

数学B 第3章 数列

第1節 等差数列と等比数列

1 限目	P	70～P	72	等差数列
2 限目	P	73～P	74	等差数列の一般項
3 限目	P	75～P	77	等差数列の和
4 限目	P	78～P	80	等比数列
5 限目	P	80～P	82	等比数列の和
6 限目	P	83		補充問題

第2節 いろいろな数列

1 限目	P	84～P	86	和の記号 Σ (1)
2 限目	P	87～P	88	和の記号 Σ (2)
3 限目	P	89～P	90	階差数列 (1)
4 限目	P	91		階差数列 (2)
5 限目	P	92		いろいろな数列の和 (1)
6 限目	P	93		いろいろな数列の和 (2)
7 限目	P	94		群数列
8 限目	P	95		補充問題

第3節 漸化式と数学的帰納法

1 限目	P	96～P	97	漸化式 (1)
2 限目	P	98～P	99	漸化式 (2)
3 限目	P	100		隣接3項間の漸化式
4 限目	P	101		数学的帰納法による等式の証明
5 限目	P	102		数学的帰納法による不等式の証明
6 限目	P	103		補充問題
7 限目	P	33		章末問題A
8 限目	P	34		章末問題B

第1節 等差数列と等比数列 練習問題 解答

練習1

$\{a_n\} : 1, 4, 9, 16, \dots$ において,

$$a_2 = 4, \quad a_4 = 16, \quad a_5 = 25$$

練習2

(1) $a_n = 2n - 1$ のとき,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7$$

(2) $a_n = n(n+1)$ のとき,

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 12, \quad a_4 = 20$$

(3) $a_n = 2^n$ のとき,

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 16$$

練習3

(1) $a_n = 5n$

(2) $a_n = 2n \cdot (-1)^n$

練習4

(1) $1, 6, 11, 16, \dots$

(2) $10, 6, 2, -2, \dots$

練習5

(1) 公差 = 4

(2) 公差 = -3

練習6

(1) $a_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$

(2) $a_n = 10 - 5(n-1) = -5n + 15$

練習7

(1) 第4項が15, 第8項が27の等差数列

$$a_n = a + (n-1)d \quad \text{とおくと,}$$

$$a_4 = a + 3d = 15, \quad a_8 = a + 7d = 27 \quad \text{より, } a = 6, \quad d = 3$$

$$\text{よって, } a_n = 6 + 3(n-1) = 3n + 3$$

(2) 第5項が20, 第10項が0の等差数列

$$a_n = a + (n-1)d \quad \text{とおくと,}$$

$$a_5 = a + 4d = 20, \quad a_{10} = a + 9d = 0 \quad \text{より, } a = 36, \quad d = -4$$

$$\text{よって, } a_n = 36 - 4(n-1) = -4n + 40$$

練習8

(1) 初項3, 公差4の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は,

$$a_n = 3 + 4(n-1) = 4n - 1 \quad \text{より, } 4n - 1 = 75 \quad \text{とおくと, } 4n = 76 \quad \text{より,}$$

$n = 19$ であるから, 第19項

$$(2) 4n-1 > 300 \quad \text{とおくと, } 4n > 301 \quad \text{より, } n > \frac{301}{4}$$

よって, $n \geq 76$ であるから, 第76項 であり, このとき, $a_{76} = 303$

練習9

(1) $3, x, 7, \dots$ が等差数列のとき,

$$x-3=7-x \quad \text{であるから, } 2x=10 \quad \text{より, } x=5$$

(2) $\frac{1}{12}, \frac{1}{x}, \frac{1}{6}, \dots$ が等差数列のとき,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} - \frac{1}{x} \quad \text{であるから, } \frac{2}{x} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \text{より, } x=8$$

練習10

(1) 初項2, 末項10, 項数10 の等差数列において,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10(2+10) = 5 \cdot 12 = 60$$

(2) 初項8, 末項-6, 項数15 の等差数列において,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 15(8-6) = 15$$

練習11

(1) 初項1, 公差2, 項数20 の等差数列において,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 20\{2 \cdot 1 + 2(20-1)\} = 10 \cdot 40 = 400$$

(2) 初項10, 公差-4, 項数15 の等差数列において,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 15\{2 \cdot 10 - 4(15-1)\} = 15(10-28) = -270$$

練習12

初項6, 公差4 の等差数列において,

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 \cdot 6 + 4(n-1)\} = n\{2(n-1) + 6\} = n(2n+4) = 2n^2 + 4n$$

練習13

(1) 等差数列 $\{a_n\}$: $2, 6, 10, \dots, 74$ において,

$$a_n = 2 + 4(n-1) = 4n-2 \quad \text{より, } 4n-2 = 74 \quad \text{とおくと, } 4n = 76 \quad \text{より,}$$

$n = 19$ であるから,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 19(2+74) = 19 \cdot 38 = 722$$

(2) 等差数列 $\{a_n\}$: $102, 96, 90, \dots, 6$ において,

$$a_n = 102 - 6(n-1) = -6n + 108 \quad \text{より, } -6n + 108 = 6 \quad \text{とおくと, } 6n = 102 \quad \text{より,}$$

$n = 17$ であるから,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 17(102+6) = 17 \cdot 54 = 918$$

練習 1 4

$$(1) 1+2+3+\cdots+20=\frac{1}{2}\cdot 20(20+1)=210$$

$$(2) 1+2+3+\cdots+100=\frac{1}{2}\cdot 100(100+1)=50\cdot 101=5050$$

$$(3) 1+3+5+\cdots+29=15^2=225 \quad \leftarrow 1 \text{ から始まる } 15 \text{ 個の奇数の和}$$

$$(4) 1+3+5+\cdots+55=28^2=784 \quad \leftarrow 1 \text{ から始まる } 28 \text{ 個の奇数の和}$$

練習 1 5

$$(1) 2+4+6+\cdots+40=2(1+2+3+\cdots+20)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 20(20+1)=420$$

$$(2) 2+4+6+\cdots+100=2(1+2+3+\cdots+50)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 50(50+1)=50\cdot 51=2550$$

練習 1 6

$$(1) 1, 3, 9, 27, \cdots$$

$$(2) 3, -6, 12, -24, \cdots$$

$$(3) 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$$

$$(4) -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$$

練習 1 7

$$(1) 1, 2, 4, \boxed{8}, \cdots \quad \text{の公比} = 2$$

$$(2) 1, -2, 4, \boxed{-8}, \cdots \quad \text{の公比} = -2$$

$$(3) \boxed{16}, 8, 4, \boxed{2}, \cdots \quad \text{の公比} = \frac{1}{2}$$

$$(4) \boxed{-\frac{9}{2}}, 3, -2, \boxed{\frac{4}{3}}, \cdots \quad \text{の公比} = -\frac{2}{3}$$

練習 1 8

$$(1) a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad a_5 = 2 \cdot 3^4 = 162$$

$$(2) a_n = (-3)^{n-1} \quad a_5 = (-3)^4 = 81$$

$$(3) a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad a_5 = 2^5 = 32$$

$$(4) a_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad a_5 = -3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = -\frac{3}{16}$$

練習 1 9

$$(1) \text{等比数列 } \{a_n\} : 1, -2, 4, -8, \cdots \text{ は, 初項 } 1, \text{ 公比 } -2 \text{ より,}$$

$$a_n = (-2)^{n-1}$$

(2) 等比数列 $\{a_n\}$: $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$ は, 初項 $\frac{3}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ より,

$$a_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

(3) 等比数列 $\{a_n\}$: $5, -5, 5, -5, \dots$ は, 初項 5 , 公比 -1 より,

$$a_n = 5(-1)^{n-1}$$

(4) 等比数列 $\{a_n\}$: $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$ は, 初項 $\sqrt{2}$, 公比 $\sqrt{2}$ より,

$$a_n = (\sqrt{2})^n$$

練習 20

(1) 第2項が 6 , 第4項が 54 の等比数列

$$a_n = ar^{n-1} \text{ とおくと,}$$

$$a_2 = ar = 6, \quad a_4 = ar^3 = 54 \text{ より, } r^2 = 9 \text{ であるから, } r = \pm 3$$

$$r = 3 \text{ のとき, } a = 2, \quad r = -3 \text{ のとき, } a = -2$$

$$\text{よって, } a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ または } a_n = -2(-3)^{n-1}$$

(2) 第5項が -9 , 第7項が -27 の等比数列

$$a_n = ar^{n-1} \text{ とおくと,}$$

$$a_5 = ar^4 = -9, \quad a_7 = ar^6 = -27 \text{ より, } r^2 = 3 \text{ であるから, } r = \pm \sqrt{3}$$

$$\text{このとき, } a = -1 \text{ より, } a_n = -(\sqrt{3})^{n-1} \text{ または } a_n = -(-\sqrt{3})^{n-1}$$

練習 21

(1) $2, x, 32, \dots$ が等比数列のとき,

$$\frac{x}{2} = \frac{32}{x} \text{ であるから, } x^2 = 64 \text{ より, } x = \pm 8$$

(2) $3, x, 9, \dots$ が等比数列のとき,

$$\frac{x}{3} = \frac{9}{x} \text{ であるから, } x^2 = 27 \text{ より, } x = \pm 3\sqrt{3}$$

練習 22

(1) $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ は, 初項 1 , 公比 2 の等比数列であるから,

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

(2) $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^3}, \dots$ は, 初項 2 , 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから,

$$S_n = \frac{2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}}{\frac{2}{3}} = 3 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

練習 23

$$a_n = ar^{n-1} \text{ とおくと,}$$

$$a + ar + ar^2 = 7 \dots\dots ①, \quad ar^2 + ar^3 + ar^4 = r^2(a + ar + ar^2) = 28 \dots\dots ②$$

①, ② より, $r^2 = 4$ よって, $r = \pm 2$

$r = 2$ のとき, ① より, $7a = 7$ よって, $a = 1$

$r = -2$ のとき, ① より, $3a = 7$ よって, $a = \frac{7}{3}$

第1節 等差数列と等比数列 補充問題 解答

1.

(1) $a_n = 3n - 2 = 1 + 3(n - 1)$ より, $a = 1$, $d = 3$

(2) $3n - 2 = 200$ とおくと, $3n = 202$ であり, n は整数にならないので,
 200 はこの数列の項ではない。

2.

(1) $a_n = 50 - 3(n - 1) = -3n + 53$ より, $-3n + 53 < 0$ とおくと,

$3n > 53$ よって, $n > \frac{53}{3}$ より, $n \geq 18$ であるから,

第18項が初めて負の数になる。

(2) 初めて負の数になる項の直前の項までの和が最大になるから,

$$S_{17} = \frac{17}{2} \{2 \cdot 50 - 3(17 - 1)\} = \frac{17}{2} (50 + 2) = 17 \cdot 26 = 442$$

3.

$a_n = ar^{n-1}$ とおくと,

$a_2 = ar = 3$, $a_5 = ar^4 = 24$ より, $r^3 = 8$ であるから, $r = 2$

このとき, $a = \frac{3}{2}$ であるから, $a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-2}$

4.

$a_n = ar^{n-1}$ とおくと,

$a_2 = ar = 3$ …… ①, $a_1 + a_2 + a_3 = a + ar + ar^2 = 13$ より, $a + ar^2 = 10$ …… ②

① より, $a = \frac{3}{r}$ であるから, これを ② に代入して,

$$\frac{3}{r} + 3r = 10 \quad \text{よって, } 3 + 3r^2 = 10r$$

$$3r^2 - 10r + 3 = (3r - 1)(r - 3) = 0 \quad \text{より, } r = \frac{1}{3}, 3$$

$r = \frac{1}{3}$ のとき, ① より, $a = 9$, $r = 3$ のとき, ① より, $a = 1$

第2節 いろいろな数列 練習問題 解答

練習24

$$(1) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2 = \frac{1}{6} \cdot 20(20+1)(2 \cdot 20+1) = \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 21 \cdot 41 = 2870$$

$$(2) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 30^2 = \frac{1}{6} \cdot 30(30+1)(2 \cdot 30+1) = \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 = 9455$$

練習 2 5

$$(1) \sum_{k=1}^n (2k-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

$$(2) \sum_{k=3}^8 2^{k-1} = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$$

$$(3) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

練習 2 6

$$(1) 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 = \sum_{k=1}^6 (2k-1)^2$$

$$(2) 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 = \sum_{k=2}^7 (2k-3)^2$$

練習 2 7

$$(1) \sum_{k=1}^{15} 2 = 2 \cdot 15 = 30$$

$$(2) \sum_{k=1}^{24} k = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 25 = 12 \cdot 25 = 300$$

$$(3) \sum_{k=1}^{50} k = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 = 25 \cdot 51 = 1275$$

$$(4) \sum_{k=1}^7 k^2 = \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 15 = 7 \cdot 4 \cdot 5 = 140$$

$$(5) \sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 13 \cdot 25 = 2 \cdot 13 \cdot 25 = 650$$

練習 2 8

$$(1) \sum_{k=1}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n = n(n+1) + n = n^2 + 2n$$

$$(2) \sum_{k=1}^n (3k-5) = 3 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 5 = 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - 5n = \frac{1}{2} \{ (3n^2 + 3n) - 10n \} = \frac{1}{2} (3n^2 - 7n)$$

$$(3) \sum_{k=1}^{n-1} 4k = 4 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) = 2n^2 - 2n$$

練習 2 9

$$(1) \sum_{k=1}^n (3k^2 - 7k + 4) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 7 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 4 = 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 7 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 4n$$

$$= \frac{1}{2} n \{ (n+1)(2n+1) - 7(n+1) + 8 \} = \frac{1}{2} n (2n^2 - 4n + 2) = n^3 - 2n^2 + n$$

$$(2) \sum_{k=1}^n (k-1)(k-2) = \sum_{k=1}^n (k^2 - 3k + 2) = \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 2$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 2n = \frac{1}{6} n \{ (n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 12 \}$$

$$= \frac{1}{6} n (2n^2 - 6n + 4) = \frac{1}{3} n (n^2 - 3n + 2) = \frac{1}{3} (n^3 - 3n^2 + 2n)$$

練習 3 0

$$(1) \quad 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = 4 \sum_{k=1}^n k^2 = 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{2}{3} (2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 &= \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1) = 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \\ &= \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{3} n \{2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3\} = \frac{1}{3} n(4n^2 - 1) \end{aligned}$$

練習 3 1

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n 2 \cdot 5^{k-1} = \frac{2(5^n - 1)}{5 - 1} = \frac{1}{2} (5^n - 1)$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n 3^{k-1} = \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2} (3^n - 1)$$

練習 3 2

$\{a_n\} : 1, 2, 5, 10, 17, \cdots$ とすると,

階差数列 $\{b_n\} : 1, 3, 5, 7, \cdots$ であり, 一般項 $b_n = 2n - 1$ であるから,

$$a_6 = a_5 + b_5 = 17 + 9 = 26$$

$$a_7 = a_6 + b_6 = 26 + 11 = 37$$

練習 3 3

(1) $\{a_n\} : 1, 2, 4, 7, 11, \cdots$ とすると,

階差数列 $\{b_n\} : 1, 2, 3, 4, \cdots$ であり, 一般項 $b_n = n$ であるから,

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{2} (n^2 - n + 2) \text{ であり,}$$

$a_1 = 1$ より, $n = 1$ のときも成り立つ。

(2) $\{a_n\} : 2, 3, 5, 9, 17, \cdots$ とすると,

階差数列 $\{b_n\} : 1, 2, 4, 8, \cdots$ であり, 一般項 $b_n = 2^{n-1}$ であるから,

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 1 \text{ であり,}$$

$a_1 = 2$ より, $n = 1$ のときも成り立つ。

練習 3 4

$$S_n = n^2 - n \text{ のとき, } a_1 = S_1 = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき, } a_n &= S_n - S_{n-1} = (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= \{n^2 - (n-1)^2\} - \{n - (n-1)\} \\ &= (2n-1) - 1 = 2n-2 \end{aligned}$$

$a_1 = 0$ より, これは $n = 1$ のときも成り立つ。

練習 3 5

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \text{ より,} \\ S &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}\end{aligned}$$

練習 3 6

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + 7 \cdot 3^6 \quad \cdots \cdots \text{① のとき,}$$

$$3S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + 6 \cdot 3^6 + 7 \cdot 3^7 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

①-② より,

$$-2S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^6 - 7 \cdot 3^7 = \frac{3^7 - 1}{3 - 1} - 7 \cdot 3^7 = -\frac{13 \cdot 3^7 + 1}{2} \quad \text{よって, } S = \frac{1}{4}(13 \cdot 3^7 + 1) = 7108$$

参考 一般に,

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1} \quad \cdots \cdots \text{③ とおくと,}$$

$$3S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + (n-1)3^{n-1} + n \cdot 3^n \quad \cdots \cdots \text{④}$$

③-④ より,

$$-2S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} - n \cdot 3^n = \frac{3^n - 1}{3 - 1} - n \cdot 3^n = -\frac{(2n-1)3^n + 1}{2}$$

$$\text{よって, } S = \frac{1}{4} \{ (2n-1)3^n + 1 \}$$

練習 3 7

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid 21, \cdots$$

(1) 第 n 群には n 個の項が含まれるから, 第 n 群の最初の項は, 先頭から数えて

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + 1 = \frac{1}{2}n(n-1) + 1 = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) \text{ 番目である。}$$

$$\text{よって その数は, } 2 \cdot \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) - 1 = n^2 - n + 1$$

(2) 第 n 群の最後の項は, 第 $n+1$ 群の最初の項より 2 小さいので, その数は,

$$\{(n+1)^2 - (n+1) + 1\} - 2 = n^2 + n - 1$$

よって, 第 n 群に含まれる項の和 S_n は,

$$S_n = \frac{n}{2} \{ (n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1) \} = \frac{n}{2} \cdot 2n^2 = n^3 \quad \text{であるから,}$$

$$S_{15} = 15^3 = 3 \ 3 \ 7 \ 5$$

第 2 節 いろいろな数列 補充問題 解答

5.

$$k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$$

この恒等式において、 k に 1 から n までを順に代入すると、

$$k = n \quad \text{のとき,} \quad n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$$

$$k = n-1 \quad \text{のとき,} \quad (n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(n-1) - 1$$

.....

$$k = 2 \quad \text{のとき,} \quad 2^4 - 1^4 = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1$$

$$k = 1 \quad \text{のとき,} \quad 1^4 - 0^4 = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1$$

これらを辺々すべて足すと、 $n^4 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 - 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k - n$ より、

$$\begin{aligned} 4 \sum_{k=1}^n k^3 &= n^4 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + n = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n \\ &= n^4 + (2n^3 + 3n^2 + n) - (2n^2 + 2n) + n \\ &= n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって,} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

6.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) + n(n+1) \\ &= \frac{1}{4} n(n+1) \{ n(n+1) + 2(2n+1) + 4 \} = \frac{1}{4} n(n+1)(n^2 + 5n + 6) \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

別解

$$k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2) = 4k(k+1)(k+2)$$

この恒等式において、 k に 1 から n までを順に代入すると、

$$k = n \quad \text{のとき,} \quad n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2) = 4n(n+1)(n+2)$$

.....

$$k = 2 \quad \text{のとき,} \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$k = 1 \quad \text{のとき,} \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$$

これらを辺々すべて足すと、 $n(n+1)(n+2)(n+3) = 4 \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$ より、

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

7.

$$(1) \quad \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \quad \text{より,}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \text{ より,}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1}-1$$

8.

$$S = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + \cdots + (n+1)2^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ とおくと,}$$

$$2S = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n 2^{n-1} + (n+1)2^n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ より,

$$-S = (1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})+1-(n+1)2^n = \frac{2^n-1}{2-1}+1-(n+1)2^n = -n 2^n$$

$$\text{よって, } S = n 2^n$$

第3節 漸化式と数学的帰納法 練習問題 解答

練習38

$$(1) a_1 = 100, a_{n+1} = a_n - 5$$

$$a_2 = a_1 - 5 = 95, a_3 = a_2 - 5 = 90, a_4 = a_3 - 5 = 85, a_5 = a_4 - 5 = 80$$

$$(2) a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n$$

$$a_2 = 3a_1 = 6, a_3 = 3a_2 = 18, a_4 = 3a_3 = 54, a_5 = 3a_4 = 162$$

$$(3) a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2$$

$$a_2 = 3a_1 + 2 = 8, a_3 = 3a_2 + 2 = 26, a_4 = 3a_3 + 2 = 80, a_5 = 3a_4 + 2 = 242$$

$$(4) a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n$$

$$a_2 = a_1 + 1 = 2, a_3 = a_2 + 2 = 4, a_4 = a_3 + 3 = 7, a_5 = a_4 + 4 = 11$$

練習39

$$(1) a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$$

$$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n-1$$

$$(2) a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$$

$$a_n = 2^{n-1}$$

練習40

$$(1) a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3^n$$

$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項は, $b_n = 3^n$ であるから,

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 1 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = 1 + \frac{3^n-3}{2} = \frac{3^n-1}{2} \text{ であり,}$$

$a_1 = 1$ より, $n = 1$ のときも成り立つ。

$$(2) a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 2n + 1$$

$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項は, $b_n = 2n+1$ であるから,

$n \geq 2$ のとき, $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) = n(n-1) + (n-1) = n^2 - 1$ であり,
 $a_1 = 0$ より, $n = 1$ のときも成り立つ。

練習 4 1

- (1) $c = 4c - 6$ とおくと, $c = 2$ より,
 $a_{n+1} = 4a_n - 6$ を変形すると, $a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$
- (2) $c = 2c + 1$ とおくと, $c = -1$ より,
 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ を変形すると, $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$
- (3) $c = -2c + 3$ とおくと, $c = 1$ より,
 $a_{n+1} = -2a_n + 3$ を変形すると, $a_{n+1} - 1 = -2(a_n - 1)$

練習 4 2

- (1) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 4a_n - 6$
 $c = 4c - 6$ とおくと, $c = 2$ より,
 $a_1 - 2 = 3$, $a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$
よって, 数列 $\{a_n - 2\}$ は, 初項 3, 公比 4 の等比数列であるから,
 $a_n - 2 = 3 \cdot 4^{n-1}$ より, $a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 2$
- (2) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$
 $c = 2c + 1$ とおくと, $c = -1$ より,
 $a_1 + 1 = 2$, $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$
よって, 数列 $\{a_n + 1\}$ は, 初項 2, 公比 2 の等比数列であるから,
 $a_n + 1 = 2^n$ より, $a_n = 2^n - 1$
- (3) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -2a_n + 3$
 $c = -2c + 3$ とおくと, $c = 1$ より,
 $a_1 - 1 = 1$, $a_{n+1} - 1 = -2(a_n - 1)$
よって, 数列 $\{a_n - 1\}$ は, 初項 1, 公比 -2 の等比数列であるから,
 $a_n - 1 = (-2)^{n-1}$ より, $a_n = (-2)^{n-1} + 1$
- (4) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$
 $c = \frac{1}{2}c + 1$ とおくと, $c = 2$ より,
 $a_1 - 2 = 1$, $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$
よって, 数列 $\{a_n - 2\}$ は, 初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから,
 $a_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ より, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$

研究 練習 1

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_2 - a_1 = 3, a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) \quad \text{より,}$$

$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項は, $b_n = 3^n$ であるから,

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 1 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = 1 + \frac{3^n-3}{2} = \frac{3^n-1}{2} \quad \text{であり,}$$

$a_1 = 1$ より, $n = 1$ のときも成り立つ。

別解

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_{n+2} - c a_{n+1} = (4-c)a_{n+1} - 3a_n = (4-c)\left(a_{n+1} - \frac{3}{4-c}a_n\right) \quad \text{と変形できるので,}$$

$$c = \frac{3}{4-c} \quad \text{とおくと, } c^2 - 4c + 3 = (c-1)(c-3) = 0 \quad \text{より, } c = 1, 3$$

$$c = 1 \text{ のとき, } a_2 - a_1 = 3, a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) \quad \text{より, } a_{n+1} - a_n = 3^n \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$c = 3 \text{ のとき, } a_2 - 3a_1 = 1, a_{n+2} - 3a_{n+1} = a_{n+1} - 3a_n \quad \text{より, } a_{n+1} - 3a_n = 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より, } 2a_n = 3^n - 1 \quad \text{よって, } a_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

練習 4 3

$$(1) 1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

i) $n = 1$ のとき, 左辺=右辺=1 より, 等式は成り立つ。

ii) $n = k$ のとき, 等式が成り立つと仮定すると,

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$$

$n = k + 1$ のとき,

$$\text{左辺} = 1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2 = \text{右辺}$$

よって, 等式は $n = k + 1$ のときも成り立つ。

i), ii) より, 等式 $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ はすべての自然数 n について成り立つ。

$$(2) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

i) $n = 1$ のとき, 左辺=右辺=2 より, 等式は成り立つ。

ii) $n = k$ のとき, 等式が成り立つと仮定すると,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

$n = k + 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) = \text{右辺} \end{aligned}$$

よって, 等式は $n = k + 1$ のときも成り立つ。

i), ii) より, 等式 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ はすべての自然数 n について成り立つ。

練習 4 4

$$2^n > 2n+1$$

i) $n=3$ のとき, 左辺 $= 2^3 = 8$, 右辺 $= 2 \cdot 3 + 1 = 7$ より, 不等式は成り立つ。

ii) $n=k$ ($k \geq 3$) のとき, 不等式が成り立つと仮定すると,

$$2^k > 2k+1$$

この不等式の両辺を 2 倍すると, $2^{k+1} > 4k+2$ …… ① であり,

$$(4k+2) - \{2(k+1)+1\} = (4k+2) - (2k+3) = 2k-1 > 0 \quad \text{より,}$$

$$4k+2 > 2(k+1)+1 \quad \text{…… ②}$$

①, ② より, $2^{k+1} > 2(k+1)+1$ であるから, 不等式は $n=k+1$ のときも成り立つ。

i), ii) より, 不等式 $2^n > 2n+1$ は 3 以上の自然数 n について成り立つ。

第 3 節 漸化式と数学的帰納法 補充問題 解答

9.

$$(1) \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + n^2 + n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項は, $b_n = n^2 + n$ であるから,

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき, } a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k) = 2 + \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2} n(n-1) \\ &= \frac{1}{6} \{n(n-1)(2n-1) + 3n(n-1) + 12\} = \frac{1}{6} (2n^3 - 2n + 12) = \frac{1}{3} (n^3 - n + 6) \end{aligned}$$

であり, $a_1 = 2$ より, $n=1$ のときも成り立つ。

$$(2) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} + a_n = 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$a_{n+1} = -a_n + 3$ であり, $c = -c + 3$ とおくと, $c = \frac{3}{2}$ より,

$$a_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}, \quad a_{n+1} - \frac{3}{2} = -(a_n - \frac{3}{2})$$

よって, 数列 $\{a_n - \frac{3}{2}\}$ は, 初項 $-\frac{1}{2}$, 公比 -1 の等比数列であるから,

$$a_n - \frac{3}{2} = \frac{(-1)^n}{2} \quad \text{より, } a_n = \frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2}$$

$$(3) \quad a_1 = 2, \quad 2a_{n+1} = a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$ であり, $c = \frac{c}{2} + \frac{1}{2}$ とおくと, $c = 1$ より,

$$a_1 - 1 = 1, \quad a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1)$$

よって, 数列 $\{a_n - 1\}$ は, 初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから,

$$a_n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{より, } a_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

10.

$$(1) a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad a_3 = 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \quad a_4 = 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

(2) (1) より, $a_n = \frac{n+1}{n}$ …… ① と推測し, 数学的帰納法により証明する。

i) $n=1$ のとき, $a_1=2$ より, ① は成り立つ。

ii) $n=k$ のとき, ① が成り立つと仮定すると, $a_k = \frac{k+1}{k}$

$$\text{このとき, } a_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_k} = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{2(k+1)-k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

よって, $n=k+1$ のときも, ① は成り立つ。

i), ii) より, ① はすべての自然数 n について成り立つ。

(2) **別解** 漸化式から直接, 一般項 a_n を求める方法を紹介する。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$c = 2 - \frac{1}{c} \quad \text{とおくと, } c^2 - 2c + 1 = (c-1)^2 = 1 \quad \text{より, } c = 1$$

$$a_1 - 1 = 1, \quad a_{n+1} - 1 = 1 - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - 1}{a_n} \quad \text{であり, 式の各辺の逆数をとると,}$$

$$\frac{1}{a_1 - 1} = 1, \quad \frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n}{a_n - 1} = 1 + \frac{1}{a_n - 1}$$

よって, 数列 $\left\{ \frac{1}{a_n - 1} \right\}$ は, 初項 1, 公差 1 の等差数列であるから, $\frac{1}{a_n - 1} = n$

$$a_n - 1 = \frac{1}{n} \quad \text{より, } a_n = \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}$$

第3章 数列 章末問題 解答

1.

$$a_n = a + (n-1)d \quad \text{とおくと,}$$

$$a_4 = a + 3d = 14, \quad a_8 = a + 7d = 30 \quad \text{より, } a = 2, \quad d = 4$$

$$\text{よって, } a_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$$

(1) $4n - 2 = 70$ とおくと, $4n = 72$ より, $n = 18$ よって, 第18項

(2) $4n - 2 = 123$ とおくと, $4n = 125$ より, n は整数ではないので,

123 はこの数列の項ではない。

2.

等差数列 $\{a_n\}$: 1, 4, 7, …… の一般項は, $a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$ より,

$$a_{13} = 3 \cdot 13 - 2 = 37, \quad a_{24} = 3 \cdot 24 - 2 = 70 \quad \text{であるから,}$$

第13項から第24項までの和は,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12(37 + 70) = 6 \cdot 107 = 642$$

3.

$$1+2+2^2+\cdots+2^{14}=\frac{2^{15}-1}{2-1}=3\ 2\ 7\ 6\ 7\ (\text{円})$$

4.

(1) $a_n = ar^{n-1}$ とおくと,

$$a_2 + a_4 = ar + ar^3 = ar(1+r^2) = 20 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_4 + a_6 = ar^3 + ar^5 = ar^3(1+r^2) = 80 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ より, $r^2 = 4$ であり, $\textcircled{1}$ より, $r > 0$ であるから, $r = 2$

$\textcircled{1}$ に代入して, $10a = 20$ よって, $a = 2$

(2) (1) より, $a_n = 2^n$ であるから, $S_{10} = \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2\ 0\ 4\ 6$

5.

(1) $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}$ より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} = \frac{n^2 + 3n}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

(2) $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$ より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{3(n+1)(n+2) - 2(2n+3)}{2(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{3(n^2 + 3n + 2) - (4n + 6)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{3n^2 + 5n}{2(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

6.

$$\{a_n\} : 1, 1+3, 1+3+5, \cdots, 1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

この数列の一般項は, $a_n = n^2$ であるから,

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

7. (P 9 1 **練習 3 4** との違いに注意せよ)

$$S_n = n^2 + 1 \text{ のとき, } a_1 = S_1 = 1 + 1 = 2$$

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 1) - \{(n-1)^2 + 1\} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

8.

$\frac{1}{1} \mid \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \mid \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \mid \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} \mid \frac{1}{5}, \dots\dots\dots$ について,

(1) $\frac{3}{10}$ は第10群の3番目の項であり, この群数列の第 n 群には, n 個の項が含まれるので,

$$1+2+3+\dots\dots\dots+9+3=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10+3=48 \quad \text{より, 第48項}$$

(2) 最初から, 第 n 群の最後まで項数 $\frac{1}{2}n(n+1) \geq 100$ とおくと,

$$n(n+1) \geq 200 \quad \text{より, } n \geq 14$$

また, 第1群から第13群までの項数は, $1+2+3+\dots\dots\dots+13=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14=91$ であるから,

第100項は, 第14群の9番目の項なので, $\frac{9}{14}$

9.

(1) 1から100までの自然数のうち, 3の倍数は,

$3\times 1, 3\times 2, 3\times 3, \dots\dots\dots, 3\times 33$ より, その和は,

$$S=\frac{1}{2}\cdot 33(3+99)=33\cdot 51=1683$$

(2) 1から100までの自然数のうち, 4で割ると3余る数は,

$4\times 0+3, 4\times 1+3, 4\times 2+3, \dots\dots\dots, 4\times 24+3$ より, その和は,

$$S=\frac{1}{2}\cdot 25(3+99)=25\cdot 51=1275$$

10.

$1\cdot n, 2(n-1), 3(n-2), \dots\dots\dots, n\cdot 1$

(1) この数列の第 k 項は, $k(n-k+1)$

(2) この数列の和は,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n k(n-k+1) = -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)\sum_{k=1}^n k = -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

11.

(1) $S_n = 2a_n - 1 \dots\dots\dots$ ① より, $S_{n+1} = 2a_{n+1} - 1 \dots\dots\dots$ ②

$$\text{②}-\text{①} \quad \text{より, } a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n$$

$$\text{よって, } a_{n+1} = 2a_n$$

(2) ①において, $n=1$ のとき, $S_1 = 2a_1 - 1$ であり, $S_1 = a_1$ であるから,

$$a_1 = 2a_1 - 1 \quad \text{よって, } a_1 = 1$$

したがって, 数列 $\{a_n\}$ は, 初項1, 公比2の等比数列より, $a_n = 2^{n-1}$

12.

$$a_1 = 1, \quad n a_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) 漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると, $\frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n}{n}$ であるから, $b_n = \frac{a_n}{n}$ とおくと,

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = 2b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{よって, } b_n = 2^{n-1}$$

(2) (1) より, $\frac{a_n}{n} = 2^{n-1}$ よって, $a_n = n \cdot 2^{n-1}$

13.

n が自然数のとき, $2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ は5の倍数である …… ①

i) $n = 1$ のとき, $2^{2n-1} + 3^{2n-1} = 2 + 3 = 5$ より, ① は成り立つ。

ii) $n = 2$ のとき, $2^{2n-1} + 3^{2n-1} = 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$ より, ① は成り立つ。

iii) $n \leq k$ のとき, ① が成り立つと仮定すると, $2^{2k-3} + 3^{2k-3}$, $2^{2k-1} + 3^{2k-1}$ は5の倍数

$$\text{このとき, } 2^{2k+1} + 3^{2k+1} = (2^{2k-1} + 3^{2k-1})(2^2 + 3^2) - (2^{2k-1} \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^{2k-1})$$

$$= (2^{2k-1} + 3^{2k-1})(2^2 + 3^2) - 2^2 \cdot 3^2 (2^{2k-3} + 3^{2k-3}) \quad \text{も5の倍数}$$

よって, $n = k + 1$ のとき, ① は成り立つ。

i) ~ iii) より, ① はすべての自然数 n について成り立つ。