

## 数学B 第4章 確率分布と統計的な推測

### 第1節 確率分布

|       |                   |                     |
|-------|-------------------|---------------------|
| 1 限目  | P 1 0 8 ~ P 1 0 9 | 確率変数と確率分布           |
| 2 限目  | P 1 1 0 ~ P 1 1 2 | 確率変数の期待値            |
| 3 限目  | P 1 1 3 ~ P 1 1 4 | 確率変数の分散と標準偏差 (1)    |
| 4 限目  | P 1 1 5 ~ P 1 1 6 | 確率変数の分散と標準偏差 (2)    |
| 5 限目  | P 1 1 7 ~ P 1 1 9 | 確率変数の和の期待値          |
| 6 限目  | P 1 2 0 ~ P 1 2 2 | 独立な確率変数の積の期待値, 和の分散 |
| 7 限目  | P 1 2 3 ~ P 1 2 6 | 二項分布                |
| 8 限目  | P 1 2 7 ~ P 1 3 1 | 正規分布                |
| 9 限目  | P 1 3 2           | 正規分布の応用             |
| 10 限目 | P 1 3 3 ~ P 1 3 4 | 二項分布の正規分布による近似      |
| 11 限目 | P 1 3 6           | 補充問題                |

### 第2節 統計的な推測

|      |                   |                |
|------|-------------------|----------------|
| 1 限目 | P 1 3 7 ~ P 1 4 0 | 母集団と母平均, 母標準偏差 |
| 2 限目 | P 1 4 1 ~ P 1 4 2 | 標本平均の期待値と標準偏差  |
| 3 限目 | P 1 4 3           | 標本平均と正規分布      |
| 4 限目 | P 1 4 4 ~ P 1 4 5 | 標本比率と正規分布      |
| 5 限目 | P 1 4 6 ~ P 1 4 7 | 母平均の推定         |
| 6 限目 | P 1 4 8 ~ P 1 4 9 | 母比率の推定         |
| 7 限目 | P 1 5 0           | 補充問題           |
| 8 限目 | P 1 5 1           | 章末問題A          |
| 9 限目 | P 1 5 2           | 章末問題B          |

## 第 1 節 確率分布 練習問題 解答

### 練習 1

Y のとりうる値は 0, 1, 2, 3, 4, 5 であり, Y の確率分布は下の表のとおり。

| Y | 0              | 1               | 2              | 3              | 4              | 5              | 計 |
|---|----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|
| P | $\frac{6}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | 1 |

$$\text{よって, } P(1 \leq Y \leq 3) = \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

### 練習 2

Y のとりうる値は 2, 3 であり,

$$P(Y=2) = \frac{{}_2C_2 \times {}_3C_2}{{}_5C_4} = \frac{3}{5}, \quad P(Y=3) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_3}{{}_5C_4} = \frac{2}{5}$$

よって, Y の確率分布は右の表のとおり。

| Y | 2             | 3             | 計 |
|---|---------------|---------------|---|
| P | $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 1 |

### 練習 3

$$(1) \quad E(X) = \frac{1}{36}(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1) = \frac{252}{36} = 7$$

$$(2) \quad E(X) = \frac{1}{10}(1 \cdot 6 + 2 \cdot 3) = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

### 練習 4

$$(1) \quad E(X+2) = E(X) + 2 = \frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2}$$

$$(2) \quad E(4X-1) = 4E(X) - 1 = 4 \cdot \frac{7}{2} - 1 = 13$$

$$(3) \quad E(-3X) = -3E(X) = -3 \cdot \frac{7}{2} = -\frac{21}{2}$$

### 練習 5

X のとりうる値は 0, 1, 2 であり, X の確率分布は右の表のとおりであるから,

$$E(X^2) = \frac{1}{4}(1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 1) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

| X | 0             | 1             | 2             | 計 |
|---|---------------|---------------|---------------|---|
| P | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

### 練習 6

X の確率分布は右の表のとおりであるから,

$$E(X) = \frac{1}{10}(1 \cdot 6 + 2 \cdot 3) = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \quad \text{より,}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{10} \left\{ \left( -\frac{6}{5} \right)^2 \cdot 1 + \left( -\frac{1}{5} \right)^2 \cdot 6 + \left( \frac{4}{5} \right)^2 \cdot 3 \right\} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{90}{25} = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

| X | 0              | 1              | 2              | 計 |
|---|----------------|----------------|----------------|---|
| P | $\frac{1}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | 1 |

### 練習 7

X の確率分布は右の表のとおりであるから、

$$E(X) = \frac{1}{10}(1 \cdot 6 + 2 \cdot 3) = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{10}(1^2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 3) = \frac{18}{10} = \frac{9}{5} \quad \text{より、}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{9}{5} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{9}{5} - \frac{36}{25} = \frac{9}{25}$$

|   |                |                |                |   |
|---|----------------|----------------|----------------|---|
| X | 0              | 1              | 2              | 計 |
| P | $\frac{1}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | 1 |

### 練習 8

X の確率分布は右の表のとおりであるから、

$$(1) \quad E(X) = \frac{1}{6}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6}(1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 1) = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{より、}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$(2) \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

|   |               |               |               |   |
|---|---------------|---------------|---------------|---|
| X | 0             | 1             | 2             | 計 |
| P | $\frac{3}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

### 練習 9

1 個のさいころを投げて出る目を X とすると、

$$E(X) = \frac{7}{2}, \quad V(X) = \frac{35}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{105}}{6} \quad \text{であるから、}$$

(1)  $Y = X + 4$  のとき、

$$E(Y) = E(X) + 4 = \frac{15}{2}, \quad V(Y) = V(X) = \frac{35}{12}, \quad \sigma(Y) = \sigma(X) = \frac{\sqrt{105}}{6}$$

(2)  $Y = -2X$  のとき、

$$E(Y) = -2E(X) = -7, \quad V(Y) = 4V(X) = \frac{35}{3}, \quad \sigma(Y) = 2\sigma(X) = \frac{\sqrt{105}}{3}$$

(3)  $Y = 3X - 2$  のとき、

$$E(Y) = 3E(X) - 2 = \frac{17}{2}, \quad V(Y) = 9V(X) = \frac{105}{4}, \quad \sigma(Y) = 3\sigma(X) = \frac{\sqrt{105}}{2}$$

### 練習 10

|   |               |               |               |   |
|---|---------------|---------------|---------------|---|
| X | 1             | 3             | 5             | 計 |
| P | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

|   |               |               |               |   |
|---|---------------|---------------|---------------|---|
| Y | 2             | 4             | 6             | 計 |
| P | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

$$E(X) = \frac{1}{3}(1+3+5) = 3, \quad E(Y) = \frac{1}{3}(2+4+6) = 4 \quad \text{より、}$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3 + 4 = 7$$

### 練習 1 1

確率変数  $X$  の確率分布は、右の表のとおりなので、

$$E(X) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}, \text{ 同様に, } E(Y) = E(Z) = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, } E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = \frac{3}{2}$$

|   |               |               |   |
|---|---------------|---------------|---|
| X | 0             | 1             | 計 |
| P | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

### 練習 1 2

1 回目にさいころを投げて出る目を  $X$ , 2 回目にさいころを投げて出る目を  $Y$  とすると、

$$E(X) = \frac{7}{2}, \quad E(Y) = \frac{7}{2} \quad \text{であるから,}$$

$$E(10X + 5Y) = 10E(X) + 5E(Y) = \frac{7}{2}(10+5) = \frac{105}{2}$$

### 練習 1 3

|   |               |               |   |
|---|---------------|---------------|---|
| X | 1             | 3             | 計 |
| P | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

|   |               |               |   |
|---|---------------|---------------|---|
| Y | 2             | 4             | 計 |
| P | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 |

$$E(X) = \frac{1}{3}(1 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = \frac{5}{3}, \quad E(Y) = \frac{1}{5}(2 \cdot 4 + 4 \cdot 1) = \frac{12}{5} \quad \text{より,}$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{5}{3} \cdot \frac{12}{5} = 4$$

### 練習 1 4

$$(1) \quad E(X^2) = \frac{1}{3}(1^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 1) = \frac{11}{3} \quad \text{より, } V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{11}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{5}(2^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 1) = \frac{32}{5} \quad \text{より, } V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{32}{5} - \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\text{よって, } V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \frac{8}{9} + \frac{16}{25} = \frac{344}{225}$$

$$(2) \quad \sigma(X+Y) = \sqrt{V(X+Y)} = \sqrt{\frac{344}{225}} = \frac{\sqrt{344}}{15} = \frac{2\sqrt{86}}{15}$$

### 練習 1 5

大, 中, 小のさいころを投げて出た目をそれぞれ,  $X, Y, Z$  とすると,  $X, Y, Z$  は

互いに独立で,  $E(X) = E(Y) = E(Z) = \frac{7}{2}, \quad V(X) = V(Y) = V(Z) = \frac{35}{12}$  であるから,

$$(1) \quad E(XYZ) = E(X)E(Y)E(Z) = \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{343}{8}$$

$$(2) \quad V(X+Y+Z) = V(X) + V(Y) + V(Z) = \frac{35}{12} \times 3 = \frac{35}{4}$$

### 練習 1 6

$$P(X=0) = {}_5C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

$$P(X=1) = {}_5C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243}$$

$$P(X=2) = {}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}, \quad P(X=3) = {}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$$

$$P(X=4) = {}_5C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{243}, \quad P(X=5) = {}_5C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} \quad \text{より, } B\left(5, \frac{1}{3}\right) \text{ に従う。}$$

$$\text{また, } P(2 \leq X \leq 4) = \frac{80}{243} + \frac{40}{243} + \frac{10}{243} = \frac{130}{243}$$

| X | 0                | 1                | 2                | 3                | 4                | 5               | 計 |
|---|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|---|
| P | $\frac{32}{243}$ | $\frac{80}{243}$ | $\frac{80}{243}$ | $\frac{40}{243}$ | $\frac{10}{243}$ | $\frac{1}{243}$ | 1 |

### 練習 1 7

確率変数  $X$  が二項分布  $B\left(9, \frac{2}{3}\right)$  に従うとき,

$$E(X) = 9 \cdot \frac{2}{3} = 6, \quad V(X) = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 2, \quad \sigma(X) = \sqrt{2}$$

### 練習 1 8

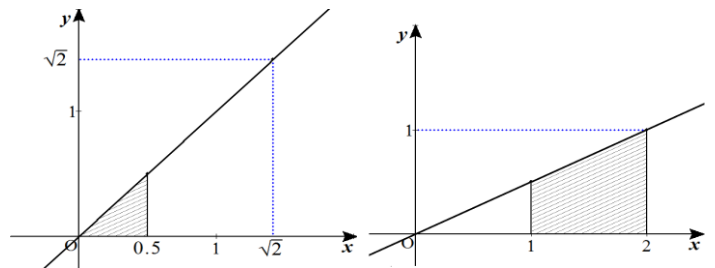
1 個のさいころを 100 回投げて偶数の目が出る回数  $X$  は, 二項分布  $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$  に従うので,

$$E(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50, \quad V(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25, \quad \sigma(X) = 5$$

### 練習 1 9

$$(1) P(0 \leq X \leq 0.5) = \int_0^{0.5} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0.5} = 0.125$$

$$(2) P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 0.5x dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 0.75$$



### 練習 2 0

$$m = 2, \quad \sigma = 3$$

### 練習 2 1

$$(1) P(-2 \leq Z \leq 2) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 2) = 2 \times 0.4772 = 0.9544$$

$$(2) P(1 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

### 練習 2 2

$X$  が正規分布  $N(2, 5^2)$  に従うとき,  $Z = \frac{X-2}{5}$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う。

$$(1) P(2 \leq X \leq 12) = P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$$

$$(2) P(0 \leq X \leq 5) = P(-0.4 \leq Z \leq 0.6) = P(0 \leq Z \leq 0.4) + P(0 \leq Z \leq 0.6) \\ = 0.1554 + 0.2257 = 0.3811$$

### 練習 2 3

$X$  が正規分布  $N(170.5, 5.4^2)$  に従うとき,  $Z = \frac{X - 170.5}{5.4}$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う。

$$(1) P(X \geq 180) = P(Z \geq 1.76) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.76) = 0.5 - 0.4608 = 0.0392 \quad \text{より, 約 } 4\%$$

$$(2) P(0 \leq Z \leq 1.88) = 0.4699 \quad \text{より,}$$

$$P(X \geq 170.5 + 5.4 \times 1.88) = P(Z \geq 1.88) = 0.5 - 0.4699 = 0.0301$$

$$P(X \geq 180.65) = 0.0301 \quad \text{よって, } 180.7 \text{ cm}$$

$$(3) P(165 \leq X \leq 170) = P(-1 \leq Z \leq -0.1) = P(0 \leq Z \leq 1) - P(0 \leq Z \leq 0.1) \\ = 0.3413 - 0.0398 = 0.3115 \quad \text{より, 約 } 30\%$$

### 練習 2 4

1 個のさいころを 180 回投げて 1 の目が出る回数  $X$  は, 二項分布  $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$  に従うので,

$$E(X) = 180 \cdot \frac{1}{6} = 30, \quad V(X) = 180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 25$$

回数 180 は十分大きいので,  $X$  は正規分布  $N(30, 5^2)$  に従うと考えてよい。よって,

$$Z = \frac{X - 30}{5} \quad \text{は標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従う。}$$

$$\text{したがって, } P(20 \leq X \leq 45) = P(-2 \leq Z \leq 3) = P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ = 0.4772 + 0.49865 = 0.97585$$

## 第 1 節 確率分布 補充問題 解答

1.

$$E(X) = m, \quad \sigma(X) = \sigma \quad \text{のとき, } Y = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} X - \frac{m}{\sigma} \quad \text{とおくと,}$$

$$E(Y) = \frac{1}{\sigma} E(X) - \frac{m}{\sigma} = \frac{m}{\sigma} - \frac{m}{\sigma} = 0, \quad \sigma(Y) = \frac{1}{\sigma} \sigma(X) = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$$

2.

1 枚の硬貨を 400 回投げて表が出る回数  $X$  は, 二項分布  $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$  に従うので,

$$E(X) = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200, \quad V(X) = 400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 100$$

回数 400 は十分大きいので,  $X$  は正規分布  $N(200, 10^2)$  に従うと考えてよい。よって,

$$Z = \frac{X - 200}{10} \quad \text{は標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従う。このとき,}$$

$$\left| \frac{X}{400} - \frac{1}{2} \right| \leq 0.05 \quad \text{つまり, } |X - 200| \leq 20 \quad \text{となる確率は,}$$

$$P(180 \leq X \leq 220) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 2) = 2 \times 0.4772 = 0.9544$$

## 第2節 統計的な推測 練習問題 解答

### 練習25 省略

### 練習26 ${}_{100}C_5$

### 練習27

母集団分布は、右の表のとおり。

母平均を  $m$ ，母標準偏差を  $\sigma$  とおくと、

$$m = \frac{1}{40}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 2) = \frac{120}{40} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{40}\{(1-3)^2 \cdot 2 + (2-3)^2 \cdot 6 + (3-3)^2 \cdot 24 + (4-3)^2 \cdot 6 + (5-3)^2 \cdot 2\} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10} \quad \text{より,}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{70}}{10}$$

| X | 1              | 2              | 3               | 4              | 5              | 計 |
|---|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|---|
| P | $\frac{2}{40}$ | $\frac{6}{40}$ | $\frac{24}{40}$ | $\frac{6}{40}$ | $\frac{2}{40}$ | 1 |

### 練習28

母平均  $m = 170$ ，母標準偏差を  $\sigma = 8$  の十分大きい母集団から取り出した、大きさ16の標本の標本平均  $\bar{X}$  について、

$$E(\bar{X}) = m = 170, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$$

### 練習29

母平均  $m = 50$ ，母標準偏差を  $\sigma = 20$  の十分大きい母集団から取り出した、大きさ400の標本の標本平均  $\bar{X}$  について、

$$E(\bar{X}) = m = 50, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{400}} = \frac{20}{20} = 1 \quad \text{であるが、標本の大きさ400は十分大きい}$$

ので、 $\bar{X}$  は近似的に正規分布  $N(50, 1^2)$  に従う。よって、 $Z = \bar{X} - 50$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従うので、

$$P(\bar{X} \leq 48) = P(Z \leq -2) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

### 練習30

1回につき事象が起きる確率が  $p$  の試行を  $n$  回行ったとき、事象が起きた回数  $X$  は、 $n$  が十分大きければ、近似的に正規分布  $N(np, npq)$  に従う。よって、事象が起きる相対度数  $R = \frac{X}{n}$  は、近似的に正規分布  $N(p, \frac{pq}{n})$  に従う。

よって、1枚の硬貨を  $n$  回投げるとき、 $p = q = \frac{1}{2}$  より、表が出る相対度数  $R$  は、近似的に

正規分布  $N(\frac{1}{2}, \frac{1}{4n})$  に従う。

(1)  $n = 100$  のとき、 $R$  は正規分布  $N(\frac{1}{2}, \frac{1}{400})$  に従うので、

$$P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right) = P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{20}\right) = P(|Z| \leq 1) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 1) = 2 \times 0.3413 = 0.6826$$

(2)  $n = 400$  のとき,  $R$  は正規分布  $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1600}\right)$  に従うので,

$$P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right) = P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{40} \times 2\right) = P(|Z| \leq 2) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 2) = 2 \times 0.4772 = 0.9544$$

(3)  $n = 900$  のとき,  $R$  は正規分布  $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3600}\right)$  に従うので,

$$P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right) = P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{60} \times 3\right) = P(|Z| \leq 3) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 3) = 2 \times 0.49865 = 0.9973$$

### 練習 3 1

母平均を  $m$ , 母標準偏差を  $\sigma$  とする。母集団から 100 個を無作為抽出したときの標本平均を  $\bar{X}$  とすると,  $\bar{X}$  は正規分布  $N\left(m, \frac{\sigma^2}{100}\right)$  に従うと考えてよいので,  $\bar{X}$  の信頼度 95% の信頼区間は,

$$P\left(m - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq \bar{X} \leq m + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}}\right) = 0.95 \quad \text{であり, ここから,}$$

$$P\left(\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}}\right) = 0.95 \quad \text{である。}$$

ここで,  $\bar{X} = 103.4$  であり, 母標準偏差  $\sigma$  の代わりに, 標本標準偏差  $s = 1.5$  を用いてよいので,  $\sigma = 1.5$  とすると, 母平均  $m$  の信頼度 95% の信頼区間は,

$$103.4 - 1.96 \cdot \frac{1.5}{10} \leq m \leq 103.4 + 1.96 \cdot \frac{1.5}{10} \quad \text{すなわち, } 103.1 \leq m \leq 103.7 \quad \text{である。}$$

### 練習 3 2

1 回につき事象が起きる確率 (母比率)  $p$  の試行を  $n$  回行ったとき, 事象が起きた回数  $X$  は,  $n$  が十分大きければ, 近似的に正規分布  $N(np, npq)$  に従う。よって, 事象が起きる相対度数

$R = \frac{X}{n}$  は, 近似的に正規分布  $N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$  に従う。ここで,  $\frac{pq}{n}$  において, 母比率  $p$  の

代わりに, 標本比率  $R$  を用いると, 標本比率  $R$  の信頼度 95% の信頼区間は,

$$P\left(p - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leq R \leq p + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right) = 0.95 \quad \text{であり, ここから,}$$

$$P\left(R - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leq p \leq R + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right) = 0.95 \quad \text{である。}$$

ここで,  $n = 900$ ,  $R = \frac{324}{900} = \frac{9}{25}$  より, 母比率  $p$  の信頼度 95% の信頼区間は,

$$\frac{9}{25} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{900} \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{16}{25}} \leq p \leq \frac{9}{25} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{900} \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{16}{25}} \quad \text{すなわち,}$$

$$0.36 - 1.96 \times 0.016 \leq p \leq 0.36 + 1.96 \times 0.016$$

$$0.329 \leq p \leq 0.391$$

## 第2節 統計的な推測 補充問題 解答

3.

確率変数  $X_1 + X_2 + \cdots + X_{30}$  は、二項分布  $B(30, \frac{1}{6})$  に従うので、

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{30}) = 30 \cdot \frac{1}{6} = 5, \quad \sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_{30}) = \sqrt{30 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

よって、 $\bar{X} = \frac{1}{30}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{30})$  とおくと、

$$\text{よって、} E(\bar{X}) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{5}{30\sqrt{6}} = \frac{1}{6\sqrt{6}}$$

4.

$P(0 \leq Z \leq 2.58) = 0.4951$  であるから、

$P(|Z| \leq a) = 0.99$  となるとき、 $a = 2.58$

## 第2章 確率分布と統計的な推測 章末問題 解答

1.

$$(1) P(X=0) = \frac{{}_5C_4}{{}_8C_4} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \cdot {}_5C_3}{{}_8C_4} = \frac{30}{70} = \frac{6}{14}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \cdot {}_5C_2}{{}_8C_4} = \frac{30}{70} = \frac{6}{14}, \quad P(X=3) = \frac{{}_3C_3 \cdot {}_5C_1}{{}_8C_4} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14} \quad \text{より、}$$

$$E(X) = \frac{1}{14}(1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1) = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{14}(1^2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 6 + 3^2 \cdot 1) = \frac{39}{14} \quad \text{であるから、}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{39}{14} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{39}{14} - \frac{9}{4} = \frac{15}{28}$$

$$(2) Y \text{ は二項分布 } B(4, \frac{3}{8}) \text{ に従うので、} E(Y) = 4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{2}, \quad V(Y) = 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{16}$$

2.

発芽率が80%の種子を400個まいたとき、発芽する個数をXとすると、Xは二項分布

$$B(400, \frac{4}{5}) \text{ に従うので、} E(X) = 400 \cdot \frac{4}{5} = 320, \quad \sigma(X) = \sqrt{400 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}} = 8$$

3.

$P(|X - m| > k\sigma) = P(|Z| > k) = 1 - 2P(0 \leq Z \leq k)$  より、

$$(1) 1 - 2P(0 \leq Z \leq k) = 0.006 \quad \text{とおくと、} P(0 \leq Z \leq k) = 0.497 \quad \text{より、} k = 2.76$$

$$(2) 1 - 2P(0 \leq Z \leq k) = 0.242 \quad \text{とおくと、} P(0 \leq Z \leq k) = 0.379 \quad \text{より、} k = 1.17$$

4.

この製品 2 5 0 0 個中に含まれる不良品の個数  $X$  は、二項分布  $B(2500, \frac{1}{50})$  に従うので、

$$E(X) = 2500 \cdot \frac{1}{50} = 50, \quad V(X) = 2500 \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{49}{50} = 49$$

2 5 0 0 は十分に大きい数なので、 $X$  は正規分布  $N(50, 7^2)$  に従うと考えてよい。このとき、

$$P(X \leq 36) = P(Z \leq -2) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

5.

この試験の成績を表す確率変数  $X$  は、正規分布  $N(62, 8^2)$  に従うので、

$$P(X \geq 62 + 8k) = P(Z \geq k) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq k) = 0.1 \quad \text{とおくと、}$$

$$P(0 \leq Z \leq k) = 0.4 \quad \text{より、} \quad k = 1.28$$

よって、 $62 + 8k = 72.24$  より、73 点以上

6.

求める視聴率を  $p$  とする。モニター TV による調査を  $n$  回行ったとき、当該番組が視聴された回数  $X$  は、 $n$  が十分大きければ、近似的に正規分布  $N(np, npq)$  に従う。よって、事象が起きる相対度数  $R = \frac{X}{n}$  は、近似的に正規分布  $N(p, \frac{pq}{n})$  に従う。ここで、 $\frac{pq}{n}$  において、視聴率  $p$  の代わりに、標本比率  $R$  を用いると、標本比率  $R$  の信頼度 95% の信頼区間は、

$$P\left(p - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leq R \leq p + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right) = 0.95 \quad \text{であり、ここから、}$$

$$P\left(R - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leq p \leq R + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right) = 0.95 \quad \text{である。}$$

ここで、 $n = 625$ 、 $R = \frac{125}{625} = \frac{1}{5}$  より、視聴率  $p$  の信頼度 95% の信頼区間は、

$$\frac{1}{5} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{625} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} \leq p \leq \frac{1}{5} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{625} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} \quad \text{すなわち、}$$

$$0.2 - 1.96 \times 0.016 \leq p \leq 0.2 + 1.96 \times 0.016$$

$$0.169 \leq p \leq 0.231$$

7.

(1) 1 枚の硬貨を 6 回投げて、表が出た回数を  $Y$  とすると、 $Y$  は二項分布  $B(6, \frac{1}{2})$  に従う。

|   |                |                |                 |                 |                 |                |                |   |
|---|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|---|
| Y | 0              | 1              | 2               | 3               | 4               | 5              | 6              | 計 |
| P | $\frac{1}{64}$ | $\frac{6}{64}$ | $\frac{15}{64}$ | $\frac{20}{64}$ | $\frac{15}{64}$ | $\frac{6}{64}$ | $\frac{1}{64}$ | 1 |

$X = Y - (6 - Y) = 2Y - 6$  であるから、 $X$  の確率分布は下のとおり。

|   |                |                |                 |                 |                 |                |                |   |
|---|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|---|
| X | -6             | -4             | -2              | 0               | 2               | 4              | 6              | 計 |
| P | $\frac{1}{64}$ | $\frac{6}{64}$ | $\frac{15}{64}$ | $\frac{20}{64}$ | $\frac{15}{64}$ | $\frac{6}{64}$ | $\frac{1}{64}$ | 1 |

$$(2) (1) \text{において, } E(Y) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3, \quad \sigma(Y) = \sqrt{6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ より,}$$

$$E(X) = E(2Y - 6) = 2E(Y) - 6 = 0, \quad \sigma(X) = \sigma(2Y - 6) = 2\sigma(Y) = \sqrt{6}$$

8.

確率変数  $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$  は, 二項分布  $B(4, \frac{1}{3})$  に従うので,

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \quad V(X) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}, \quad \sigma(X) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

9.

この試験の成績を表す確率変数  $X$  は, 正規分布  $N(285, 72^2)$  に従うので,

$$P(X \geq 285 + 72k) = P(Z \geq k) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq k) = \frac{400}{2600} \doteq 0.154 \text{ とおくと,}$$

$$P(0 \leq Z \leq k) \doteq 0.346 \text{ より, } k = 1.02$$

よって,  $285 + 72k = 358.44$  より, 359点以上

10.

1900個の商品に含まれる模造品の数を  $X$  とすると,  $X$  は二項分布  $B(1900, \frac{1}{20})$  に従うので,

$$E(X) = 1900 \cdot \frac{1}{20} = 95, \quad \sigma(X) = \sqrt{1900 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20}} = \frac{19}{2}$$

ここで, 1900個の商品に含まれる模造品の率  $R = \frac{X}{1900}$  であるから,

$$E(R) = \frac{E(X)}{1900} = \frac{1}{20} = 0.05, \quad \sigma(R) = \frac{\sigma(X)}{1900} = \frac{1}{200} = 0.005$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } P(0.035 \leq R \leq 0.065) &= P\left(\frac{1}{20} - 3 \cdot \frac{1}{200} \leq R \leq \frac{1}{20} + 3 \cdot \frac{1}{200}\right) = P(-3 \leq Z \leq 3) \\ &= 2 \times P(0 \leq Z \leq 3) = 2 \times 0.69865 = 0.9973 \end{aligned}$$

11.

高校2年生の男子の母集団について, その身長之母平均  $m = 170$ , 母標準偏差  $\sigma = 4$  である。

この母集団から抽出した64人の身長の標本平均を  $\bar{X}$  とすると,

$$E(\bar{X}) = m = 170, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{64}} = \frac{1}{2} \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} P(169 \leq \bar{X} \leq 171) &= P\left(170 - 2 \cdot \frac{1}{2} \leq \bar{X} \leq 170 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= 2 \times P(0 \leq Z \leq 2) = 2 \times 0.4772 = 0.9544 \end{aligned}$$