数学Ⅲ　第７章　積分法とその応用

第１節　不定積分

１限目	Ｐ１９２～Ｐ１９４	不定積分の基本性質
２限目	Ｐ１９５	三角関数，指数関数の不定積分
３限目	Ｐ１９６～Ｐ１９８	置換積分法
４限目	Ｐ１９９～Ｐ２００	部分積分法
５限目	Ｐ２０１～Ｐ２０２	いろいろな関数の不定積分
６限目	Ｐ２０３	補充問題

第２節　定積分

１限目	Ｐ２０４～Ｐ２０６	定積分とその基本性質
２限目	Ｐ２０７～Ｐ２０８	定積分の置換積分法
３限目	Ｐ２０９～Ｐ２１０	偶関数，奇関数と定積分
４限目	Ｐ２１１	定積分の部分積分法
５限目	Ｐ２１２	定積分と導関数
６限目	Ｐ２１３～Ｐ２１５	定積分と和の極限
６限目	Ｐ２１６～Ｐ２１７	定積分と不等式
８限目	Ｐ２１８	補充問題

第３節　積分法の応用

１限目	Ｐ２１９～Ｐ２２１	面積（１）
２限目	Ｐ２２２～Ｐ２２３	面積（２）
３限目	Ｐ２２４～Ｐ２２６	定積分と体積
４限目	Ｐ２２７～Ｐ２２９	回転体の体積
５限目	Ｐ２３０～Ｐ２３３	道のり
６限目	Ｐ２３４～Ｐ２３５	曲線の長さ
７限目	Ｐ２３６	補充問題
８限目	Ｐ２３７	章末問題Ａ
９限目	Ｐ２３７	章末問題Ａ
10限目	Ｐ２３８	章末問題Ｂ
11限目	Ｐ２３８	章末問題Ｂ

第１節　不定積分　練習問題 解答

練習１

（1）$\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$

（2）$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

（3）$\int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

（4）$\int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$

（5）$\int \sqrt[4]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + C$

（6）$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

練習２

（1）$\int \frac{x^2 - 4x + 1}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \log|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$

（2）$\int \frac{(x^2 - 2)(x^2 - 3)}{x^4} dx = \int \frac{x^4 - 5x^2 + 6}{x^4} dx = \int \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^4} \right) dx = x + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^3} + C$

（3）$\int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

（4）$\int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$

（5）$\int \sqrt[4]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + C$

（6）$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

練習３

（1）$\int (\cos x - 2\sin x) dx = \sin x + 2\cos x + C$

（2）$\int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx = \int \left(2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 2\sin x - \tan x + C$

（3）$\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta - 1} = -\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\tan\theta + C$

（4）$\int (2 - \tan\theta)\cos\theta\, d\theta = \int (2\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta = 2\sin\theta + \cos\theta + C$

（5）$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\log 5} + C$

（6）$\int (3^x - 2e^x)\, dx = \frac{3^x}{\log 3} - 2e^x + C$

練習４

（1）$\int (3x+1)^4 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}(3x+1)^5 + C = \frac{1}{15}(3x+1)^5 + C$

（2）$\int (4x-3)^{-3} dx = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)(4x-3)^{-2} + C = -\frac{1}{8}(4x-3)^{-2} + C$

（3）$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}} = \int (1-2x)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}(1-2x)^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-2x} + C$

（4） $\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\log|2x+1| + C$

（5） $\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

（6） $\int e^{3x-1}\, dx = \frac{1}{3}e^{3x-1} + C$

練習５

$x+1=t$ とおくと， $dx=dt$ より，

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t-1)\sqrt{t}\,dt = \int (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})\,dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{15}(3t^{\frac{5}{2}} - 5t^{\frac{3}{2}}) + C$$

$$= \frac{2}{15}t^{\frac{3}{2}}(3t-5) + C = \frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1} + C$$

練習６

（1） $\sqrt{2x-1} = t$ とおくと， $2x-1=t^2$ より， $2dx = 2t\,dt$ 　　 $dx = t\,dt$

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx = \int \frac{1}{2}(t^2+1)t\cdot t\,dt = \frac{1}{2}\int (t^4+t^2)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right) + C = \frac{1}{30}(3t^5+5t^3) + C$$

$$= \frac{1}{30}t^3(3t^2+5) + C = \frac{1}{30}(6x+2)(2x-1)\sqrt{2x-1} + C = \frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$$

（2） $\sqrt{x+1} = t$ とおくと， $x+1=t^2$ より， $dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{t^2+1}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int (t^2+1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right) + C = \frac{2}{3}(t^3+3t) + C$$

$$= \frac{2}{3}t(t^2+3) + C = \frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+1} + C$$

練習７

（1） $x^3+2=t$ とおくと， $3x^2dx = dt$ より，

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+2}\cdot 3x^2dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3+2} + C$$

（2） $\sin x = t$ とおくと， $\cos x\,dx = dt$ より，

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx = \int t^3dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

（3） $\log x = t$ とおくと， $\frac{1}{x}dx = dt$ より，

$$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$$

練習８

（1） $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx = \int \frac{(x^2+x-1)'}{x^2+x-1}\,dx = \log|x^2+x-1| + C$

（2） $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx = \log(e^x+1) + C$

（2） $\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = \log|\sin x| + C$

練習９

$$\begin{array}{|ll|}\hline u=x & v'=\sin x \\ u'=1 & v=-\cos x \\ \hline\end{array}$$

（１） $\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C$

$$\begin{array}{|ll|}\hline u=x & v'=e^x \\ u'=1 & v=e^x \\ \hline\end{array}$$

（２） $\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C$

練習１０

$$\begin{array}{|ll|}\hline u=\log 2x & v'=1 \\ u'=\dfrac{2}{x} & v=x \\ \hline\end{array}$$

（１） $\int\log 2x\,dx=x\log 2x-2\int dx=x\log 2x-2x+C=x(\log 2x-2)+C$

$$\begin{array}{|ll|}\hline u=\log x^2 & v'=1 \\ u'=\dfrac{2}{x}\log x & v=x \\ \hline\end{array}$$

（２） $\int\log x^2\,dx=x\log x^2-2\int\log x\,dx=x\log x^2-2(x\log x-x)+C$

$=x(\log x^2-2\log x+2)+C$

$$\begin{array}{|ll|}\hline u=\log x & v'=x \\ u'=\dfrac{1}{x} & v=\dfrac{x^2}{2} \\ \hline\end{array}$$

（３） $\int x\log x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\log x-\dfrac{1}{2}\int x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\log x-\dfrac{x^2}{4}+C$

$=\dfrac{x^2}{4}(2\log x-1)+C$

練習１１

$\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$ とおくと，$a(x+2)+b(x+1)=(a+b)x+(2a+b)=x$ より，

$a+b=1$，$2a+b=0$ よって， $a=-1$，$b=2$ であるから，

$\int\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}dx=\int\left(\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=2\log|x+2|-\log|x+1|+C$

練習１２

（１） $\int\dfrac{x^2-1}{x+2}dx=\int\left(x-2+\dfrac{3}{x+2}\right)dx=\dfrac{x^2}{2}-2x+3\log|x+2|+C$

（２） $\int\dfrac{4x^2}{2x-1}dx=\int\left(2x+1+\dfrac{1}{2x-1}\right)dx=x^2+x+\dfrac{1}{2}\log|2x-1|+C$

（３） $\int\dfrac{3}{x^2+x-2}dx=\int\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}dx=\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)dx=\log|x-1|-\log|x+2|+C$

練習１３

（１） $\int\cos^2 x\,dx=\int\dfrac{1+\cos 2x}{2}dx=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)+C=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$

（２） $\int\sin^2 3x\,dx=\int\dfrac{1-\cos 6x}{2}dx=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{6}\sin 6x\right)+C=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{12}\sin 6x+C$

（３） $\int\sin x\cos x\,dx=\dfrac{1}{2}\int\sin 2x\,dx=-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$

（４） $\int\cos 3x\cos 2x\,dx=\dfrac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos x)\,dx=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}\sin 5x+\sin x\right)+C=\dfrac{1}{10}\sin 5x+\dfrac{1}{2}\sin x+C$

（５） $\int\sin x\sin 3x\,dx=\int\sin 3x\sin x\,dx=-\dfrac{1}{2}\int(\cos 4x-\cos 2x)\,dx=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}\sin 5x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

$=-\dfrac{1}{10}\sin 5x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$

第１節　不定積分　補充問題 解答

1.

（１）$\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\tan^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}(\tan x)^{-2}dx$

$$=\int(\tan x)'(\tan x)^{-2}dx=-(\tan x)^{-1}+C=-\frac{1}{\tan x}+C$$

（２）$\displaystyle\int\frac{dx}{\tan^2 x}=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=-\frac{1}{\tan x}-x+C$

2.

（１）$4-x^2=t$　とおくと，$-2x\,dx=dt$　より，$x\,dx=-\dfrac{1}{2}dt$

$$\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{4-x^2}+C$$

（２）$e^x=t$　とおくと，$e^x dx=dt$　より，

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx=\int\frac{1}{t(t+1)}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\log|t|-\log|t+1|+C$$

$$=\log e^x-\log(e^x+1)+C=x-\log(e^x+1)+C$$

（３）$\displaystyle\int\frac{\log(x+1)}{x^2}dx=-\frac{\log(x+1)}{x}+\int\frac{1}{x(x+1)}dx$

$$=-\frac{\log(x+1)}{x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=-\frac{\log(x+1)}{x}+\log|x|-\log|x+1|+C$$

$u=\log(x+1)$	$v'=\dfrac{1}{x^2}$
$u'=\dfrac{1}{x+1}$	$v=-\dfrac{1}{x}$

（４）$\displaystyle\int(\sin x+\cos x)^2dx=\int(1+2\sin x\cos x)dx=\int(1+\sin 2x)dx=x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

（５）$\cos x=t$　とおくと，$-\sin x\,dx=dt$　より，$\sin x\,dx=-\,dt$

$$\int\sin^3 x\,dx=\int\sin x\cdot(1-\cos^2 x)\,dx=\int(t^2-1)dt=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

（６）$\displaystyle\int\cos^4 x\,dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{8}\int(3+4\cos 2x+\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

3.

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\tan\frac{x}{2}+C=\tan\frac{x}{2}+C$$

4.

$$F(x)=\int\frac{dx}{x^2+3x+2}=\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)}=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\log|x+1|-\log|x+2|+C$$

であり，$F(0)=-\log 2+C=0$　より，$\mathrm{C}=\log 2$

よって，$F(x)=\log|x+1|-\log|x+2|+\log 2$

第２節　定積分　練習問題 解答

練習１４

（１）$\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}$

（２）$\displaystyle\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx=\int_1^8 x^{\frac{1}{3}}\,dx=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8=\left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right]_1^8=\frac{3}{4}(16-1)=\frac{45}{4}$

（３）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta=\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$

（４）$\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$

（５）$\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x}=\left[\log|x|\right]_{-2}^{-1}=\log 1-\log 2=-\log 2$

（６）$\displaystyle\int_{-1}^1 2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_{-1}^1=\frac{1}{\log 2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2\log 2}$

練習１５

（１）$\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_1^2=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

（２）$\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(2x+1)^4\right]_0^1=\frac{1}{8}(81-1)=10$

（３）$\displaystyle\int_{-1}^1 (e^t-e^{-t})\,dt=\left[e^t+e^{-t}\right]_{-1}^1=\left(e+\frac{1}{e}\right)-\left(\frac{1}{e}+e\right)=0$

（４）$\displaystyle\int_0^\pi \sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^\pi=-\frac{1}{2}(1-1)=0$

（５）$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{2}(2\pi-0)=\pi$

（６）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4\theta\cos 2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 6\theta+\sin 2\theta)\,d\theta=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\cos 6\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$=-\frac{1}{12}(0-1)-\frac{1}{4}(0-1)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

練習１６

（１）$\displaystyle\int_0^\pi|\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=(1-0)-(0-1)=2$

（２）$\displaystyle\int_{-1}^2|e^x-1|\,dx=-\int_{-1}^0(e^x-1)\,dx+\int_0^2(e^x-1)\,dx=-\left[e^x-x\right]_{-1}^0+\left[e^x-x\right]_0^2$

$$=-\left(1-\frac{1}{e}\right)+\{0-(-1)\}+(e^2-1)-(2-0)=e^2+\frac{1}{e}-3$$

練習１７

（１）$\int_0^1 x(1-x)^5\,dx=-\int_1^0(1-t)t^5\,dt=\int_0^1(t^5-t^6)\,dt$

$$=\left[\frac{t^6}{6}-\frac{t^7}{7}\right]_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$$

$1-x=t$　とおくと，
$-dx=dt$ より，$dx=-dt$

x	$0\to 1$
t	$1\to 0$

（２）$\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx=\int_1^4(t+1)\sqrt{t}\,dt=\int_1^4(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})\,dt$

$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{16}{15}$$

$x-1=t$　とおくと，
$dx=dt$

x	$2\to 5$
t	$1\to 4$

練習１８

（１）$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}$$

$x=\sin\theta$　とおくと，
$dx=\cos\theta\,d\theta$

x	$0\to 1$
θ	$0\to\frac{\pi}{2}$

（２）$\int_{-3}^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta\,d\theta=\frac{9}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$$=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{2}\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{9}{2}\pi$$

$x=3\sin\theta$　とおくと，
$dx=3\cos\theta\,d\theta$

x	$-3\to 3$
θ	$-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$

（３）$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}4\cos^2\theta\,d\theta=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$$=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2\left\{\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\pi$$

$x=2\sin\theta$　とおくと，
$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$-1\to\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{3}$

（４）$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=2[\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$

$x=2\sin\theta$　とおくと，
$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$1\to\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{3}$

練習１９

（１）$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=[\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}$$

$x=\tan\theta$　とおくと，$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$
$x^2+1=1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0\to\sqrt{3}$
θ	$0\to\frac{\pi}{3}$

（２）$\int_{-2}^2\frac{dx}{x^2+4}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\theta}{4}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{1}{2}[\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\frac{\pi}{4}$$

$x=2\tan\theta$　とおくと，$dx=\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$
$x^2+4=4(1+\tan^2\theta)=\frac{4}{\cos^2\theta}$

x	$-2\to 2$
θ	$-\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{4}$

練習２０

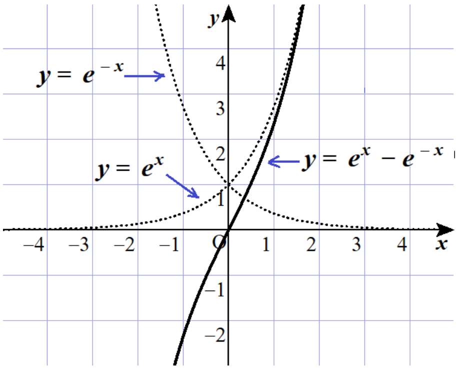
偶関数：② x^4+3

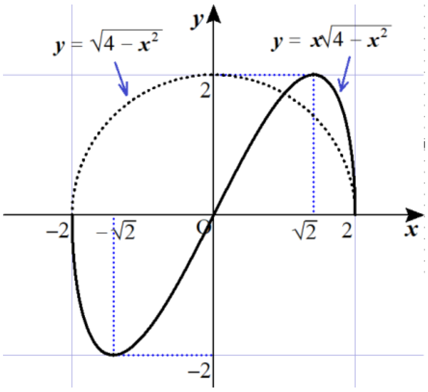
奇関数：① x^3　　③ $\tan x$

練習２１

（１）$\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)\,dx=\int_{-2}^{2}(3x^2+5)\,dx=2\int_{0}^{2}(3x^2+5)\,dx=2\Big[x^3+5x\Big]_0^2=2(8+10)=36$

（２）$\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})\,dx=0$　　（３）$\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx=0$





（４）$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx=\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

練習２２

（１）$\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin x\,dx=\big[-x\cos x\big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=(\pi-0)+\big[\sin x\big]_0^{\pi}=\pi$

$u=x$	$v'=\sin x$
$u'=1$	$v=-\cos x$

（２）$\displaystyle\int_0^{1}xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx=(e-0)-\Big[e^x\Big]_0^1=e-(e-1)=1$

$u=x$	$v'=e^x$
$u'=1$	$v=e^x$

（３）$\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx=(2\log 2-0)-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2$

$\displaystyle=2\log 2-\frac{1}{4}(4-1)=2\log 2-\frac{3}{4}$

$u=\log x$	$v'=x$
$u'=\dfrac{1}{x}$	$v=\dfrac{x^2}{2}$

練習２３

（１）$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt=\sin x$　　（２）$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x t\log t\,dt=x\log x$

練習２４

$\displaystyle G(x)=\int_0^x (x-t)e^t dt=x\int_0^x e^t dt-\int_0^x te^t dt$　のとき，

$\displaystyle G'(x)=\left(\int_0^x e^t dt+xe^x\right)-xe^x=\int_0^x te^t dt=\Big[te^t\Big]_0^x-\int_0^x e^t dt=(xe^x-0)-\Big[e^t\Big]_0^x=xe^x-(e^x-1)$

$=xe^x-e^x+1$

$G''(x)=(e^x+xe^x)-e^x=xe^x$

練習２５

$\displaystyle T_n=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})=\frac{1}{3}=\mathrm{S}$

練習２６

$$\mathrm{S}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4=\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

練習２７

（１）$x\geqq 0$　のとき，

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{(x^2+x+1)-(x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{x^2}{(x+1)(x^2+x+1)}\geqq 0$$　より，

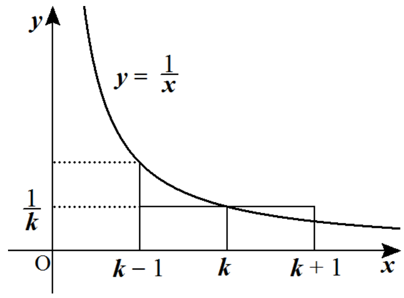
$$\frac{1}{x+1}\geqq\frac{1}{x^2+x+1}$$　（等号は，$x=0$　のとき）

（２）（１）より，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}dx>\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx$　であり，

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\left[\log|x+1|\right]_0^1=\log 2$　より，$\displaystyle\log 2>\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx$　である。

練習２８

$x>0$　のとき，$f(x)=\dfrac{1}{x}$　は減少関数だから，右図より，

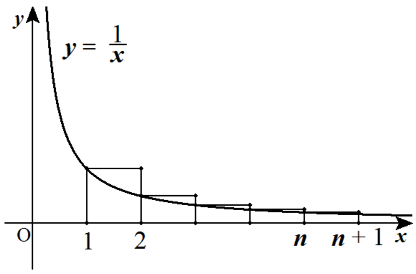


$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx$　（k は２以上の自然数）

$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$　……　①　は，$k=1$　でも成り立つので，

①　を $k=1$　から $k=\mathrm{n}$　まで辺々加えると，

$\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$　より，

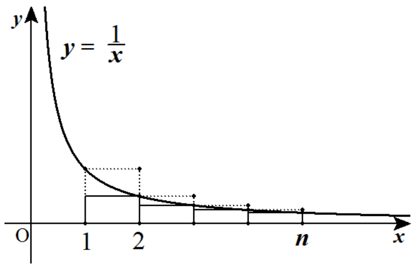


$\displaystyle\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$　……　②

$\displaystyle\frac{1}{k}<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx$　……　③　についても，

③　を $k=2$　から $k=\mathrm{n}$　まで辺々加えると，

$\displaystyle\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{1}{x}dx$　より，



$\displaystyle\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n$　であり，この両辺に１を加えると，

$\displaystyle 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n+1$　……　④

よって，②，④　より，

$\displaystyle\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n+1$　である。

第２節　定積分　補充問題 解答

５．

（１）$\displaystyle\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 (x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = 2(2-1) + \frac{2}{3}(8-1) = 2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}$

（２）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos\theta)'}{\cos\theta}d\theta = -\big[\log|\cos\theta|\big]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\log\frac{1}{2} - 0\right) = \log 2$

（３）$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos^2 2\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{1+\cos 4\theta}{2}d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} = \frac{1}{2}\left\{\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} + \frac{1}{8}\left\{0 - \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$

$\displaystyle= \frac{7}{12}\pi + \frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{16}$

（４）$\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(3-x)^2}dx = \left[\frac{x}{3-x}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{3-x}dx = (2-0) + \big[\log|3-x|\big]_0^2$

$= 2 + (0 - \log 3) = 2 - \log 3$

$u = x$	$v' = \dfrac{1}{(3-x)^2}$
$u' = 1$	$v = \dfrac{1}{3-x}$

（５）$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}dt = -\frac{1}{2}\big[e^{-t}\big]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

$x^2 = t$　とおくと，

$2x\,dx = dt$　より，$x\,dx = \dfrac{1}{2}dt$

x	$0 \to 1$
t	$0 \to 1$

（６）$\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log x\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\log x\right]_1^4 - \frac{2}{3}\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

$\displaystyle= \left(\frac{16}{3}\log 4 - 0\right) - \frac{4}{9}\big[x\sqrt{x}\big]_1^4 = \frac{32}{3}\log 2 - \frac{4}{9}(8-1)$

$\displaystyle= \frac{32}{3}\log 2 - \frac{28}{9}$

$u = \log x$	$v' = \sqrt{x}$
$u' = \dfrac{1}{x}$	$v = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$

６．

（１）$\displaystyle\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$\displaystyle= 2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\cdot a\cos\theta\,d\theta = 2a^4\int_0^1 \sin^2\theta(1 - \sin^2\theta)\,d\theta$

$\displaystyle= 2a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta - \sin^4\theta)\,d\theta = 2a^4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$\displaystyle= 2a^4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}a^4$

$x = a\sin\theta$　とおくと，

$dx = a\cos\theta\,d\theta$

x	$0 \to a$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$

（２）$\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x^2}{x^2 + a^2}dx = 2\int_0^a \frac{x^2}{x^2 + a^2}dx = 2\int_0^a \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2}\right)dx$

$\displaystyle= 2a - 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\theta}{a^2}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta = 2a - 2a\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$

$\displaystyle= 2a - \frac{\pi}{2}a = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)a$

$x = a\tan\theta$　とおくと，

$dx = \dfrac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

$x^2 + a^2 = a^2(1 + \tan^2\theta) = \dfrac{a^2}{\cos^2\theta}$

x	$0 \to a$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{\text{参考}}$　（１）では，次の公式を利用した。

n が２以上の偶数のとき，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,d\theta = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

n が１以上の奇数のとき，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,d\theta = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$

７．

（1）$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{2x}\sin\theta\,d\theta=\sin 2x\cdot(2x)'=2\sin 2x$

（2）$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2}\cos t\,dt=\cos x^2\cdot(x^2)'=2x\cos x^2$

（3）$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x^2}\log t\,dt=\log x^2\cdot(x^2)'-\log x=4x\log x-\log x=(4x-1)\log x$

参考　一般に，$f(x)$ の原始関数の１つを $F(x)$，a を定数とすると，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)\,dt=\frac{d}{dx}\{F(a)-F(x)\}=-f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)\,dt=\frac{d}{dx}\{F(x^2)-F(a)\}=f(x^2)\cdot(x^2)'=2x\,f(x^2)$$

８．

$f(x)=x+\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt$　のとき，$f(x)=x+C$　とおくと，

$$\boxed{\begin{array}{ll} u=t+C & v'=\sin t \\ u'=1 & v=-\cos t \end{array}}$$

$\mathrm{C}=\displaystyle\int_0^{\pi}(t+C)\sin t\,dt=-\big[(t+C)\cos t\big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos t\,dt$

$=-\{-(\pi+C)-C\}+\big[\sin t\big]_0^{\pi}=2C+\pi$　より，

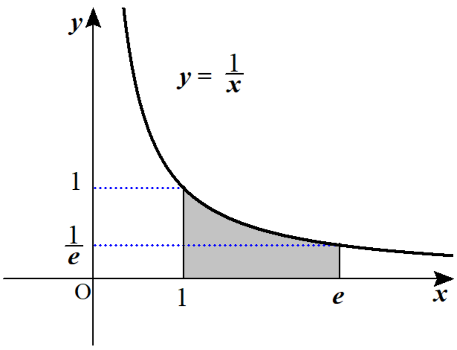
$\mathrm{C}=-\pi$　　　よって，$f(x)=x-\pi$

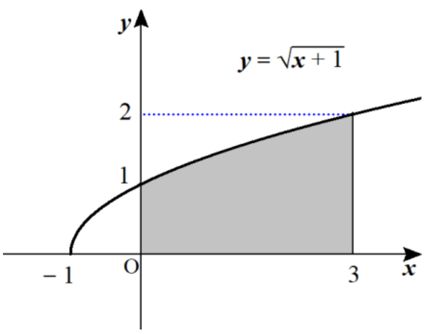
第３節　積分法の応用　練習問題 解答

練習２９

（1）$\displaystyle\int_1^e\frac{1}{x}dx=\big[\log|x|\big]_1^e=\log e-\log 1=1$

（2）$\displaystyle\int_0^3\sqrt{x+1}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$

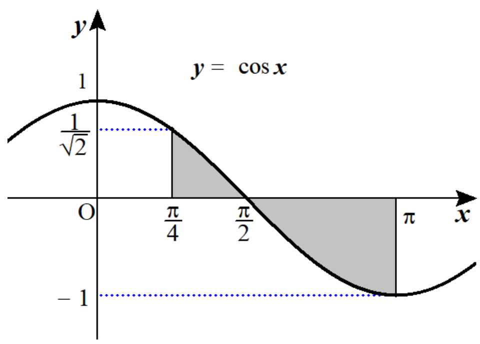




練習３０

$\mathrm{S}=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx=\big[\sin x\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\big[\sin x\big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-(0-1)=2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



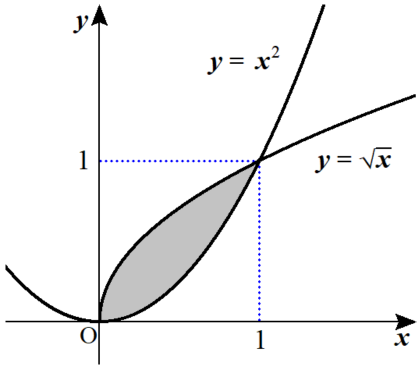
練習３１

（１） $y=x^2$， $y=\sqrt{x}$

$x^2=\sqrt{x}$ （$x \geqq 0$）とおくと， $x^4=x$ より，

$x^4-x=x(x^3-1)=0$ より， $x=0$， 1

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$



（２） $x+4y=5$， $y=\dfrac{1}{x}$

$x+4y=5$ より， $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$

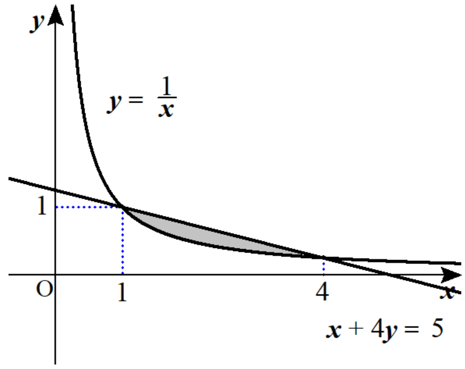
$-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{x}$ とおくと， $-x^2+5x=4$

$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=0$ より， $x=1$， 4

$$S=\int_1^4\left(-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\log x\right]_1^4$$

$$=-\frac{1}{8}(16-1)+\frac{5}{4}(4-1)-(\log 4-\log 1)$$

$$=-\frac{15}{8}+\frac{15}{4}-2\log 2=\frac{15}{8}-2\log 2$$

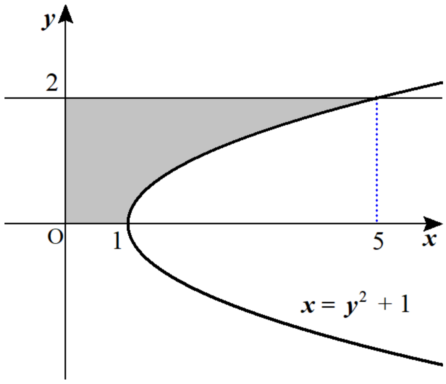


練習３２

（１） $y^2=x-1$， x 軸， y 軸， $y=2$

$y^2=x-1$ より， $x=y^2+1$

$$S=\int_0^2(y^2+1)\,dy=\left[\frac{1}{3}y^3+y\right]_0^2=\frac{8}{3}+2=\frac{14}{3}$$



（２） $x=y^2$， $x=y+2$

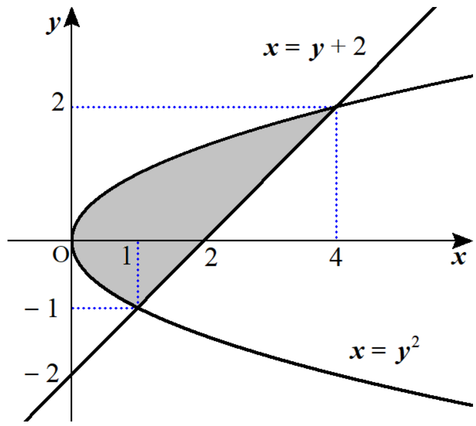
$y^2=y+2$ とおくと，

$y^2-y-2=(y+1)(y-2)=0$ より， $y=-1$， 2

$$S=\int_{-1}^2(y+2-y^2)\,dy=\left[\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^2$$

$$=\frac{1}{2}(4-1)+2\{2-(-1)\}-\frac{1}{3}\{8-(-1)\}$$

$$=\frac{3}{2}+6-3=\frac{9}{2}$$



練習３３

$4x^2+2y^2=1$ より， $2y^2=1-4x^2$

$y^2=2\left(\dfrac{1}{4}-x^2\right)$ であり， $y \geqq 0$ のとき， $y=\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1}{4}-x^2}$ であるから，

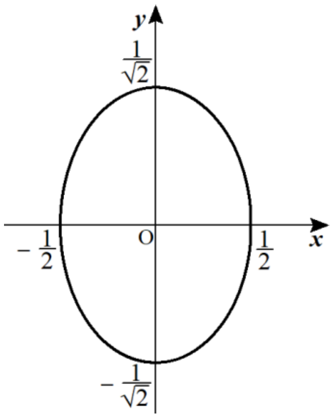
$$S=4\int_0^{\frac{1}{2}}y\,dx=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx=4\sqrt{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

$\boxed{\text{参考}}$　$4x^2+2y^2=1$　は，

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$　であるから，

右の図のような楕円であり，囲まれる部分の面積は，

$$S=\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$　である。



練習３４

（１）$x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta$（$0\leqq\theta\leqq\pi$）

$$S=\int_{-3}^{3}y\,dx=-\int_{\pi}^{0}2\sin\theta\cdot3\sin\theta d\theta=6\int_{0}^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=3\int_{0}^{\pi}(1-\cos2\theta)\,d\theta=3\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{0}^{\pi}=3\pi$$

$x=3\cos\theta$　とおくと，

$dx=-3\sin\theta\,d\theta$

x	-3	→	3
θ	π	→	0

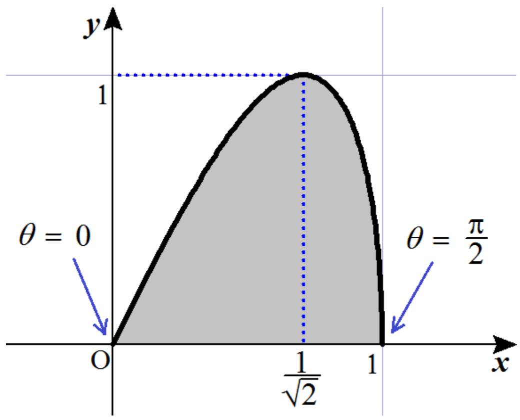
$\boxed{\text{別解}}$　楕円　$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　の上半分の面積なので，

$$S=\frac{1}{2}\times3\times2\pi=3\pi$$

（２）$x=\sin\theta$，$y=\sin2\theta$（$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$）

$x=\sin\theta$　より，$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$，　$y=\sin2\theta$　より，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\cos2\theta$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\theta}$	1	$+$	$+$	$+$	0
x	0	→	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	→	1
$\frac{dy}{d\theta}$	2	$+$	0	$-$	0
y	0	↑	1	↓	0
(x,y)	$(0,0)$	↗	$(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$	↘	$(1,0)$



よって，増減表とグラフより，

$$S=\int_{0}^{1}y\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\cos^2\theta\,d\theta=2\int_{0}^{1}t^2\,dt$$

$$=2\left[\frac{t^3}{3}\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}$$

←$x=\sin\theta$　より，

$dx=\cos\theta\,d\theta$

x	0	→	1
θ	0	→	$\frac{\pi}{2}$

←$\cos\theta=t$　とおくと，

$-\sin\theta\,d\theta=dt$

$\sin\theta\,d\theta=-dt$

θ	0	→	$\frac{\pi}{2}$
t	1	→	0

$\boxed{\text{参考}}$　この関係式から θ を消去すると，$y=2x\sqrt{1-x^2}$　である。

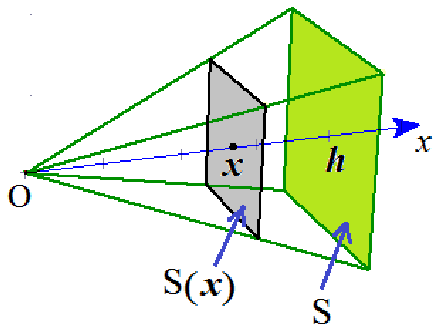
（章末問題　５　を参照）

練習３５

この角錐の頂点から底面に垂線を下ろし，これを x 軸とし，頂点を原点Oにとる。座標が x である点を通り， x 軸に垂直な平面で角錐を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。断面の多角形と，底面の多角形は相似であり，その面積比は， $S(x)$ ： S $= x^2$ ： h^2 であるから，

$S(x)=\dfrac{S}{h^2}x^2$ である。したがって，

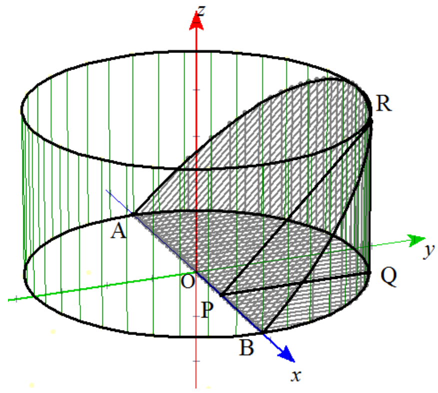
$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx=\frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}Sh$$



練習３６

線分ＡＢ上の点をＰ(x，０，０）を通り x 軸に垂直な平面で立体を切ったときの断面は，点Ｐと２点Ｑ(x， $\sqrt{a^2-x^2}$ ，０)，Ｒ(x， $\sqrt{a^2-x^2}$ ， $\sqrt{a^2-x^2}$ ）を頂点とする直角二等辺三角形ＰＱＲであり，その面積は，

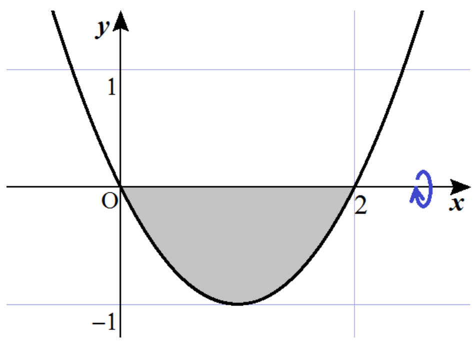
$$S(x)=\frac{1}{2}\times\sqrt{a^2-x^2}\times\sqrt{a^2-x^2}$$
$$=\frac{1}{2}(a^2-x^2) \text{ より，}$$
$$V=\int_{-a}^{a}S(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx$$
$$=\int_0^a (a^2-x^2)\,dx=\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$
$$=a^3-\frac{a^3}{3}=\frac{2}{3}a^3$$



練習３７

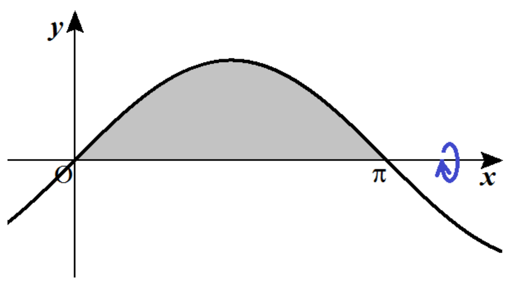
（１） $y=x^2-2x$

$$V=\pi\int_0^2 y^2dx=\pi\int_0^2(x^2-2x)^2dx$$
$$=\pi\int_0^2(x^4-4x^3+4x^2)dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\pi\left(\frac{32}{5}-16+\frac{32}{3}\right)=\frac{16}{15}\pi$$



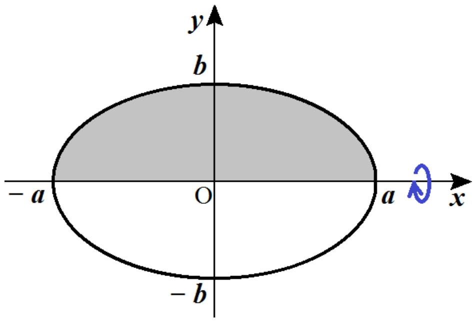
（２） $y=\sin x$ （$0\leqq x\leqq\pi$）

$$V=\pi\int_0^\pi y^2dx=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi$$
$$=\frac{\pi^2}{2}$$



練習３８

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ より，$y^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ であるから，



$$\mathrm{V}=2\pi\int_0^a y^2\,dx=2\pi b^2\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a$$

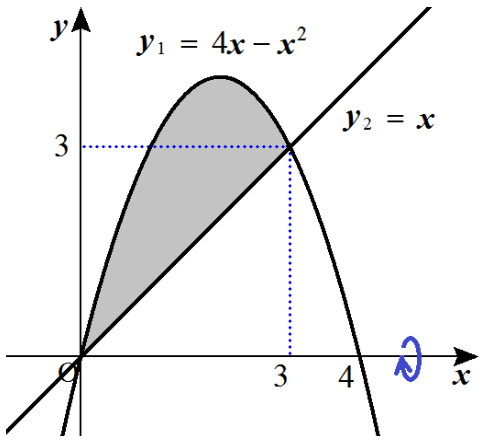
$$=2\pi b^2\left(a-\frac{a}{3}\right)=2\pi b^2\cdot\frac{2}{3}a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

練習３９

$y_1=4x-x^2$，$y_2=x$

$4x-x^2=x$ とおくと，

$x^2-3x=x(x-3)=0$ より，$x=0$，3



$$\mathrm{V}=\pi\int_0^3 {y_1}^2dx-\pi\int_0^3 {y_2}^2dx$$

$$=\pi\int_0^3(4x-x^2)^2dx-\pi\int_0^3 x^2dx$$

$$=\pi\int_0^3\{(4x-x^2)^2-x^2\}dx$$

$$=\pi\int_0^3\{(x^4-8x^3+16x^2)-x^2\}dx$$

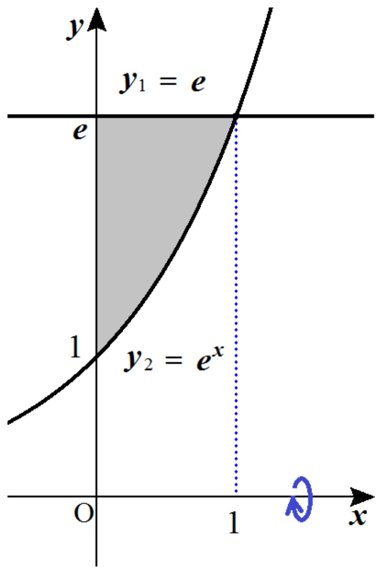
$$=\pi\int_0^3(x^4-8x^3+15x^2)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}-2x^4+5x^3\right]_0^3=\left(\frac{243}{5}-162+135\right)\pi=\frac{108}{5}\pi$$

練習４０

$y_1=e$，$y_2=e^x$

$e^x=e$ とおくと，$x=1$ より，



$$\mathrm{V}=\pi\int_0^1 {y_1}^2dx-\pi\int_0^1 {y_2}^2dx$$

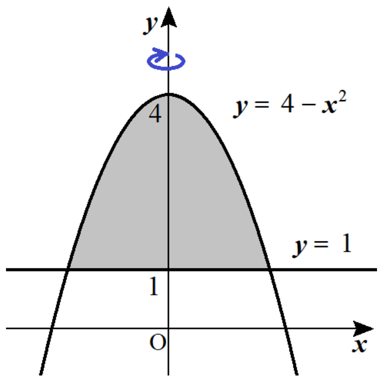
$$=\pi\int_0^1 e^2dx-\pi\int_0^3 e^{2x}dx$$

$$=\pi e^2-\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\pi e^2-\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^2+1)$$

練習４１

（１）$y=4-x^2$，　$y=1$



$$\mathrm{V}=\pi\int_1^4 x^2dy=\pi\int_1^4(4-y)\,dy$$

$$=\pi\left[4y-\frac{y^2}{2}\right]_1^4=\pi\left\{4(4-1)-\frac{1}{2}(16-1)\right\}$$

$$=\pi\left(12-\frac{15}{2}\right)=\frac{9}{2}\pi$$

（２） $y=1-\sqrt{x}$， x 軸， y 軸

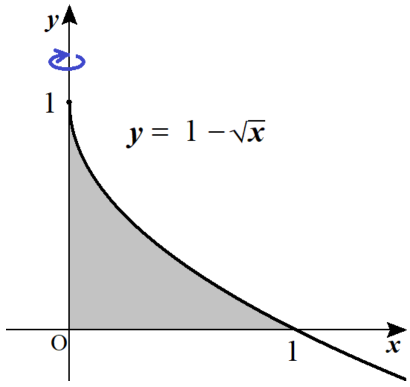
$\sqrt{x}=1-y$ 　より，

$x^2=(y-1)^4=y^4+4y^3+6y^2+4y+1$

$$\mathrm{V}=\pi\int_0^1 x^2dy=\pi\int_0^1(y^4+4y^3+6y^2+4y+1)\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^5}{5}+y^4+2y^3+2y^2+y\right]_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{1}{5}+1+2+2+1\right)=\frac{31}{5}\pi$$



練習４２

$v=4-2t$ 　より， $x=\int v\,dt=\int(4-2t)\,dt=-t^2+4t+C$ 　であり，

$t=0$ 　のとき， $x=\mathrm{C}=2$ 　より， $x=-t^2+4t+2$

よって， $t=3$ 　のとき， $x=-9+12+2=5$

練習４３

$$s=\int_0^{\pi}|v|dt=\int_0^{\pi}|\sin 2t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2t\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}[\cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}[\cos 2t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{1}{2}(-1-1)+\frac{1}{2}\{1-(-1)\}=2$$

練習４４

$x=e^{-t}\cos\pi t$， $y=e^{-t}\sin\pi t$ 　のとき，

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos\pi t-\pi e^{-t}\sin\pi t=-e^{-t}(\cos\pi t+\pi\sin\pi t)$$

$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin\pi t+\pi e^{-t}\cos\pi t=e^{-t}(\pi\cos\pi t-\sin\pi t)$$

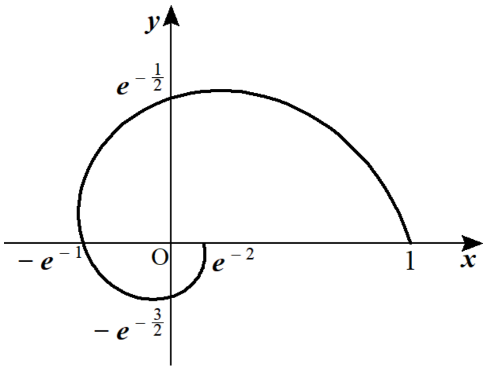
$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=e^{-t}\sqrt{(\cos\pi t+\pi\sin\pi t)^2+(\pi\cos\pi t-\sin\pi t)^2}$$

$=e^{-t}\sqrt{\pi^2+1}$ 　より，

$$s=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\sqrt{\pi^2+1}\int_0^2 e^{-t}\,dt$$

$$=-\sqrt{\pi^2+1}\left[e^{-t}\right]_0^2=-\sqrt{\pi^2+1}\,(e^{-2}-1)$$

$$=\sqrt{\pi^2+1}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$



練習４５

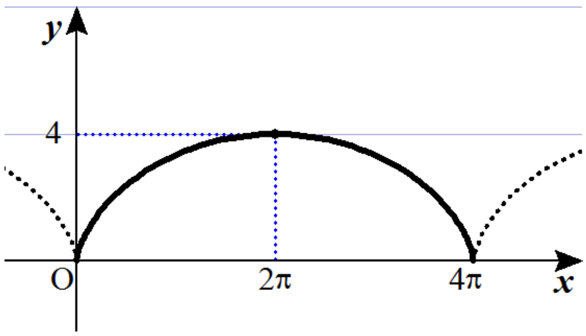
$x=2(t-\sin t)$， $y=2(1-\cos t)$ 　のとき，

$\dfrac{dx}{dt}=2(1-\cos t)$， $\dfrac{dy}{dt}=2\sin t$ 　より，

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=2\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}$$

$$=2\sqrt{2-2\cos t}=2\sqrt{2(1-\cos t)}=2\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}=4\sin\frac{t}{2}$$

$$\mathrm{L}=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-8\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=-8(-1-1)=16$$



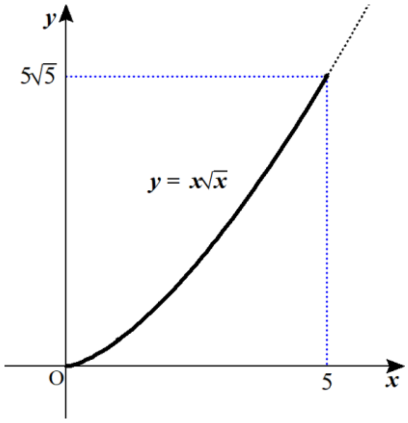
練習４６

$y=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$　のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$　より，

$$\mathrm{L}=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\right]_0^5=\frac{8}{27}\left\{\left(1+\frac{45}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$$

$$=\frac{8}{27}\left\{\left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}=\frac{8}{27}\left(\frac{343}{8}-1\right)=\frac{8}{27}\cdot\frac{335}{8}=\frac{335}{27}$$



第３節　積分法の応用　補充問題 解答

９.

$\sin x=\sin 2x$　とおくと，

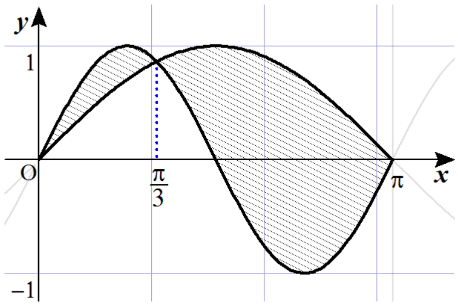
$\sin 2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=(2\cos x-1)\sin x=0$　であるから，

$0<x<\pi$　のとき，$\cos x=\dfrac{1}{2}$　より，$x=\dfrac{\pi}{3}$　よって，グラフより，

$$\mathrm{S}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{2}-1\right)-\left(-1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$



１０．

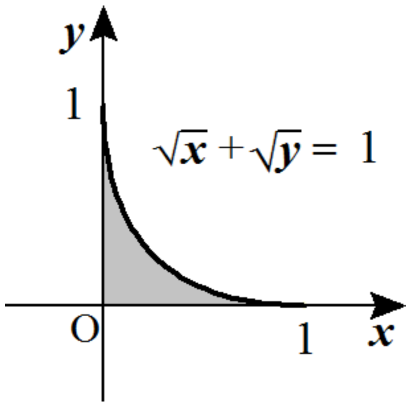
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$　より，$y=(1-\sqrt{x})^2=1-2\sqrt{x}+x$

よって グラフより，

$$T=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)\,dx$$

$$=\left[x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$



１１．

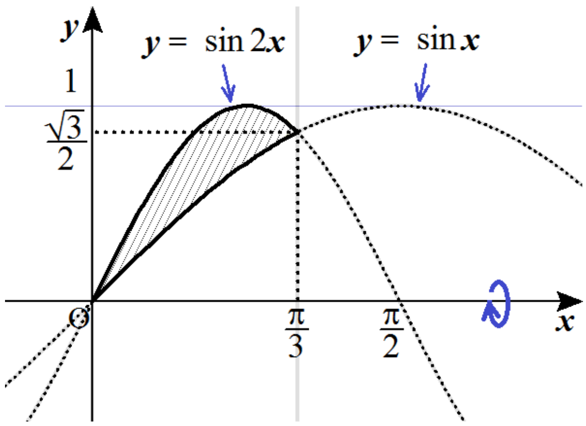
$\sin x=\sin 2x$（$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$）とおくと，

$2\sin x\cos x-\sin x=(2\cos x-1)\sin x=0$

より，$\cos x=\frac{1}{2}$，$\sin x=0$

よって，$x=0$，$\frac{\pi}{3}$

右のグラフより，



$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 2x\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 4x)\,dx-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{4}\sin\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$$

第７章　積分法とその応用　章末問題 解答

１．

（1）$e^x+1=t$ とおくと，$e^x dx=dt$　より，

$$\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1}+C$$

（2）$x-1=t$ とおくと，$dx=dt$　より，

$$\int\frac{x}{(x-1)^3}dx=\int\frac{t+1}{t^3}dt=\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt=-\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+C=-\frac{2t+1}{2t^2}+C=-\frac{2x-1}{2(x-1)^2}+C$$

（3）$$\int\frac{x}{x^2-3x+2}dx=\int\frac{x}{(x-1)(x-2)}dx=\int\left(\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx=2\log|x-2|-\log|x-1|+C$$

$$=\log\frac{(x-2)^2}{|x-1|}+C$$

（4）$\sin x=t$ とおくと，$\cos x\,dx=dt$　より，

$$\int \cos^5 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx = \int (\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1)\cos x\,dx = \int (t^4 - 2t^2 + 1)\,dt$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + t + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C$$

（５） $e^x = t$ とおくと，$e^x dx = dt$ より，

$$\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\{\log|t-1| - \log|t+1|\} + C = \frac{1}{2}\log\frac{|t-1|}{|t+1|} + C = \frac{1}{2}\log\frac{|e^x-1|}{e^x+1} + C$$

（６） $x^2+1=t$ とおくと，$2x\,dx = dt$ より，

$$\int 2x\log(x^2+1)\,dx = \int \log t\,dt = t\log t - t + C = (x^2+1)\log(x^2+1) + x^2 + C$$

２．

（１） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos x\,dx = \int_0^1 t^5\,dt = \left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

$\sin x = t$ とおくと，

$\cos x\,dx = dt$

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$0 \to 1$

（２） $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int_2^{e+1}\frac{1}{t}\,dt = [\log t]_2^{e+1} = \log(e+1) - \log 2 = \log\frac{e+1}{2}$

$e^x+1=t$ とおくと，

$e^x dx = dt$

x	$0 \to 1$
t	$2 \to e+1$

（３） $\displaystyle\int_1^e x^2\log x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\log x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3-1) = \frac{1}{9}(2e^3+1)$$

$u = \log x \qquad v' = x^2$

$u' = \dfrac{1}{x} \qquad v = \dfrac{x^3}{3}$

（４） $\displaystyle\int_0^4 |(x-4)(x-1)^3|\,dx = \int_{-1}^3 |(t-3)t^3|\,dt$

$$= \int_{-1}^0 (t-3)t^3 dt - \int_0^3 (t-3)t^3 dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{3}{4}t^4\right]_{-1}^0 - \left[\frac{t^5}{5} - \frac{3}{4}t^4\right]_0^3$$

$$= \left\{0 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right)\right\} - \left(\frac{243}{5} - \frac{243}{4}\right) = \frac{19}{20} + \frac{243}{20} = \frac{262}{20} = \frac{131}{10}$$

$x-1=t$ とおくと，

$dx = dt$

x	$0 \to 4$
t	$-1 \to 3$

（５） $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta = \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$x = \sin\theta$ とおくと，

$dx = \cos\theta\,d\theta$

x	$0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

（６） $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2\theta\cos^4\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\,d\theta$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$t = \tan\theta$ とおくと，

$dt = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

t	$0 \to \sqrt{3}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$

３．

・$m \neq n$　のとき，

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)t - \cos(m-n)t\}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)t - \frac{1}{m-n}\sin(m-n)t\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{m+n}(0-0) - \frac{1}{m-n}(0-0)\right\}$$

$$= 0$$

・$m = n$　のとき，

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt\,dt = \int_0^{2\pi}\sin^2 mt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2mt)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2m}\sin 2mt\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi - 0) - \frac{1}{4m}(0-0)$$

$$= \pi$$

よって，

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt\,dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}$$

４．

$$S = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{k}{n}}} = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 2\left[x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = 2(\sqrt{2}-1)$$

５．

$y^2 = x^2(1-x^2)$　より，$y = \pm x\sqrt{1-x^2}$　$(-1 \leqq x \leqq 1)$

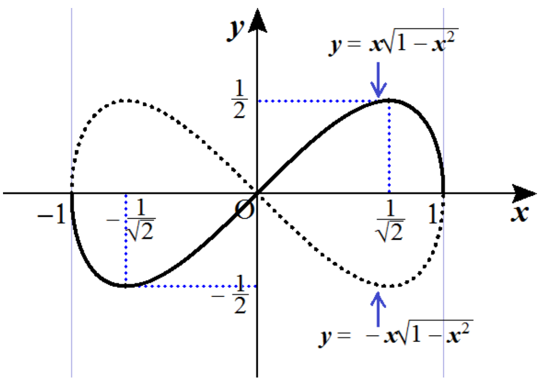
よって，求める面積は２曲線　$y = x\sqrt{1-x^2}$，$y = -x\sqrt{1-x^2}$　で囲まれた図形の面積である。

関数　$y = x\sqrt{1-x^2}$　の増減を考えると，

$$y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから，増減表より，

２曲線　$y = x\sqrt{1-x^2}$，$y = -x\sqrt{1-x^2}$　で囲まれた図形は右のグラフのとおり。



x	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	0

よって，

$$S=4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{t}\,dt$$

$$=2\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^1=\frac{4}{3}(1-0)=\frac{4}{3}$$

←$1-x^2=t$　とおくと，

$-2x\,dx=dt$　より，

$x\,dx=-\dfrac{1}{2}dt$

x	$0\ \to\ 1$
t	$1\ \to\ 0$

6.

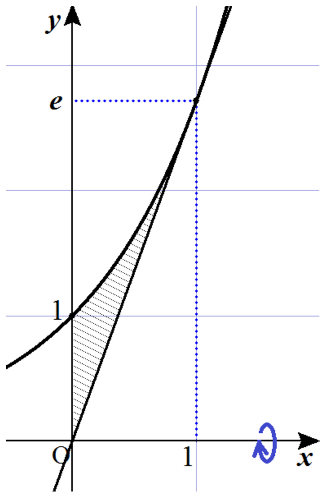
$y=e^x$　より，　$y'=e^x$

曲線上の点（1，e）における接線は，　$y=e(x-1)+e=ex$

$$S=\int_0^1(e^x-ex)\,dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=\left(e-\frac{e}{2}\right)-1=\frac{e}{2}-1$$

$$V=\pi\int_0^1(e^{2x}-e^2x^2)\,dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{e^2}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{3}\right)-\frac{1}{2}\right\}=\pi\left(\frac{e^2}{6}-\frac{1}{2}\right)$$



7.

$x=\log t$，　$y=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$　のとき，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$，　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)$　より，

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{t^2}+\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$$

よって，

$$s=\frac{1}{2}\int_1^3\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{t}\right]_1^3=\frac{1}{2}(3-1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-1\right)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

8.

（1）$\dfrac{1}{x^2(x+3)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x+3}$　とおくと，　$ax(x+3)+b(x+3)+cx^2=1$

$(a+c)x^2+(3a+b)x+3b=1$　より，

$a+c=0$，　$3a+b=0$，　$3b=1$　　よって，　$a=-\dfrac{1}{9}$，　$b=\dfrac{1}{3}$，　$c=\dfrac{1}{9}$

したがって，　$\dfrac{1}{x^2(x+3)}=\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+3}\right)$　より，

$$\int\frac{1}{x^2(x+3)}dx=\frac{1}{9}\int\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{9}\left(-\frac{3}{x}-\log|x|+\log|x+3|\right)+C$$

$$=\frac{1}{9}\log\left|\frac{x+3}{x}\right|-\frac{1}{3x}+C$$

（２） $\cos x = t$ 　とおくと， $-\sin x\,dx = dt$ 　より， $\sin x\,dx = -dt$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}(\log|t-1| - \log|t+1|) + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

９．

$$\mathrm{I} = \int_0^1 (e^x - ax)^2 dx = \int_0^1 (e^{2x} - 2axe^x + a^2x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}a^2x^3\right]_0^1 - 2a\left(\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-1) + \frac{1}{3}a^2 - 2ae + 2a\left[e^x\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2-1) + \frac{1}{3}a^2 - 2ae + 2a(e-1)$$

$$= \frac{1}{3}a^2 - 2a + \frac{1}{2}(e^2-1) = \frac{1}{3}(a^2-6a) + \frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$= \frac{1}{3}\{(a-3)^2 - 9\} + \frac{1}{2}(e^2-1) = \frac{1}{3}(a-3)^2 + \frac{1}{2}(e^2-7)$$

$u = x$	$v' = e^x$
$u' = 1$	$v = e^x$

よって， $a = 3$ 　のとき， Ｉは最小値 $\dfrac{1}{2}(e^2-7)$

１０．

$\displaystyle\int_a^{x^2} f(t)\,dt = \log x$ 　の両辺を x で微分すると， $2x\,f(x^2) = \dfrac{1}{x}$ 　より，

$f(x^2) = \dfrac{1}{2x^2}$ 　　よって， $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

$\displaystyle\int_a^{x^2} f(t)\,dt = \log x$ 　において， $x = \sqrt{a}$ 　を代入すると， $\log\sqrt{a} = 0$ 　より，

$\sqrt{a} = 1$ 　であるから， $a = 1$

１１．

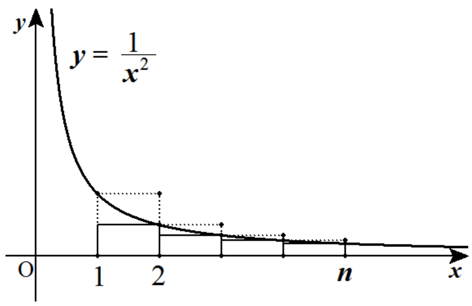
右のグラフより， n 　が２以上の自然数のとき，

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} < \int_1^n \frac{1}{x^2}dx$ 　であり，

$\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = -\left(\frac{1}{n}-1\right) = 1 - \frac{1}{n}$ 　であるから，

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n}$ 　　この不等式の両辺に１を加えると，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$



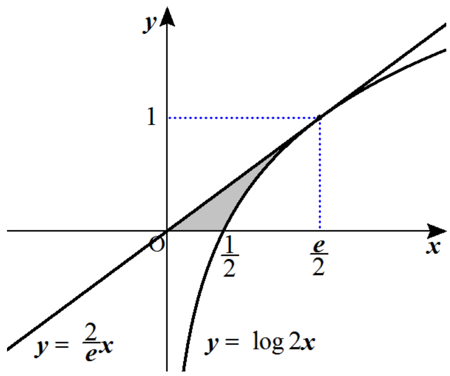
１２．

$y = \log 2x$ 　のとき， $y' = \dfrac{1}{x}$ 　より，

曲線上の点(t ， $\log 2t$ ）における接線は，

$y = \dfrac{1}{t}(x-t) + \log 2t = \dfrac{1}{t}x + \log 2t - 1$

この接線が原点Ｏを通るとき， $\log 2t - 1 = 0$ 　より， $t = \dfrac{e}{2}$



このとき，接点は，$(\frac{e}{2}, 1)$，接線は，$y=\frac{2}{e}x$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{2}\cdot 1-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\log 2x\,dx=\frac{e}{4}-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}(\log x+\log 2)\,dx=\frac{e}{4}-\left[x\log x-x+x\log 2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}$$

$$=\frac{e}{4}-\left[x\log x+(\log 2-1)x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}=\frac{e}{4}-\left(\frac{e}{2}\log\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right)-(\log 2-1)\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{e}{4}-\frac{e}{2}(1-\log 2)-\frac{1}{2}\log 2-\frac{e}{2}(\log 2-1)+\frac{1}{2}(\log 2-1)$$

$$=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}$$

１３．

右下のグラフより，

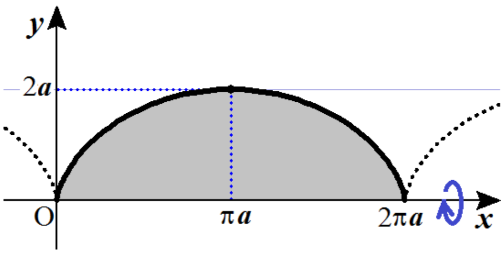
$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos\theta)^3d\theta$$

$$=\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)\,d\theta$$

$$=\pi a^2\int_0^{2\pi}\left\{1-3\cos\theta+\frac{3}{2}(1+\cos 2\theta)-\frac{1}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta)\right\}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}a^2\int_0^{2\pi}\{4-12\cos\theta+6(1+\cos 2\theta)-(3\cos\theta+\cos 3\theta)\}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}a^2\int_0^{2\pi}(10-15\cos\theta+6\cos 2\theta-\cos 3\theta)\,d\theta$$



$$=\frac{\pi}{4}a^2\left[10\theta-15\sin\theta+3\sin 2\theta-\frac{1}{3}\sin 3\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$=5\pi^2a^2$$