1)$

$= \frac{7}{6} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{11}{3}$

練習３７



（１）放物線　$y = x^2$，直線　$y = -x + 2$

方程式　$x^2 = -x + 2$　を解くと，

$x^2 + x - 2 = 0$

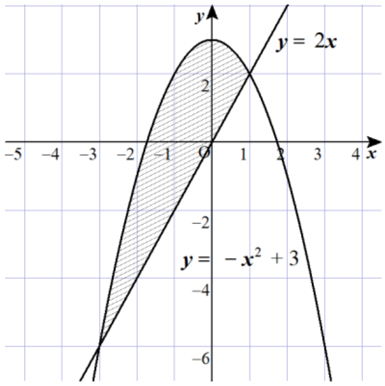
$(x+2)(x-1) = 0$　より，$x = -2,\ 1$

$\mathrm{S} = \int_{-2}^1 \{(-x+2) - x^2\}\,dx = -\int_{-2}^1 (x^2 + x - 2)\,dx$

$= -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^1$

$= -\frac{1}{3}\{1^3 - (-2)^3\} - \frac{1}{2}\{1^2 - (-2)^2\} + 2\{1 - (-2)\} = -3 + \frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}$

（2）放物線　$y=-x^2+3$，直線　$y=2x$



方程式　$-x^2+3=2x$　を解くと，

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$　より，$x=-3,\ 1$

$$S=\int_{-3}^{1}\{(-x^2+3)-2x\}\,dx=-\int_{-3}^{1}(x^2+2x-3)\,dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{-3}^{1}$$

$$=-\frac{1}{3}\{1^3-(-3)^3\}-\{1^2-(-3)^2\}+3\{1-(-3)\}=-\frac{28}{3}+8+12=\frac{32}{3}$$

研究 練習１

（1）$\displaystyle\int(4x^3+6x^2+3)\,dx=x^4+2x^3+3x+C$

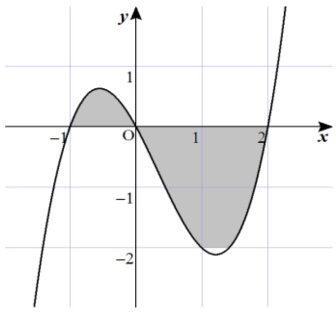
（2）$\displaystyle\int_{-1}^{2}(-x^3+2x)\,dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^2\right]_{-1}^{2}=-\frac{1}{4}\{2^4-(-1)^4\}+\{2^2-(-1)^2\}=-\frac{15}{4}+3=-\frac{3}{4}$

研究 練習２

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx-\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)-\left(4-\frac{8}{3}-4\right)=\frac{37}{12}$$



第３節　積分法　補充問題 解答

８．

（1）$\displaystyle\int_{-1}^{1}(3x-1)^2dx=\int_{-1}^{1}(9x^2-6x+1)\,dx=\int_{-1}^{1}(9x^2+1)\,dx=2\int_{0}^{1}(9x^2+1)\,dx=2\Big[3x^3+x\Big]_{0}^{1}$

$=2(3+1)=8$

（2）$\displaystyle\int_{-1}^{2}(t^2-5t+4)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_{-1}^{2}=\frac{1}{3}\{2^3-(-1)^3\}-\frac{5}{2}\{2^2-(-1)^2\}+4\{2-(-1)\}$

$\displaystyle=3-\frac{15}{2}+12=\frac{15}{2}$

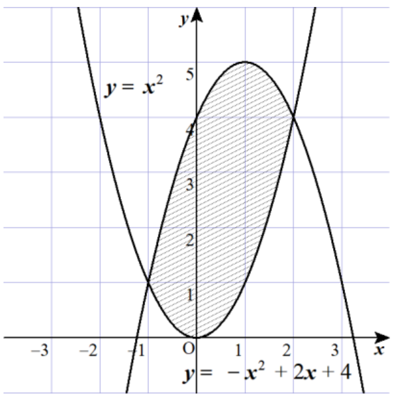
９．

（1）放物線　$y=x^2$，直線　$y=-x^2+2x+4$

方程式　$x^2=-x^2+2x+4$　を解くと，

$2x^2-2x-4=0$

$x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$　より，$x=-1,\ 2$



$$\mathrm{S}=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+4)-x^2\}\,dx=-\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)\,dx$$

$$=-\left[\frac{2}{3}x^3-x^2-4x\right]_{-1}^{2}=-\frac{2}{3}\{2^3-(-1)^3\}+\{2^2-(-1)^2\}+4\{2-(-1)\}$$

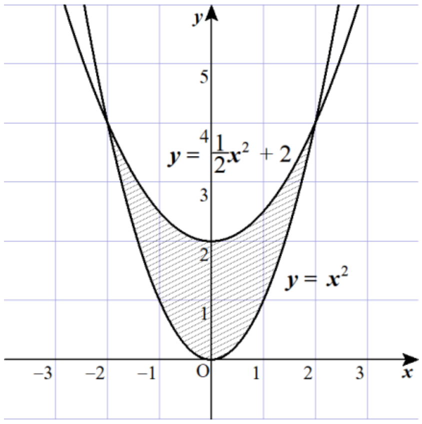
$$=-6+3+12=9$$

$\boxed{\text{別解}}$　$\mathrm{S}=\dfrac{2}{6}\{2-(-1)\}^3=\dfrac{27}{3}=9$

（2）放物線　$y=x^2$，直線　$y=\dfrac{1}{2}x^2+2$

方程式　$x^2=\dfrac{1}{2}x^2+2$　を解くと，$\dfrac{1}{2}x^2=2$

$x^2=4$　より，$x=\pm 2$



$$\mathrm{S}=\int_{-2}^{2}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-x^2\right\}dx=-\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)dx$$

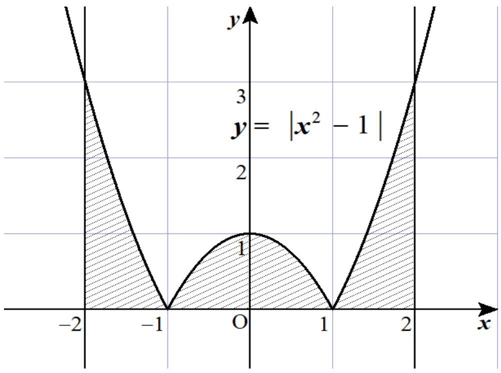
$$=-\left[\frac{x^3}{6}-2x\right]_{-2}^{2}$$

$$=-\frac{1}{6}\{2^3-(-2)^3\}+2\{2-(-2)\}=-\frac{8}{3}+8=\frac{16}{3}$$

$\boxed{\text{別解}}$　$\mathrm{S}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}\{2-(-2)\}^3=\dfrac{64}{12}=\dfrac{16}{3}$

１０．

関数のグラフの対称性より，



$$\mathrm{S}=2\left\{\int_{0}^{1}(1-x^2)\,dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)\,dx\right\}$$

$$=2\left\{\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2}\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}(2^3-1^3)-2(2-1)$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{14}{3}-2=4$$

第６章　微分法と積分法　章末問題 解答

１．

（1）$y=(2x+1)(1-x^2)=-2x^3-x^2+2x+1$　のとき，$y'=-6x^2-2x+2$

（2）$y=(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$　のとき，$y'=3x^2$

２．

（1）$y=x^3-4x^2$，より，$y'=3x^2-8x$　であり，$x=3$　のとき，$y'=3$

よって，曲線上の点A（3，－9）における接線の傾きは３ であるから，

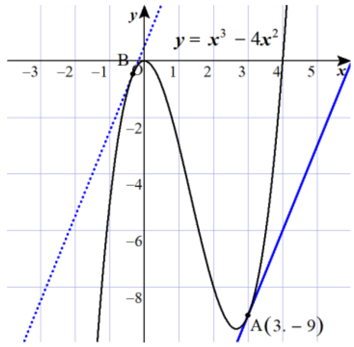
l ： $y=3(x-3)-9=3x-18$

（２） $y' = 3x^2 - 8x = 3$　とおくと，$3x^2 - 8x - 3 = 0$

$(3x+1)(x-3) = 0$　より，$x = 3$，$-\dfrac{1}{3}$　であり，

$x = -\dfrac{1}{3}$　のとき，$y = -\dfrac{13}{27}$

よって，点B$\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{13}{27}\right)$



３．

$y = x^2(x-a) = x^3 - ax^2$　より，

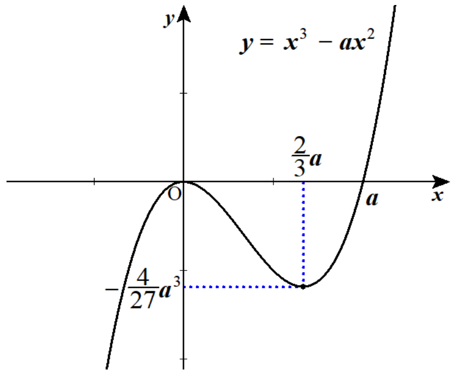
$y' = 3x^2 - 2ax = x(3x-2a) = 0$　とおくと，$x = 0$，$\dfrac{2}{3}a$

（１） $a > 0$　のとき，下の増減表より，

極大値　0　（$x = 0$　のとき）

極小値　$-\dfrac{4}{27}a^3$　（$x = \dfrac{2}{3}a$　のとき）

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}a$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	0	↘	$-\dfrac{4}{27}a^3$	↗

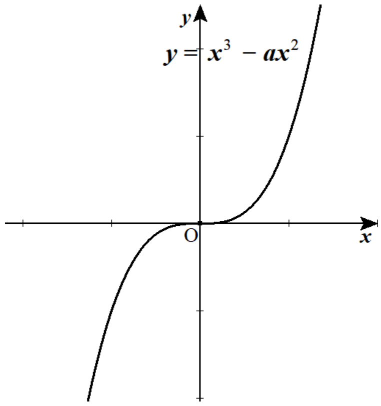


（２） $a = 0$　のとき，$y = x^3$，　$y' = 3x^2$

下の増減表より，

極大値，極小値　なし

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	↗	0	↗

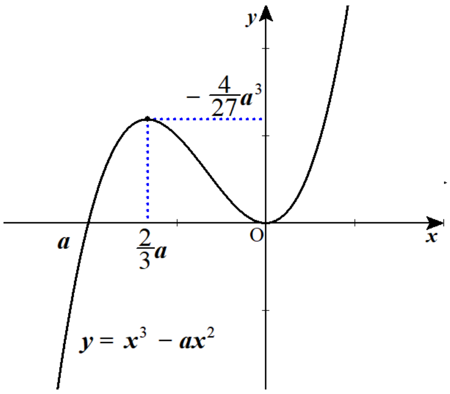


（３） $a < 0$　のとき，下の増減表より，

極大値　$-\dfrac{4}{27}a^3$　（$x = \dfrac{2}{3}a$　のとき）

極小値　0　（$x = 0$　のとき）

x	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$-\dfrac{4}{27}a^3$	↘	0	↗



4．

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ であり，

$x=1$ で極大値 5 をとるので，

$f(1)=a+b+c+d=5$ ……………… ①

$f'(1)=3a+2b+c=0$ ……………… ②

$x=3$ で極小値 1 をとるので，

$f(3)=27a+9b+3c+d=1$ ………… ③

$f'(3)=27a+6b+c=0$ ……………… ④

③－① より，$26a+8b+2c=-4$ よって，$13a+4b+c=-2$ ………… ⑤

④－② より，$24a+4b=0$ よって，$6a+b=0$ ……… ⑥

⑤－② より，$10a+2b=-2$ よって，$5a+b=-1$ ……… ⑦

⑥，⑦ より，$a=1$，$b=-6$

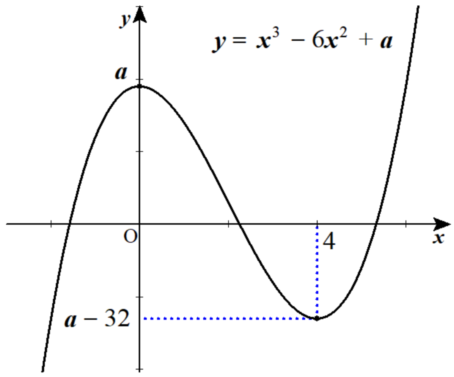
② に代入して，$c=9$

① に代入して，$d=1$

5．

$y=x^3-6x^2+a$ より，$y'=3x^2-12x=3x(x-4)$

x	…	0	…	4	…
y'	＋	0	－	0	＋
y	↗	a	↘	$a-32$	↗



増減表より，関数 $y=x^3-6x^2+a$ のグラフが，x 軸と異なる３点で交わるためには，$a>0$，$a-32<0$

よって，$0<a<32$

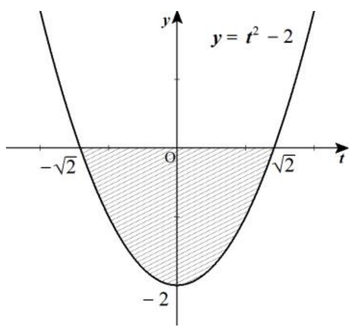
6．

（１）$\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x-3)^2dx=\int_{-2}^{2}(4x^2-12x+9)\,dx=\int_{-2}^{2}(4x^2+9)\,dx=2\int_{0}^{2}(4x^2+9)\,dx=2\left[\frac{4}{3}x^3+9x\right]_0^2$

$\displaystyle=2\left(\frac{32}{3}+18\right)=\frac{172}{3}$

（２）$\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(t^2-2)\,dt=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(t^2-2)\,dt=2\left[\frac{t^3}{3}-2t\right]_0^{\sqrt{2}}$

$\displaystyle=2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}\right)=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$



$\boxed{\text{別解}}$ $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(t^2-2)\,dt=-\frac{1}{6}\{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})\}^3=-\frac{1}{6}\cdot16\sqrt{2}=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

7．

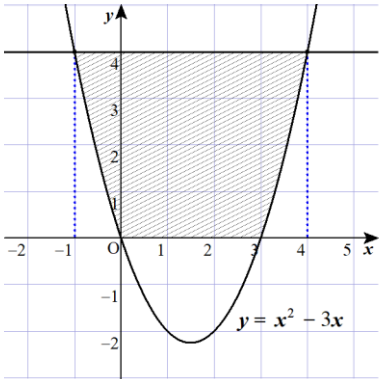
$\displaystyle f(x)=\int_{1}^{x}(t-1)(t-2)\,dt$ より，$f'(x)=(x-1)(x-2)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

増減表より， $f(x)$ は $x=1$ のとき極大であり，極大値 $f(1)=\int_1^1 (t-1)(t-2)\,dt=0$

８．

（１）放物線 $y=x^2-3x$ と２直線 $y=0$， $y=4$



$x^2-3x=4$ とおくと， $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ より， $x=-1$， 4

$$\mathrm{S}=\int_{-1}^{4}\{4-(x^2-3x)\}\,dx+\int_0^3 (x^2-3x)\,dx$$

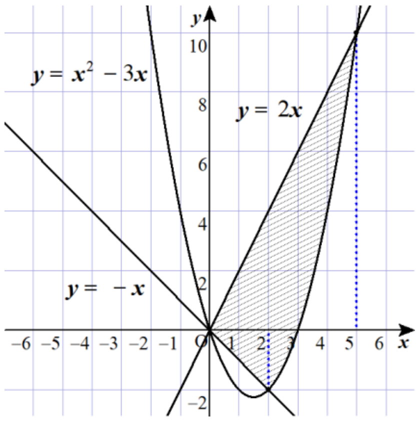
$$=-\int_{-1}^{4}(x^2-3x-4)\,dx+\int_0^3 (x^2-3x)\,dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-1}^{4}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$

$$=-\frac{1}{3}\{4^3-(-1)^3\}+\frac{3}{2}\{4^2-(-1)^2\}+4\{4-(-1)\}+\left(9-\frac{27}{2}\right)$$

$$=-\frac{65}{3}+\frac{45}{2}+20+9-\frac{27}{2}=\frac{49}{3}$$

（２）放物線 $y=x^2-3x$ と２直線 $y=2x$， $y=-x$



$x^2-3x=2x$ とおくと， $x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$ より， $x=0$， 5

$x^2-3x=-x$ とおくと， $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$ より， $x=0$， 2

$$\mathrm{S}=\int_0^2\{2x-(-x)\}\,dx+\int_2^5\{2x-(x^2-3x)\}\,dx$$

$$=\int_0^2 3x\,dx-\int_2^5 (x^2-5x)\,dx$$

$$=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^2-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2\right]_2^5=6-\frac{1}{3}(5^3-2^3)+\frac{5}{2}(5^2-2^2)$$

$$=6-39+\frac{105}{2}=\frac{39}{2}$$

９．

関数 $f(x)=x^3+3x^2+kx$ について， $f'(x)=3x^2+6x+k$ であり，

すべての x について， $f'(x)\geqq 0$ となればよいので，

２次方程式 $3x^2+6x+k=0$ の判別式

$\mathrm{D}'=9-3k\leqq 0$ より， $k\geqq 3$

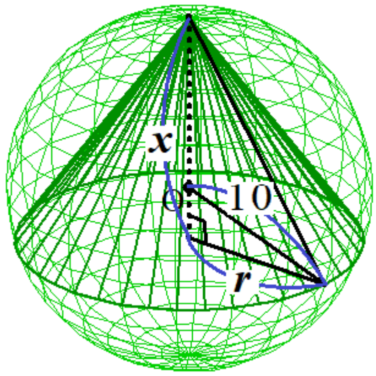
１０．

$f(x)=x^3-6x^2+k$ とおくと， $f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$ であり，

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	0	−	0	＋
$f(x)$	k	↘	$k-32$	↗

増減表より，$f(4)=k-32\geqq 0$　　よって，$k\geqq 32$ より，k の最小値は３２

１１．



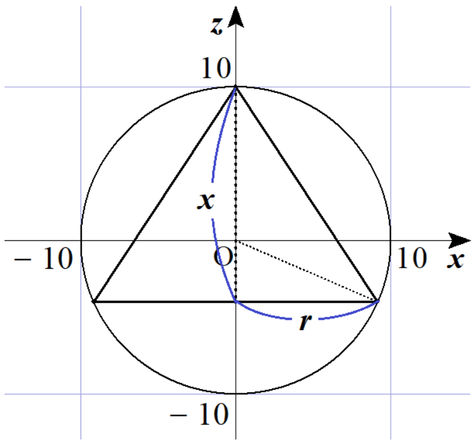
直円錐の高さを x，底面の円の半径を r とすると，

$r^2=10^2-(x-10)^2=-x^2+20x$　であり，

$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}\pi r^2 x=\frac{\pi}{3}(-x^2+20x)x=-\frac{\pi}{3}(x^3-20x^2)$$

$$\frac{dV}{dx}=-\frac{\pi}{3}(3x^2-40x)=-\frac{\pi}{3}x(3x-40)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{40}{3}$	$\cdots$	２０
$\frac{dV}{dx}$		＋	0	−	
V	0	↗	$\frac{32000}{81}\pi$	↘	0



上の増減表より，$V_1=\dfrac{32000}{81}\pi$

また，$V_2=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 10^3=\dfrac{4000}{3}\pi$　より，

$V_1 : V_2=\dfrac{32000}{81}\pi : \dfrac{4000}{3}\pi=\dfrac{8}{27} : 1=８ : ２７$

１２．

$f(x)=ax+b$（$a\neq 0$）とおくと，

$$\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2=\left\{\int_0^1(ax+b)\,dx\right\}^2=\left\{\left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^1\right\}^2=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2=\frac{a^2}{4}+ab+b^2$$

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1(ax+b)^2dx=\int_0^1(a^2x^2+2abx+b^2)\,dx=\left[\frac{a^2}{3}x^3+abx^2+b^2x\right]_0^1=\frac{a^2}{3}+ab+b^2$$

よって，$\dfrac{a^2}{4}+ab+b^2<\dfrac{a^2}{3}+ab+b^2$　より，$\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2<\int_0^1\{f(x)\}^2dx$

１３．

$\int_0^1 f(t)\,dt=a$　とおくと，$f(x)=x^2+2a$　であるから，

$a=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(t^2+2a)\,dt=\left[\dfrac{t^3}{3}+2at\right]_0^1=2a+\dfrac{1}{3}$　より，$a=-\dfrac{1}{3}$

よって，$f(x)=x^2-\dfrac{2}{3}$

１４．

$a>0$ のとき，S $=-\int_0^a (x^2-ax)\,dx=\frac{1}{6}(a-0)^3=\frac{a^3}{6}=\frac{4}{3}$ より，$a=2$

$a<0$ のとき，S $=-\int_a^0 (x^2-ax)\,dx=\frac{1}{6}(0-a)^3=-\frac{a^3}{6}=\frac{4}{3}$ より，$a=-2$

１５．

$y=x^2-2x+4$ のとき，$y'=2x-2$ より，

放物線上の点$(t,\ t^2-2t+4)$ における接線の方程式は,

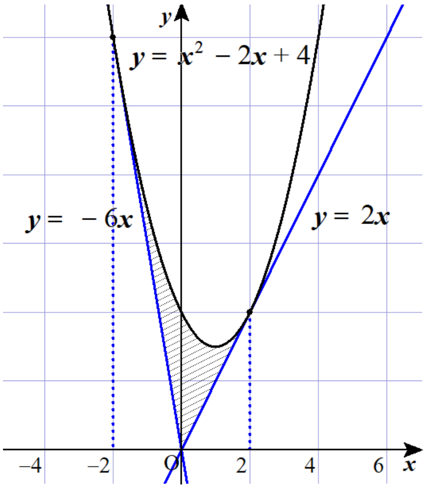
$y=(2t-2)(x-t)+t^2-2t+4=(2t-2)x-t^2+4$

この接線が原点O(０，０)を通るとき，$-t^2+4=0$ より，

$t=\pm 2$ であり，

$t=2$ のとき，接線は，$y=2x$

$t=-2$ のとき，接線は，$y=-6x$ であるから，



S $=\int_{-2}^0\{(x^2-2x+4)-(-6x)\}\,dx+\int_0^2\{(x^2-2x+4)-2x\}\,dx$

$=\int_{-2}^0 (x^2+4x+4)\,dx+\int_0^2 (x^2-4x+4)\,dx$

$=\int_{-2}^0 (x+2)^2dx+\int_0^2 (x-2)^2dx$

$=\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^0+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^2=\left(\frac{8}{3}-0\right)+\left\{0-\left(-\frac{8}{3}\right)\right\}=\frac{16}{3}$