数学Ⅲ　第５章　微分法

第１節　導関数

１限目　Ｐ１２８～Ｐ１３０　微分係数，微分可能と連続
２限目　Ｐ１３１～Ｐ１３３　導関数，導関数の性質
３限目　Ｐ１３４～Ｐ１３５　積の導関数，商の導関数，x^n の導関数
４限目　Ｐ１３６～Ｐ１３７　合成関数の微分法
５限目　Ｐ１３８～Ｐ１４０　逆関数の微分法
６限目　Ｐ１４１　補充問題

第２節　いろいろな関数の導関数

１限目　Ｐ１４２～Ｐ１４３　三角関数の導関数
２限目　Ｐ１４４～Ｐ１４６　対数関数の導関数
３限目　Ｐ１４７～Ｐ１４８　指数関数の導関数，対数微分法
４限目　Ｐ１４９　第ｎ次導関数
５限目　Ｐ１５０～Ｐ１５１　陰関数の導関数
６限目　Ｐ１５２～Ｐ１５３　媒介変数表示された関数の導関数
７限目　Ｐ１５４　補充問題
８限目　Ｐ１５５　章末問題Ａ
９限目　Ｐ１５６　章末問題Ｂ

第１節　導関数　練習問題 解答

練習１

関数 $f(x)=\sqrt{x}$ について，

（１） $f'(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\dfrac{1}{2}$

（２） $f'(2)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{(2+h)-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

練習２

関数 $f(x)=\sqrt{x}$ について，

$f'(3)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{(3+h)-3}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

練習３

（１）関数 $f(x)=|x-1|$ について， $f(x)$ は $x=1$ で連続であるが，

$\lim_{h\to +0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to +0}\dfrac{|h|}{h}=\lim_{h\to +0}\dfrac{h}{h}=1$

$\lim_{h\to -0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to -0}\dfrac{|h|}{h}=\lim_{h\to -0}\dfrac{-h}{h}=-1$　より，

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能でない。

（２）関数 $f(x)=|x^2-1|$ について， $f(x)$ は $x=1$ で連続であるが，

$\lim_{h\to +0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to +0}\dfrac{|(1+h)^2-1|}{h}=\lim_{h\to +0}\dfrac{|h^2+2h|}{h}=\lim_{h\to +0}\dfrac{h(h+2)}{h}=2$

$\lim_{h\to -0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to -0}\dfrac{|(1+h)^2-1|}{h}=\lim_{h\to -0}\dfrac{|h^2+2h|}{h}=\lim_{h\to -0}\dfrac{-h(h+2)}{h}=-2$　より，

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能でない。

練習４

（１） $f(x)=\dfrac{1}{2x}$　のとき，

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{2(x+h)}-\dfrac{1}{2x}\right\}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{2h}\cdot\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-1}{2x(x+h)}=-\dfrac{1}{2x^2}$

（２） $f(x)=\sqrt{x}$　のとき，

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

練習５

（１） $y=x^5+2x^4$ 　のとき， $y'=5x^4+8x^3$

（２） $y=3x^6-4x^3$ 　のとき， $y'=18x^5-12x^2$

（３） $y=(x+1)(x^3-4x)=x^4+x^3-4x^2-4x$ 　のとき， $y'=4x^3+3x^2-8x-4$

（４） $y=(3x^2-2)(x^2+x+1)=3x^4+3x^3+x^2-2x-2$ 　のとき， $y'=12x^3+9x^2+2x-2$

練習６

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}-f(x)\cdot\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

練習７

（１） $y=\dfrac{1}{2x-3}$ 　のとき， $y'=-\dfrac{(2x-3)'}{(2x-3)^2}=-\dfrac{2}{(2x-3)^2}$

（２） $y=\dfrac{x}{x^2-2}$ 　のとき， $y'=\dfrac{x'(x^2-2)-x(x^2-2)'}{(x^2-2)^2}=\dfrac{(x^2-2)-2x^2}{(x^2-2)^2}=-\dfrac{x^2+2}{(x^2-2)^2}$

（３） $y=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$ 　のとき， $y'=\dfrac{(2x-1)'(x^2+1)-(2x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(x^2+1)-2x(2x-1)}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$$

練習８

（１） $y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ 　のとき， $y'=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$

（２） $y=\dfrac{1}{x^3}=x^{-3}$ 　のとき， $y'=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$

（２） $y=-\dfrac{4}{x^2}=-4x^{-2}$ 　のとき， $y'=8x^{-3}=\dfrac{8}{x^3}$

練習９

（１） $y=(x^2+3x+1)^3$ 　のとき， $y'=3(x^2+3x+1)^2(x^2+3x+1)'=3(x^2+3x+1)^2(2x+3)$

（２） $y=(ax+b)^6$ 　のとき， $y'=6(ax+b)^5(ax+b)'=6a(ax+b)^5$

（３） $y=\dfrac{1}{(2x^2+3)^2}=(2x^2+3)^{-2}$ 　のとき， $y'=-2(2x^2+3)^{-3}(2x^2+3)'=-\dfrac{8x}{(2x^2+3)^3}$

（４） $y=\dfrac{1}{(ax+b)^3}=(ax+b)^{-3}$ 　のとき， $y'=-3(ax+b)^{-4}(ax+b)'=-\dfrac{3a}{(ax+b)^4}$

練習１０

（１） $y=(3x+1)^4$ 　のとき， $y'=4(3x+1)^3(3x+1)'=12(3x+1)^3$

（２） $y=(2x^2+5)^3$ 　のとき， $y'=3(2x^2+5)^2(2x^2+5)'=12x(2x^2+5)^2$

（３） $y=(1-2x^2)^3$ 　のとき， $y'=3(1-2x^2)^2(1-2x^2)'=-12x(1-2x^2)^2$

（４） $y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}=(x^2+1)^{-3}$ 　のとき， $y'=-3(x^2+1)^{-4}(x^2+1)'=-\dfrac{6x}{(x^2+1)^4}$

練習１１

$y=\sqrt[6]{x}$ を x について解くと，$x=y^6$ であるから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{6y^5}=\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

練習１２

（１）$y=\sqrt[8]{x}=x^{\frac{1}{8}}$ のとき，$y'=\frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}=\frac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$

（２）$y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ のとき，$y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

（３）$y=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$ のとき，$y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

第１節　導関数　補充問題 解答

１．

$y=f(x)g(x)h(x)$ のとき，

$$\begin{aligned}y'=\{f(x)g(x)h(x)\}'&=\{f(x)g(x)\}'h(x)+\{f(x)g(x)\}h'(x)\\&=\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}h(x)+\{f(x)g(x)\}h'(x)\\&=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

$y=(x^2+1)(x+2)(3x-4)$ のとき，

$$\begin{aligned}y'&=(x^2+1)'(x+2)(3x-4)+(x^2+1)(x+2)'(3x-4)+(x^2+1)(x+2)(3x-4)'\\&=2x(x+2)(3x-4)+(x^2+1)(3x-4)+3(x^2+1)(x+2)\\&=2x(3x^2+2x-8)+(3x^3-4x^2+3x-4)+3(x^3+2x^2+x+2)\\&=12x^3+6x^2-10x+2\end{aligned}$$

２．

（１）$\frac{d}{dx}f(ax+b)=f'(ax+b)\cdot(ax+b)'=a\,f'(ax+b)$

（２）$\frac{d}{dx}\{f(x)\}^p=p\{f(x)\}^{p-1}f'(x)$

３．

（１）$y=\sqrt{4-x^2}=(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$ のとき，$y'=\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(4-x^2)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

（２）$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ のとき，

$$y'=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x^2)'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}(-2x)=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

第２節　いろいろな関数の導関数　練習問題 解答

練習１３

（１） $y=\cos 2x$ 　のとき， $y'=-\sin 2x\cdot(2x)'=-2\sin 2x$

（２） $y=\sqrt{2}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 　のとき， $y'=\sqrt{2}\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)'=3\sqrt{2}\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

（３） $y=\sin^2 x$ 　のとき， $y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

（４） $y=\tan^2 x$ 　のとき， $y'=2\tan x\cdot(\tan x)'=2\tan x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$

（５） $y=\dfrac{1}{\sin x}=(\sin x)^{-1}$ 　のとき， $y'=-(\sin x)^{-2}\cdot(\sin x)'=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

（６） $y=\cos^2 3x$ 　のとき， $y'=2\cos 3x\cdot(\cos 3x)'=2\cos 3x\cdot(-3\sin 3x)=-6\sin 3x\cos 3x=-3\sin 6x$

練習１４

（１） $y=\log 3x$ 　のとき， $y'=\dfrac{1}{3x}\cdot(3x)'=\dfrac{1}{x}$

（２） $y=\log_2(4x-1)$ 　のとき， $y'=\dfrac{1}{(4x-1)\log 2}\cdot(4x-1)'=\dfrac{4}{(4x-1)\log 2}$

（３） $y=\log(x^2+1)$ 　のとき， $y'=\dfrac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'=\dfrac{2x}{x^2+1}$

（４） $y=x\log x-x$ 　のとき， $y'=\left(\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)-1=\log x$

練習１５　省略

練習１６

（１） $y=\log|3x+2|$ 　のとき， $y'=\dfrac{1}{3x+2}\cdot(3x+2)'=\dfrac{3}{3x+2}$

（２） $y=\log|\sin x|$ 　のとき， $y'=\dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{\tan x}$

（３） $y=\log_5|2x-1|$ 　のとき， $y'=\dfrac{1}{(2x-1)\log 5}\cdot(2x-1)'=\dfrac{2}{(2x-1)\log 5}$

（４） $y=\log_2|x^2-4|$ 　のとき， $y'=\dfrac{1}{(x^2-4)\log 2}\cdot(x^2-4)'=\dfrac{2x}{(x^2-4)\log 2}$

練習１７　省略

練習１８

（１） $y=e^{2x}$ 　のとき， $y'=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}$

（２） $y=e^{-x^2}$ 　のとき， $y'=e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$

（３） $y=3^x$ 　のとき， $y'=3^x\log 3$

（４） $y=2^{-3x}$ 　のとき， $y'=2^{-3x}\log 2\cdot(-3x)'=-3\cdot 2^{-3x}\log 2$

（５） $y=xe^x$ 　のとき， $y'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

（６） $y=(2x-1)a^x$ 　のとき， $y'=2a^x+(2x-1)a^x\log a=\{(2x-1)\log a+2\}a^x$

研究 練習１

$y = x^x$ 　のとき，

両辺の対数をとると，$\log y = x \log x$

両辺を x で微分すると，$\dfrac{y'}{y} = \log x + 1$ 　より，

$y' = (\log x + 1)\,y = (\log x + 1)\,x^x$

練習１９

（１） $y = a x^3$ 　のとき，

$y' = 3a x^2$，　$y'' = 6a x$，　$y''' = 6a$

（２） $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ 　のとき，

$y' = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$，　$y'' = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$，　$y''' = -6x^{-4} = -\dfrac{6}{x^4}$

（３） $y = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ 　のとき，

$y' = \dfrac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$，　$y'' = -\dfrac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{4\sqrt{x+1}\,(x+1)}$，

$y''' = \dfrac{3}{8}(x+1)^{-\frac{5}{2}} = \dfrac{3}{8\sqrt{x+1}\,(x+1)^2}$

（４） $y = \cos x$ 　のとき，

$y' = -\sin x$，　$y'' = -\cos x$，　$y''' = \sin x$

（５） $y = \log x$ 　のとき，

$y' = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$，　$y'' = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$，　$y''' = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$

（６） $y = e^x$ 　のとき，

$y' = e^x$，　$y'' = e^x$，　$y''' = e^x$

練習２０

（１） $y = x^n$ 　のとき，

$y' = n x^{n-1}$，　$y'' = n(n-1)\,x^{n-2}$，　$y''' = n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$，…… 　より，

$y^{(n)} = n!$

（２） $y = e^{2x}$ 　のとき，

$y' = 2e^{2x}$，　$y'' = 2^2 e^{2x}$，　$y''' = 2^3 e^{2x}$，…… 　より，

$y^{(n)} = 2^n e^{2x}$

練習２１

$y^2 = -8x$ 　のとき，

両辺を x で微分すると，$2y \cdot \dfrac{dy}{dx} = -8$ 　より，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{y}$

練習２２

（１） $y^2 = x$ 　のとき，

両辺を x で微分すると，$2y \cdot \dfrac{dy}{dx} = 1$ 　より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y}$

（２）$x^2+y^2=1$　のとき，

両辺を x で微分すると，$2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　より，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

（３）$x^2-y^2=1$　のとき，

両辺を x で微分すると，$2x-2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　より，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

練習２３

（１）$x=2t^2$，$y=2t-1$　のとき，

$$\frac{dx}{dt}=4t\text{，}\ \frac{dy}{dt}=2\quad\text{より，}\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{2t}$$

（２）$x=\cos t$，$y=\sin t$　のとき，

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t\text{，}\ \frac{dy}{dt}=\cos t\quad\text{より，}\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{\cos t}{\sin t}=-\frac{1}{\tan t}$$

第２節　いろいろな関数の導関数　補充問題 解答

４．

（１）$y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$　のとき，$y'=\dfrac{\cos x\cdot(1+\cos x)-\sin x\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{1}{1+\cos x}$

（２）$y=x\sin x+\cos x$　のとき，$y'=(\sin x+x\cos x)-\sin x=x\cos x$

（３）$y=(\log x)^2$　のとき，$y'=2\log x\cdot(\log x)'=\dfrac{2}{x}\log x$

（４）$y=\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=\log|x-1|-\log|x+1|$　のとき，$y'=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x^2-1}$

（５）$y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$　のとき，$y'=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

（６）$y=a^{2x+1}$　のとき，$y'=a^{2x+1}\log a\cdot(2x+1)'=2a^{2x+1}\log a$

５．

$$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+a})=\frac{(x+\sqrt{x^2+a})'}{x+\sqrt{x^2+a}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}=\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}(x+\sqrt{x^2+a})}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

第５章　微分法　章末問題 解答

１．

$f(x)=x\sqrt{x}$　のとき，

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)\sqrt{x+h}-x\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)\sqrt{x+h}-x\sqrt{x}\}\{(x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x}\}}{h\{(x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x}\}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h\{(x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x}\}}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h\{(x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x}\}}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+3xh+h^2}{(x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{3x^2}{2x\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

2.

（1） $y=\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$　のとき,

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{3x^2+x-1}{2x\sqrt{x}}$$

（2） $y=\sin^2 x\cos 2x$　のとき,

$$y'=2\sin x\cos x\cdot\cos 2x+\sin^2 x\cdot(-2\sin 2x)=2\sin x\cdot(\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x)=2\sin x\cos 3x$$

（3） $y=\sqrt{1+\cos x}$　のとき,

$$y'=-\frac{\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}$$

（4） $y=2^{\log x}$　のとき,

$$y'=2^{\log x}\log 2\cdot(\log x)'=\frac{2^{\log x}\log 2}{x}$$

3.

（1） $y=\dfrac{x^2}{x-1}$　のとき,

$$y'=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2},$$

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)^2-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

（2） $y=e^{-2x^2}$　のとき,

$$y'=e^{-2x^2}(-2x^2)'=-4xe^{-2x^2}$$

$$y''=-4\{e^{-2x^2}+x\cdot(-4xe^{-2x^2})\}=4(4x^2-1)e^{-2x^2}$$

（3） $y=\sqrt{x^2+1}$　のとき,

$$y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$y''=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

（4） $y=e^x\sin x$　のとき,

$$y'=e^x(\sin x+\cos x)$$

$$y''=e^x\{(\sin x+\cos x)+(\cos x-\sin x)\}=2e^x\cos x$$

４．

$$1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\quad (x\neq 1)$$

この両辺を x で微分すると，

$$1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}=\frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

５．

$y=e^x(\sin x+\cos x)$　のとき，

$y'=e^x\{(\sin x+\cos x)+(\cos x-\sin x)\}=2e^x\cos x$

$y''=2e^x(\cos x-\sin x)$　より，

$y''-2y'+2y=2e^x(\cos x-\sin x)-4e^x\cos x+2e^x(\sin x+\cos x)=0$

６．

（１）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　のとき，両辺を x で微分すると，

$\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　より，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$

（２）$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　のとき，両辺を x で微分すると，

$\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　より，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{a^2y}$

７

$x=(1+\cos t)\cos t$，$y=(1+\cos t)\sin t$　のとき，

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t\cos t-\left(1+\cos t\right)\sin t=-2\sin t\cos t-\sin t=-\sin 2t-\sin t$$

$$\frac{dy}{dt}=-\sin^2 t+\left(1+\cos t\right)\cos t=\cos^2 t-\sin^2 t+\cos t=\cos 2t+\cos t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=-\frac{\cos 2t+\cos t}{\sin 2t+\sin t}$$

８．

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(a+h)-f(a)\}+\{f(a)-f(a-h)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=2f'(a)$$

９．

（１）$f(x)=\log x$　とすると，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$　であり，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)-\log 1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=1$$

（２） $f(x)=e^x$ とすると， $f'(x)=e^x$ であり，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)=1$$

１０．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ のとき，

（１） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2=e^2$

（２） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

（３） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2=e^2$

１１．

（１） $\displaystyle y=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ のとき，

$$y'=\frac{-\dfrac{1}{\cos^2 x}(1+\tan x)-(1-\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan x)^2}=-\frac{2}{\cos^2 x\cdot(1+\tan x)^2}=-\frac{2}{(\cos x+\sin x)^2}$$

（２） $y=x^2(\log x)^3$ のとき，

$$y'=2x(\log x)^3+3x^2(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}=2x(\log x)^3+3x(\log x)^2=x(\log x)^2(2\log x+3)$$

（３） $\displaystyle y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ のとき，

$$y'=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$$

１２．

$f(x)=\sin x$ について， $\displaystyle f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ ……… ① を数学的帰納法により証明する。

［１］ $\displaystyle f^{(1)}(x)=f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ である。

［２］ $n=k$ のとき，① が成立と過程すると， $\displaystyle f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$ であり，このとき，

$$f^{(k+1)}(x)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)=\sin\left\{\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}=\sin\left\{x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right\}$$

よって，① は， $n=k+1$ のときも成立する。

［１］,［２］ より，① はすべての自然数 n について成立する。

１３．

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ のとき，両辺を x で微分すると，

$\displaystyle\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ より， $\displaystyle\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$