数学Ｂ　第２章　空間のベクトル

１限目	Ｐ４８～Ｐ５２	空間の点・空間のベクトル
２限目	Ｐ５３～Ｐ５８	ベクトルの成分・ベクトルの内積
３限目	Ｐ５９～Ｐ６０	位置ベクトル
４限目	Ｐ６１	内積の利用
５限目	Ｐ６２～Ｐ６３	２点間の距離，内分点・外分点，平面の方程式
６限目	Ｐ６４～Ｐ６５	球面の方程式
７限目	Ｐ６６	補充問題
８限目	Ｐ６７	章末問題Ａ
９限目	Ｐ６８	章末問題Ｂ

練習１

（１） yz 平面に関して点Ｐ(１，３，２) と対称な点の座標は，(－１，３，２)

（２） zx 平面に関して点Ｐ(１，３，２) と対称な点の座標は，(１，－３，２)

練習２

（１）原点Ｏと点Ｐ(２，３，６) の距離は ＯＰ＝$\sqrt{2^2+3^2+6^2}=\sqrt{49}=7$

（２）原点Ｏと点Ｑ(３，－４，５) の距離は ＯＱ＝$\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

練習３

$\overrightarrow{AE}$ に等しいベクトル …… $\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{CG}$，$\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{AD}$ の逆ベクトル（$\overrightarrow{DA}$ 以外のもの） …… $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{GF}$，$\overrightarrow{HE}$

練習４

（１） $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

（２） $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$

練習５

（１） $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

（２） $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

（３） $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

（４） $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}=\vec{a}-\vec{b}$

練習６

（１） $\vec{a}=(2,\ -1,\ -3)$， $\vec{b}=(x-4,\ y+2,\ -z+1)$ で、$\vec{a}=\vec{b}$ のとき，

$x=6$， $y=-3$， $z=4$

（２） $\vec{a}=(-4,\ 2-y,\ 8)$， $\vec{b}=(3x-1,\ 0,\ -2z)$ で、$\vec{a}=\vec{b}$ のとき，

$x=-1$， $y=2$， $z=-4$

練習７

（１） $\vec{a}=(-1,\ 2,\ -2)$ のとき，$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$

（２） $\vec{b}=(-5,\ 3,\ -4)$ のとき，$|\vec{b}|=\sqrt{(-5)^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

練習８ $\vec{a}=(1,\ 3,\ -2)$， $\vec{b}=(4,\ -3,\ 0)$ のとき，

（１） $\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)+(4,\ -3,\ 0)=(5,\ 0,\ -2)$

（２） $\vec{a}-\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)-(4,\ -3,\ 0)=(-3,\ 6,\ -2)$

（３） $3\vec{a}+2\vec{b}=3(1,\ 3,\ -2)+2(4,\ -3,\ 0)=(11,\ 3,\ -6)$

（４） $2\vec{a}-3\vec{b}=2(1,\ 3,\ -2)-3(4,\ -3,\ 0)=(-10,\ 15,\ -4)$

（５） $2(-\vec{a}+4\vec{b})=2\{-(1,\ 3,\ -2)+4(4,\ -3,\ 0)\}=2(15,\ -15,\ 2)=(30,\ -30,\ 4)$

（６） $-3(\vec{a}-2\vec{b})=-3\{(1,\ 3,\ -2)-2(4,\ -3,\ 0)\}=-3(-7,\ 9,\ -2)=(21,\ -27,\ 6)$

練習９

（１）A(２，１，４)，B(３，−１，５) のとき，

$\overrightarrow{AB}=(1,\ -2,\ 1)$，　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$

（２）A(３，０，−２)，B(１，−４，２) のとき，

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ -4,\ 4)$，　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{36}=6$

練習１０

（１）$\vec{a}=(2,\ -1,\ -2)$，　$\vec{b}=(4,\ 3,\ -5)$ のとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=8-3+10=15$，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5\sqrt{2}$　より，

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{15}{15\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　よって，$\theta=45^\circ$

（２）$\vec{a}=(2,\ 4,\ 3)$，　$\vec{b}=(-2,\ 1,\ 0)$ のとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-4+4+0=0$　より，$\theta=90^\circ$

練習１１

A(６，７，−８)，B(５，５，−６)，C(６，４，−２) のとき，

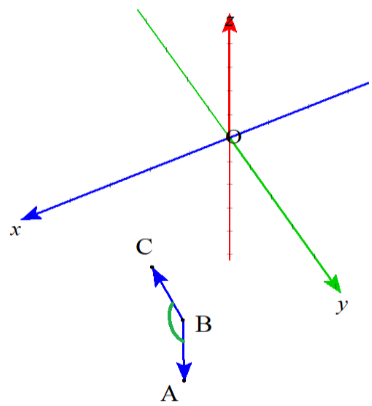
$\overrightarrow{BA}=(1,\ 2,\ -2)$，　$\overrightarrow{BC}=(1,\ -1,\ 4)$　より，

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1-2-8=-9$

$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$　であるから，

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=-\dfrac{9}{9\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　より，$\theta=135^\circ$



練習１２

２つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 0,\ -1)$，　$\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)$　に垂直で，大きさが $\sqrt{6}$ のベクトルを

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$　とすると，

$\vec{a}\cdot\vec{p}=2x-z=0$　………　①

$\vec{b}\cdot\vec{p}=x+3y-2z=0$　………　②

$|\vec{p}|=x^2+y^2+z^2=6$　………　③

①，②　より，$z=2x$，　$y=x$

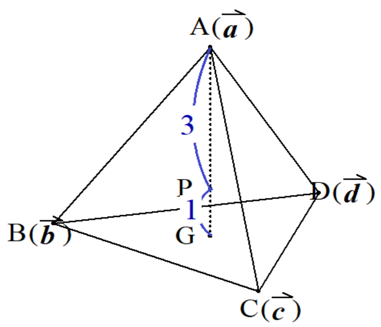
これを ③ に代入すると，$6x^2=6$　より，$x=\pm1$

よって，$\vec{p}=(\pm1,\ \pm1,\ \pm2)$　（複号同順）

練習１３

$\vec{g}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$　より，

$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{g}}{3+1}=\dfrac{\vec{a}+3\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}}{4}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$



練習１４

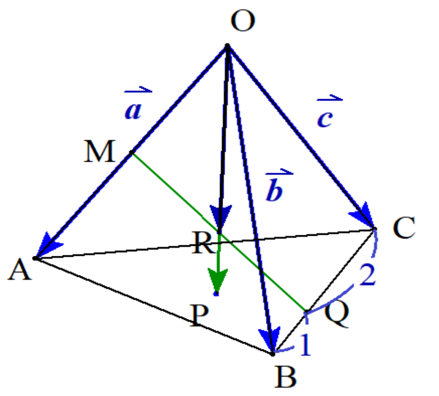
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$　とすると，

$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\vec{a}}{2}$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$　より，

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{a}}{4}+\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{6}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}$$

$$=\frac{9}{12}\cdot\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{9}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OP}$$　であるから，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{9}$$



練習１５

正四面体 ABCD において，１辺の長さを r，△BCD の重心をＧとする。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$　とすると，

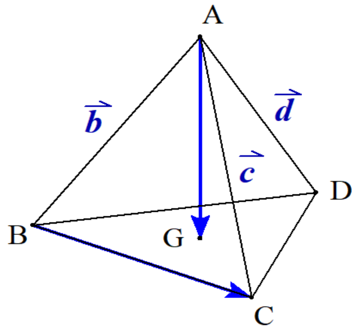
$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=r$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}r^2$　である。

このとき，$\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$　であるから，

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$

$$=\frac{1}{3}\{(|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2)+(\vec{d}\cdot\vec{c}-\vec{d}\cdot\vec{b})\}=0$$

よって，ＡＧ⊥ＢＣ　である。



練習１６

２点Ａ(１，３，－２)，Ｂ(４，－３，１）について，

（１）２点Ａ，Ｂ間の距離は，ＡＢ$=\sqrt{(4-1)^2+(-3-3)^2+(1+2)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

（２）線分ＡＢの中点の座標は，$\left(\dfrac{5}{2}，0，-\dfrac{1}{2}\right)$

（３）線分ＡＢを２：１に内分する点の座標は，$\left(\dfrac{1\cdot1+2\cdot4}{2+1}，\dfrac{1\cdot3+2\cdot(-3)}{2+1}，\dfrac{1\cdot(-2)+2\cdot1}{2+1}\right)$

すなわち（３，－１，０）

（４）線分ＡＢを２：１に外分する点の座標は，$\left(\dfrac{-1\cdot1+2\cdot4}{2-1}，\dfrac{-1\cdot3+2\cdot(-3)}{2-1}，\dfrac{-1\cdot(-2)+2\cdot1}{2-1}\right)$

すなわち（７，－９，４）

練習１７

３点Ａ(２，－１，４)，Ｂ(１，３，０)，Ｃ(３，１，２）を頂点とする△ＡＢＣの重心の座標は，$\left(\dfrac{2+1+3}{3}，\dfrac{-1+3+1}{3}，\dfrac{4+0+2}{3}\right)$　すなわち（２，１，２）

練習１８　点Ａ(１，２，３）とする。

（１）点Ａを通り，xy 平面に平行な平面の方程式は　$z=3$

（２）点Ａを通り，yz 平面に平行な平面の方程式は　$x=1$

（３）点Ａを通り，y 軸に垂直な平面の方程式は　$y=2$

練習１９

（１）点(１，２，－３)を中心とする半径４の球面

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$$

（２）原点を中心とする半径３の球面

$$x^2+y^2+z^2=9$$

（３）点Ａ(０，４，１)を中心とし，点Ｂ(２，４，５)を通る球面

球面の半径は $\sqrt{(2-0)^2+(4-4)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$　より，

$$x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=20$$

練習２０

２点Ａ(４，－２，１)，Ｂ(０，４，－５)を直径の両端とする球面

球面の中心の座標は（２，１，－２）であり，

球面の半径は $\sqrt{(4-2)^2+(-2-1)^2+\{1-(-2)\}^2}=\sqrt{22}$　より，

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=22$$

練習２１

球面 $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$　に　$x=0$　を代入すると，

$(y+2)^2+(z-3)^2=9$　より，

中心(０，－２，３)，半径３の円

第２章　空間のベクトル　補充問題 解答

１．

$\vec{p}=(-1,\ 5,\ 0)$，$\vec{a}=(1,\ -2,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ 1,\ 0)$，$\vec{c}=(2,\ -3,\ 1)$　のとき，

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$　とおくと，

x 成分について，$s-2t+2u=-1$　……… ①

y 成分について，$-2s+t-3u=5$　……… ②

z 成分について，$3s+u=0$　……… ③

①＋②×２　より，$-3s-4u=9$　………… ④

③＋④　より，$-3u=9$　よって，$u=-3$

③　に代入して，$s=1$

②　に代入して，$-2+t+9=5$　より，$t=-2$

よって，$\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}$

２．

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$　とすると，

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

また，$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{OQ}=\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{OR}=\vec{c}+\vec{a}$　より，

$\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}) = \frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{OG'} = 2\,\overrightarrow{OG}$　より，

３点Ｏ，Ｇ，Ｇ’は同一直線上にある。

３．

３点Ａ(３，２，１)，Ｂ(２，０，－２)，Ｃ(１，１，０) の定める平面ＡＢＣ上に点Ｐ(２，３，z)

があるとする。このとき，

$\overrightarrow{CA}$＝(２，１，１)，$\overrightarrow{CB}$＝(１，－１，－２)，$\overrightarrow{CP}$＝(１，２，z)　より，

$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$　とおくと，

x 成分について，$2s+t=1$ ……… ①

y 成分について，$s-t=2$ ……… ②

z 成分について，$s-2t=z$ …… ③

①，② より，$s=1$，$t=-1$　であるから，

③ に代入して，$z=3$

第２章　空間のベクトル　章末問題 解答

１．

$\vec{a}$＝(１，３，－２)，$\vec{b}$＝(１，－２，０) のとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1-6 = -5$，$|\vec{a}| = \sqrt{14}$，$|\vec{b}| = \sqrt{5}$　より，

$\vec{b}\cdot\vec{p} = \vec{b}\cdot(\vec{a}+t\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 = -5+5t = 0$　とおくと，$t=1$　であり，

このとき，$|\vec{p}|^2 = |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 14-10+5 = 9$　より，

$|\vec{p}| = 3$

２．

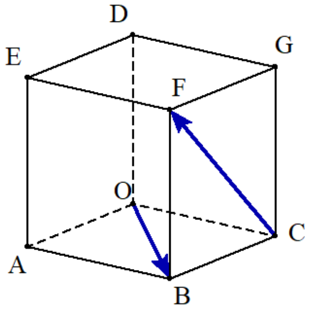
４点Ａ(１，２，１)，Ｂ(５，５，－１)，Ｃ(x，y，z)，Ｄ(－４，２，３)

が平行四辺形を作るとき，$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$　より，

(４，３，－２)＝(x＋４，y－２，z－３)

よって，$x=0$，$y=5$，$z=1$

３．



（１）$\overrightarrow{OB}$＝(２，２，０)，$\overrightarrow{CF}$＝(２，０，２)

（２）$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CF} = 4+0+0 = 4$，

（３）$|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{CF}| = 2\sqrt{2}$　より，

$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{CF}|} = \frac{1}{2}$　よって，$\theta = 60°$

４．

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$　とすると，

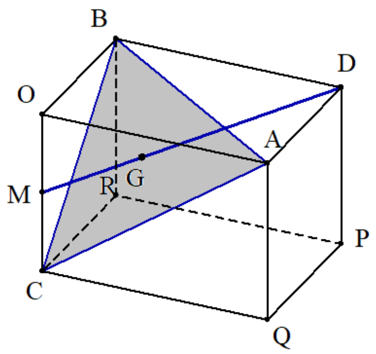
$\overrightarrow{OD} = \vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$，$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{c}$　より，

$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{6}(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{MG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MD}$　より，

３点M，G，Dは同一直線上にあり，DG：GM＝２：１



５．

３点O(０，０，０)，A(１，２，１)，B(－１，０，１) から等距離にある yz 平面上の点を P(０，y，z) とおくと，

$OP^2=y^2+z^2$

$AP^2=(y-2)^2+(z-1)^2+1=y^2+z^2-4y-2z+6$

$BP^2=y^2+(z-1)^2+1=y^2+z^2-2z+2$　であり，

$OP^2=AP^2$　より，$y^2+z^2=y^2+z^2-4y-2z+6$　よって，$2y+z=3$　…… ①

$OP^2=BP^2$　より，$y^2+z^2=y^2+z^2-2z+2$　よって，$z=1$　………………… ②

② を① に代入して，$y=1$

よって，点P(０，１，１)

６．

３点O(０，０，０)，A(－１，－２，１)，B(２，２，０) を頂点とする△OABについて，

（１）$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=$(－１，－２，１)，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=$(２，２，０)　とすると，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2-4=-6$，$|\vec{a}|=\sqrt{6}$，$|\vec{b}|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$　より，

$\cos\angle AOB=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{6}{4\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　よって，∠AOB＝１５０°

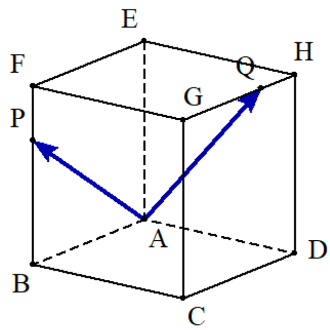
（２）$S=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin 150^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}$

$\boxed{\text{別解}}$　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{48-36}=\dfrac{1}{2}\sqrt{12}=\sqrt{3}$

７．

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$　とすると，

$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{e}=\vec{e}\cdot\vec{b}=0$，$|\vec{b}|=|\vec{d}|=|\vec{e}|=2$



（１）$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{HQ}=0$

（２）$\overrightarrow{AP}=\vec{b}+\dfrac{|\overrightarrow{BP}|}{2}\vec{e}$，　$\overrightarrow{AQ}=\vec{d}+\vec{e}+\dfrac{|\overrightarrow{HQ}|}{2}\vec{b}$　より，

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(\vec{b}+\dfrac{|\overrightarrow{BP}|}{2}\vec{e}\right)\cdot\left(\vec{d}+\vec{e}+\dfrac{|\overrightarrow{HQ}|}{2}\vec{b}\right)$

$=\dfrac{|\overrightarrow{HQ}|}{2}|\vec{b}|^2+\dfrac{|\overrightarrow{BP}|}{2}|\vec{e}|^2=2(|\overrightarrow{BP}|+|\overrightarrow{HQ}|)$

（３）（２）より，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$　の最大値は ８（$|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{HQ}|=2$　のとき）

８．

$\vec{e_1}$＝(１，０，０)，$\vec{e_2}$＝(０，１，０)，$\vec{e_3}$＝(０，０，１)，$\vec{a}$＝(－１，$\sqrt{2}$，１) のとき，

$\vec{e_1}\cdot\vec{a}=-1$，$\vec{e_2}\cdot\vec{a}=\sqrt{2}$，$\vec{e_3}\cdot\vec{a}=1$，$|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=|\vec{e_3}|=1$，$|\vec{a}|=2$

（１）$\cos\alpha=\dfrac{\vec{e_1}\cdot\vec{a}}{|\vec{e_1}||\vec{a}|}=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=\dfrac{\vec{e_2}\cdot\vec{a}}{|\vec{e_2}||\vec{a}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{\vec{e_3}\cdot\vec{a}}{|\vec{e_3}||\vec{a}|}=\dfrac{1}{2}$

（２）（１）より，α＝１２０°、β＝４５°，γ＝６０°

９．

（１）２点A(１，２，２)，B(２，３，４) に対して，点P(x，０，０) とおくと，

$AP^2=BP^2$　より，

$(x-1)^2+2^2+2^2=(x-2)^2+3^2+4^2$

$x^2-2x+9=x^2-4x+29$

$2x$＝２０　より，x＝１０　　よって，点P(１０，０，０)

（２）（１）より，△ＡＢＰの重心は，G(($\dfrac{13}{3}$，$\dfrac{5}{3}$，２)

１０．

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$　とすると，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}}{3}$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}}{5}=\frac{5}{3}\overrightarrow{OP}$$

よって，ＯＧ：ＯＰ＝５：３